DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2023. 06. 011

ALLEE 效应对晶格河流模型的速度选择的影响

徐晓雯,潘超红*

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘　要:本文研究了 Allee 效应对反应-扩散-平流晶格河流模型的速度选择机制的影响。通过计算线性化系统的特征值,研究了平衡点 e_0 处的渐进行为。进而构造了新奇的上下解,并通过比较原理得到线性速度选择的充分条件。结果表明,只需要构造一组行波并证明是上解,即可得到最小行波速度的线性选择,同时可以得到 Allee 效应对行波速度的线性选择产生一定的影响。

关键词:反应-扩散-平流晶格河流模型;Allee 效应;行波解;速度选择

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A

文章编号:1673-0062(2023)06-0075-06

ALLEE Effect on Speed Selection for Lattice River Model

XU Xiaowen, PAN Chaohong*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, we investigated the influence of the Allee effect on the speed selection mechanism of the reaction-diffusion-advection lattice river model . The asymptotic behavior at the equilibrium point was investigated by calculating the eigenvalues of the linearized system. Then the novel upper and lower solutions were constructed and the sufficient condition for linear speed selection were obtained by the comparison principle. Then we found it is only necessary to construct a pair of traveling waves and prove that it is an upper solution to obtain a linear speed selection mechanism. And it can also be obtained that the Allee effect has influence on the linear selection of the traveling wave speed.

key words: reaction-diffusion-advection lattice river model; Allee effect; traveling wave solution; speed selection

---

收稿日期:2023-07-26

作者简介:徐晓雯(1999—),女,硕士研究生,主要从事微分方程方面的研究。E-mail: smilexiaowenxu@163. com。
*通信作者:潘超红(1983—),男,副教授,博士,主要从事微分方程方面的研究。E-mail: chaohongpan2020@163. com

0 引　言

晶格系统在材料科学[1]、生物学[2]、化学反应理论[3]等多个领域中有许多应用,例如,约瑟夫森结阵列[4]、耦合激光器阵列[5]等,相较于连续系统更加便于实验研究。对于这一类方程,行波解得到了广泛的研究,在参考文献[6-8]中 S. M. Bak 等研究了二维晶格系统上线性和非线性耦合振子无穷大系统的行波;参考文献[9]中 V. Booth 等重点研究了在晶格常微分方程(ordinary differential equation,ODE)和耦合映射晶格(coupled map lattice,CML)中的行波的存在性和稳定性,表明所得结果适用于离散的 Nagumo 方程。部分作者以经典反应项以 $f(v_n)=v_n(1-v_n)(a-v_n)$ 作为研究系统[10],表明了行波传播故障的存在是离散的 Nagumo 方程的独有特征,因为这种现象不会发生在连续的 Nagumo 方程中。根据实验的现实需要和传播失败的独特性两点来看,晶格动力系统的研究是有其独特意义的。

在行波解的广泛研究中,行波的速度影响着波传导的速度,在生物学的角度代表生物捕食或者繁衍生长的速度。部分学者在参考文献[11-13]中用上下解和比较原理对晶格系统行波速度的选择进行了研究。在大多数的行波系统的构建过程中,考虑了生物的生长速度和食物的竞争有关,然而 W. C. Allee 等[14]指出在物种低密度情况下,生物的种群密度和增长量成正相关,会加速物种灭绝速度。河流生物空间版图的行为分析[15]的研究中 Allee 效应会对生物种群密度产生不可忽视的影响。从数学的角度来看,为了方便计算,会有次齐性假设 $f(v_n)<f'(0)v_n$,Allee 效应的存在将其条件进行扩展,有助于对行波速度的进一步研究。

本文研究带有 Allee 效应的反应-扩散-平流晶格河流模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}=d(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)-\sigma u_n+\mu v_n+\\ \qquad\alpha(u_{n+1}-u_n),n\in\mathbb{Z},\\ \dfrac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}=\varepsilon(v_{n+1}+v_{n-1}-2v_n)+\sigma u_n-\mu v_n+\\ \qquad f(v_n),n\in\mathbb{Z},\end{cases}\tag{1}$$

可以看作是参考文献[16]中系统(1.3)的离散化,属于所谓的晶格动力系统,并在参考文献[16]中(1.3)的基础上改变了平流速度的方向,其代表生物运动速度与平流速度相反的上游无侵入环境的离散生物系统。其中,$u_n(t)$,$v_n(t)$ 分别代表生物在漂流层和底栖层的种群密度,$\sigma>0$ 表示单位时间内生物从漂流层到底栖层的转移比率,$\mu>0$ 代表单位时间内生物从底栖层到漂流层的转移比率,$\alpha>0$ 在漂流层代表水的平流速度,d 和 ε 分别表示生物种群在漂流层和底栖层的扩散系数,$f(v_n)$ 是在 n 处的一个底栖层生物反应项,它是一个二次可微函数,满足 $f(0)=f(1)=0$,$f'(1)<0<f'(0)$,并且当 $v_n\in(0,1)$ 时 $f(v_n)>0$。这个系统有两个平衡点 $e_0=(0,0)$ 和 $e_1=\left(\dfrac{\mu}{\sigma},1\right)$,可以知道 e_0 是不稳定的,e_1 是稳定的。

本文为了重点研究弱 Allee 效应对最小行波速度的影响,关注反应项为 $f(v_n)=v_n(1-v_n)(1+\rho v_n)$ 的河流系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}=d(u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n)-\sigma u_n+\mu v_n+\\ \qquad\alpha(u_{n+1}-u_n),n\in\mathbb{Z},\\ \dfrac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t}=\varepsilon(v_{n+1}+v_{n-1}-2v_n)+\sigma u_n-\mu v_n+\\ \qquad v_n(1-v_n)(1+\rho v_n),n\in\mathbb{Z}。\end{cases}\tag{2}$$

为了研究系统(2)的行波解,首先进行 $z=n-ct$ 变量变换,可以得到

$$u_n(t)=\phi(n-ct)$$
$$v_n(t)=\psi(n-ct),n\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{R}^+$$

从而得到

$$\begin{cases}dD_2[\phi](z)+c\phi'(z)-\sigma\phi(z)+\mu\psi(z)+\\ \quad\alpha D_1[\phi](z)=0,\\ \varepsilon D_2[\psi](z)+c\psi'(z)+\sigma\phi(z)-\mu\psi(z)+\\ \quad\psi(z)(1-\psi(z))(1+\rho\psi(z))=0。\end{cases}\tag{3}$$

其中,

$$D_2[\omega](z):=\omega(z+1)+\omega(z-1)-2\omega(z)$$

且 $$D_1[\omega](z):=\omega(z+1)-\omega(z)。\tag{4}$$

基于生物种群的增长角度来看,针对反应-扩散-平流晶格河流模型(3),本文主要研究 Allee 效应对满足边界条件为 $(\phi,\psi)(-\infty)=\left(\dfrac{\mu}{\sigma},1\right)$ 和 $(\phi,\psi)(+\infty)=(0,0)$ 的行波解的速度选择的影响。首先给出速度临界值 $c_{\min}$ 的定义 $c_{\min}:=\inf\{c\mid c\in\mathbb{R}$ 使得式(3)~式(4)有非负解$\}$,即当行波速度

$c \geqslant c_{\min}$ 时，式(3)～式(4)有非负解。通常情况下，这个速度的精确值是很难得到的，即使是简单的带有 Allee 效应的 Fisher-KPP 标量模型，也是不容易取到的。需要找到线性化系统在零附近的速度，并使用它来估计扩展速度。例如，对于我们的模型，通过在 e_0 附近线性化式(3)～式(4)，我们可以获得线性速度 c_0(具体细节将在下一节中进行阐述)，并且由参考文献[16]可以知道 $c \geqslant c_0$，这是一个被认为对所有合作系统都成立的事实。他们是否相等成为一个具有挑战性且有意义的问题，同时引出以下线性或非线性确定性的定义。

定义 1　若 $c_{\min}=c_0$，系统(3)的最小行波速度是线性选择的；若 $c_{\min}>c_0$，系统(3)的最小行波速度是非线性选择的。

1　在 e_0 处的渐进行为

研究行波 $(\phi,\psi)(z)$ 在 e_0 处的渐进行为，首先将系统(3)在 e_0 处进行线性化，并得到下列的常系数系统

$$\begin{cases} dD_2[\phi](z)+c\phi'(z)-\sigma\phi(z)+\mu\psi(z)+ \\ \quad \alpha D_1[\phi](z)=0, \\ \varepsilon D_2[\psi](z)+c\psi'(z)+\sigma\phi(z)-\mu\psi(z)+ \\ \quad \psi(z)=0。 \end{cases} \tag{5}$$

令 $(\phi,\psi)(z)=(A_1,A_2)\mathrm{e}^{-\lambda z}$，其中 A_1,A_2 及 λ 为正的常数，代入到式(4)中可以得到

$$\begin{cases} dA_1(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}-2)-c\lambda A_1-\sigma A_1+\mu A_2+ \\ \quad \alpha A_1(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)=0, \\ \varepsilon A_2(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}-2)-c\lambda A_2+\sigma A_1-\mu A_2+ \\ \quad A_2=0。 \end{cases} \tag{6}$$

式(6)对应的矩阵形式

$$k(\lambda)A=B(\lambda)A \tag{7}$$

其中，$A=(A_1,A_2)^{\mathrm{T}}$，$k(\lambda)=c\lambda$，

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} B_1(\lambda) & \mu \\ \sigma & B_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中，

$$B_1(\lambda)=d(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}-2)-\sigma+\alpha(\mathrm{e}^{-\lambda}-1),$$

$$B_2(\lambda)=\varepsilon(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}-2)-\mu+1。$$

式(7)有非零解当且仅当 $k(\lambda)$ 满足

$$k^2-(B_1+B_2)k+B_1B_2-\sigma\mu=0,$$

通过计算得到

$$\Delta=(B_1+B_2)^2-4(B_1B_2-\sigma\mu)=$$
$$(B_1-B_2)^2+4\sigma\mu>0,$$

因此方程(7)有两个实根，表示为

$$k_{\pm}=\frac{(B_1+B_2)\pm\sqrt{(B_1-B_2)^2+4\sigma\mu}}{2}$$

这里 $k_-<k_+$，将 B_1,B_2 带入后得到

$$k_+=\frac{(d+\varepsilon)(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}-2)-\sigma}{2}+$$
$$\frac{\alpha(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)-\mu+f'(0)}{2}+$$
$$\frac{\sqrt{[\theta+\mu-f'(0)]^2+4\sigma\mu}}{2}$$

其中 $\theta=(d-\varepsilon)(\mathrm{e}^{-\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}-2)-\sigma+\alpha(\mathrm{e}^{-\lambda}-1)$。

由于系统中的参数都是正的，因此对 $\lambda\in(0,+\infty)$，$k_+>0$。$B(\lambda)$ 对应的主特征值函数为 $k(\lambda)=k_+(\lambda)$，则 $k''(\lambda)>0$，$k(\lambda)$ 是一个关于 λ 的下凸函数。基于 c 与 λ 的对应关系得到下面引理。

引理 1　若定义线性速度为 $c_0:=\inf\limits_{\lambda\in(0,+\infty)}\dfrac{k(\lambda)}{\lambda}$，则方程 $k(\lambda)=c\lambda$ 解的情况有：当 $c<c_0$ 时，$k(\lambda)=c\lambda$ 没有解；当 $c=c_0$ 时，$k(\lambda)=c\lambda$ 有一个解；当 $c>c_0$ 时，$k(\lambda)=c\lambda$ 有两个解。

为了更直观的表述，当 $d=3,\sigma=4,\alpha=1,\varepsilon=0.1,\mu=1,f'(0)=1$ 时给出了图 1，其中，实线代表 $c(\lambda)=\dfrac{k(\lambda)}{\lambda}$ 函数图像，第一条直的虚线 $c=17$ 代表 $c>c_0$ 时有两个交点，第二条直的虚线 $c=0.363\,27$ 代表 $c=c_0$ 时有一个交点。正如图片所示，$c>c_0$ 时，记两个交点的横坐标分别为 λ_1 和 λ_2。根据交点，接下来我们给出 $z\to\infty$ 时系统(4)的渐进行为。

引理 2　根据引理 1 中 c_0 的定义，对任意的 $c>c_0$，当 $A_2=1$ 时行波 (ϕ,ψ) 有如下渐进行为：

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}\sim C_1\begin{pmatrix}\dfrac{\mu}{c\lambda_1-B_1(\lambda_1)}\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+ C_2\begin{pmatrix}\dfrac{\mu}{c\lambda_2-B_1(\lambda_2)}\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\lambda_2 z} \tag{8}$$

或者表示为

$$\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix}\sim C_1\begin{pmatrix}\dfrac{c\lambda_1-B_2(\lambda_1)}{\sigma}\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+ C_2\begin{pmatrix}\dfrac{c\lambda_2-B_2\lambda_2}{\sigma}\\ 1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\lambda_2 z} \tag{9}$$

其中,$C_1>0$ 或者 $C_1=0$,$C_2>0$。式(8)和式(9)是 $A_2=1$ 标准化情况下的两种不同表示方式,可以表示所有在 e_0 处线性化方程的非零解。

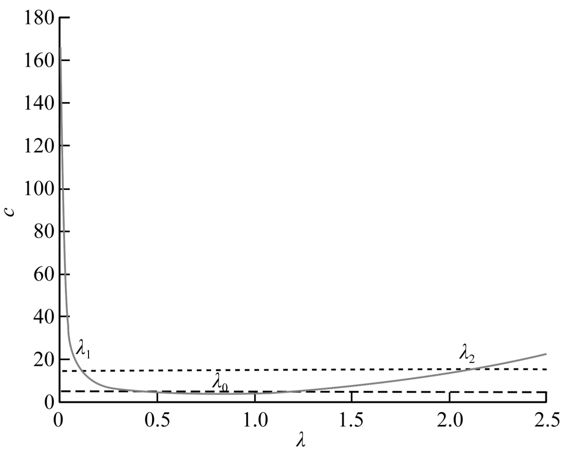

图 1　$c=\frac{k(\lambda)}{\lambda}$ 的函数图像

Fig. 1　Image of the function of $c=\frac{k(\lambda)}{\lambda}$

证明:对于给定的 $c>c_0$,系统(5)的行波满足,当 $z\to\infty$ 时 $(\phi,\psi)\to(0,0)$,因此当 $z\to\infty$ 时,$f(\psi)$ 与 ψ 是等价的,并且行波解 (ϕ,ψ) 满足系统(5)。

由方程 $k(\lambda)=c\lambda$ 以及对应矩阵 $B(\lambda)$,可以得到对应的正的特征向量 $A=(A_1,A_2)^{\mathrm{T}}$,必要时通过泰勒展开,可以得到 $e^{B(\lambda)}A=e^{k(\lambda)}A$,并且 A 也是主特征值 $e^{k(\lambda)}$ 所对应的特征向量,任何非零不可约矩阵有一个唯一的正主特征值,则对应的主特征向量 A 具有严格正的坐标。因此,通过线性系统的特征方程,在归一化 $A_2=1$ 之后,可以得到对应的特征方程

$$\begin{cases} dA_1(e^{-\lambda}+e^{\lambda}-2)-c\lambda A_1-\sigma A_1+\mu+\\ \quad\alpha A_1(e^{-\lambda}-1)=0,\\ \varepsilon(e^{-\lambda}+e^{\lambda}-2)-c\lambda+\sigma A_1-\mu+1=0。\end{cases} \tag{10}$$

根据式(9)可以得到

$$A_1(\lambda_i(c))=\frac{\mu}{c\lambda_i-B_1(\lambda_i)} \tag{11}$$

进而得到式(5)的渐进行为是式(8)或式(9)。

2　最小行波速度的线性选择机制

本节首先给出上下解的定义。

定义 2(上下解)　对于给定的 $c\geqslant c_0$,若二元连续函数 $(\phi,\psi)(z)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可微,使得

$$\begin{cases} dD_2[\phi](z)+c\phi'(z)-\sigma\phi(z)+\mu\psi(z)+\\ \quad\alpha D_1[\phi](z)\leqslant(\geqslant),\mathrm{a.e.}\,\mathbb{R},\\ \varepsilon D_2[\psi(z)]+c\psi'(z)+\sigma\phi(z)-\mu\psi(z)+\\ \quad\psi(z)(1-\psi(z))(1+\rho\psi(z))\leqslant(\geqslant),\\ \quad\mathrm{a.e.}\,\mathbb{R}, \end{cases} \tag{12}$$

称 $(\phi,\psi)(z)$ 是系统(3)的上解(下解)。

为了便于本节内容的叙述,将式(3)左侧进行如下符号的简化

$$\begin{cases} L_1(\phi,\psi)=dD_2[\phi](z)+c\phi'(z)-\sigma\phi(z)+\\ \qquad\mu\psi(z)+\alpha D_1[\phi](z),\\ L_2(\phi,\psi)=\varepsilon D_2[\psi(z)]+c\psi'(z)+\sigma\phi(z)-\\ \qquad\mu\psi(z)+\psi(z)(1-\psi(z))(1+\rho\psi(z))。\end{cases}$$

若系统(3)同时存在一组上解和一组下解且都以速度 c_0 进行传播,通过比较原理可以知道,这个系统一定存在一组以速度 c_0 进行传播的行波解,则系统行波解是线性选择的。取足够小的 ε_1,当 $c=c_0+\varepsilon_1$ 时,存在 $0<\lambda_1(c)<\lambda_2(c)$,接下来构造一组恰当的行波,并证明是系统(3)的上解。

$$\bar{\psi}(z)=\frac{1}{1+e^{\lambda_1 z}},\lambda_1=\lambda_1(c) \tag{13}$$

$$\bar{\phi}(z)=\bar{\psi}(z)\left[A_1+\left(\frac{\mu}{\sigma}-A_1-a\right)\bar{\psi}(z)+a\bar{\psi}(z)^2\right] \tag{14}$$

其中,$a>0$。

式(13)和式(14)对应的一阶导分别为

$$\bar{\psi}'(z)=-\lambda_1\bar{\psi}(z)(1-\bar{\psi}(z)),$$

$$\bar{\phi}'(z)=-\lambda_1\bar{\psi}(z)(1-\bar{\psi}(z))\left[A_1+2\left(\frac{\mu}{\sigma}-A_1-a\right)\bar{\psi}(z)+3a\bar{\psi}^2(z)\right],$$

其中,由式(11)可知 $A_1=A_1(\lambda_1(c))$。结合式(4)可以得到

$$D_2[\bar{\psi}](z)=\bar{\psi}(z)(1-\bar{\psi}(z))\gamma(1+q_1(\lambda_1,x)), \tag{15}$$

$$D_2[\bar{\psi}^2](z)=\bar{\psi}(z)(1-\bar{\psi}(z))\gamma q_2(\lambda_1,\kappa), \tag{16}$$

$$D_2[\bar{\psi}^3](z)-D_2[\bar{\psi}^2](z)=\bar{\psi}^2(z)(1-\bar{\psi}(z))\gamma q_3(\lambda_1,\kappa), \tag{17}$$

$$D_1[\bar{\psi}](z)=\bar{\psi}(1-\bar{\psi})\tau(1+q_4(\lambda_1,\kappa)), \tag{18}$$

$$D_1[\bar{\psi}^2](z)=\bar{\psi}(z)(1-\bar{\psi}(z))\tau q_5(\lambda_1,\kappa), \tag{19}$$

$$D_1[\bar{\psi}^3](z)-D_1[\bar{\psi}^2](z)=\bar{\psi}^2(z)(1-\bar{\psi}(z))\tau q_6(\lambda_1,\kappa), \tag{20}$$

其中,

$$q_1(\lambda_1,\kappa)=-\frac{e^{\lambda_1}\kappa+e^{-\lambda_1}\kappa+2}{(1+e^{-\lambda_1}\kappa)(1+e^{\lambda_1}\kappa)},$$

$$q_2(\lambda_1,\kappa)=\frac{(\gamma+4)\kappa^3+2(\gamma+3)\kappa^2-\gamma\kappa-2}{(1+e^{-\lambda_1}\kappa)^2(1+e^{\lambda_1}\kappa)^2},$$

$$q_3(\lambda_1,\kappa)=\frac{g(\kappa)}{(-1+e^{\lambda_1})^2(1+e^{-\lambda_1}\kappa)^3(1+e^{\lambda_1}\kappa)^3},$$

$$q_4(\lambda_1,\kappa)=\frac{-1+e^{\lambda_1}}{1+e^{\lambda_1}\kappa},$$

$$q_5(\lambda_1,\kappa)=\frac{e^{\lambda_1}[2+e^{\lambda_1}(e^{\lambda_1}+1)]}{(1+e^{\lambda_1}\kappa)^2},$$

$$q_6(\lambda_1,\kappa)=-\frac{e^{\lambda_1}[-1+3e^{\lambda_1}\kappa^2+e^{2\lambda_1}\kappa^3+e^{\lambda_1}\kappa^3]}{(1+e^{\lambda_1}\kappa)^3},$$

在 $q_3(\lambda_1,\kappa)$ 中，$g(\kappa)$ 表示为

$$g(\kappa)=g_1(\kappa)+g_2(\kappa)+g_3(\kappa)+g_4(\kappa)+g_5(\kappa)+g_6(\kappa),$$

$$g_1(\kappa)=(3\kappa-1)(e^{2\lambda_1}-2e^{\lambda_1}+1),$$

$$g_2(\kappa)=6\kappa^2(-1+e^{3\lambda_1}-e^{2\lambda_1}+e^{-\lambda_1}),$$

$$g_3(\kappa)=\kappa^3(8-e^{3\lambda_1}+2e^{-2\lambda_1}-e^{-\lambda_1}+8e^{2\lambda_1}+2e^{4\lambda_1}-18e^{\lambda_1}),$$

$$g_4(\kappa)=\kappa^4(-9+3e^{-\lambda_1}+3e^{3\lambda_1}+12e^{\lambda_1}-9e^{2\lambda_1}),$$

$$g_5(\kappa)=3\kappa^5(1-e^{-\lambda_1}+e^{2\lambda_1}-e^{3\lambda_1}),$$

$$g_6(\kappa)=\kappa^6(-e^{-\lambda_1}+2e^{\lambda_1}-e^{3\lambda_1}),$$

在上述各式中，

$$\gamma=e^{\lambda_1}+e^{-\lambda_1}-2,\tau=e^{-\lambda_1}-1,\kappa(z)=e^{\lambda_1 z}。$$

$q_i(\lambda_1,\kappa)$ 在 $\kappa\in(0,\infty)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{\kappa\to\infty}q_i(\lambda_1,\kappa)$ 存在，则 $q_i(\lambda_1,\kappa)$ 是连续有界的。并把上述式(13)～式(20)带入到系统(3)的左边，得到

$$\begin{aligned}&dD_2[\bar\phi]+\alpha D_1[\bar\phi]-\sigma\bar\phi(z)+\mu\bar\psi(z)+c\bar\phi'(z)=\\&dA_1D_2[\bar\psi](z)+d\left(\frac{\mu}{\sigma}-A_1\right)D_2[\bar\psi^2]+\\&daD_2[\bar\psi^3-\bar\psi^2](z)+\alpha A_1D_1[\bar\psi](z)+\\&\alpha\left(\frac{\mu}{\sigma}-A_1\right)D_1[\bar\psi^2](z)+\alpha aD_1[\bar\psi^3-\bar\psi^2](z)-\\&\sigma A_1\bar\psi(z)(1-\bar\psi(z))+\sigma a\bar\psi^2(z)(1-\bar\psi(z))+\\&\mu\bar\psi(z)(1-\bar\psi(z))-c\lambda_1\bar\psi(z)(1-\bar\psi(z))A_1-\\&c\lambda_1\bar\psi(z)(1-\bar\psi(z))\left[2\left(\frac{\mu}{\sigma}-A_1-a\right)\bar\psi(z)+\right.\\&\left.3a\bar\psi^2\right]\leqslant\bar\psi(z)(1-\bar\psi(z))Q(\bar\psi)(z),\end{aligned}$$

要使得式(13)～式(14)满足式(12)的第一个式子上解的定义，即 $L_1(\bar\phi,\bar\psi)\leqslant0$ 就要满足

$$Q(z)\leqslant0。\tag{21}$$

带入到系统(3)的第二个式子可以得到，

$$\begin{aligned}&\varepsilon D_2[\bar\psi](z)+c\bar\psi'(z)+\sigma\bar\psi\left[A_1+\left(\frac{\mu}{\sigma}-A_1-a\right)\bar\psi+\right.\\&\left.a\bar\psi^2\right]-\mu\bar\psi(z)+\bar\psi(1-\bar\psi)(1+\rho\bar\psi)=\\&\bar\psi(z)(1-\bar\psi(z))[\varepsilon\gamma q_1(x)-\sigma a\bar\psi(z)+\\&\rho\bar\psi(z)]\leqslant\bar\psi^2(z)(1-\bar\psi(z))[-2e^{-\lambda_1}\varepsilon\gamma-\sigma a+\rho]。\end{aligned}$$

如果在式(21)成立的条件下，能够满足

$$\rho\leqslant\max\{2e^{-\lambda_1}\varepsilon\gamma+\sigma a,1\},\tag{22}$$

也就得到 $L_2(\bar\phi,\bar\psi)\leqslant0$，则称式(13)～式(14)是系统(3)的一组上解。

引理 3　若不等式(21)～(22)都成立，则式(13)～式(14)所给出的二元连续函数($\bar\phi,\bar\psi$)是系统(3)的一组上解。

为了得到最小行波速度线性速度选择的充分条件，构造另外一组合适的行波，并证明是系统(3)的下解。

$$\underline{\phi}=\max\{0,A_1e^{-\lambda_1 z}(1-Me^{-\delta z})\},\tag{23}$$

$$\underline{\psi}=\max\{0,e^{-\lambda_1 z}(1-Me^{-\delta z})\},\tag{24}$$

这里 $0<\delta\ll1$ 且 M 是一个正数。将式(23)和式(24)这组行波($\underline{\psi},\underline{\phi}$)分别带入到系统(3)的两个式子中可以得到

$$\begin{aligned}&dD_2[\underline{\phi}](z)+c\underline{\phi}'(z)-\sigma\underline{\phi}(z)+\mu\underline{\psi}(z)+\\&\alpha D_1[\underline{\phi}]=dA_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}(\mathrm{e}^{-\lambda_1}+\mathrm{e}^{\lambda_1}-2)-cA_1\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}-\\&dA_1M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}(\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)}+\mathrm{e}^{\lambda_1+\delta}-2)+cA_1(\lambda_1+\\&\delta)M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}-\sigma A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+\mu\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+\sigma A_1M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}-\\&\mu M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}+\alpha A_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}(\mathrm{e}^{-\lambda_1}-1)-\\&\alpha A_1M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}(\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)}-1)=\\&-M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}[dA_1(\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)}+\mathrm{e}^{\lambda_1+\delta}-2)-\\&cA_1(\lambda_1+\delta)-\sigma A_1+\mu+\alpha A_1(\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)}-1)]>0,\end{aligned}$$

并且可以得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon D_2[\underline{\psi}(z)]+c\underline{\psi}'(z)+\sigma\underline{\phi}(z)-\mu\underline{\psi}(z)+\\&\underline{\psi}(z)(1-\underline{\psi}(z))(1+\rho\underline{\psi}(z))=\varepsilon\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}(\mathrm{e}^{-\lambda_1}+\\&\mathrm{e}^{\lambda_1}-2)-\varepsilon M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}(\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)}+\mathrm{e}^{\lambda_1+\delta}-2)+\\&cM(\lambda_1+\delta)\mathrm{e}^{-(\delta+\lambda_1)z}-c\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+\sigma\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}-\\&\sigma M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}-\mu\mathrm{e}^{-\lambda_1 z}+\mu M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}+\\&\underline{\psi}(z)(1-\underline{\psi}(z))(1+\rho\underline{\psi}(z))=J_1(z)+J_2(z),\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}J_1(z)=&-M\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)z}[\varepsilon(\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\delta)}+\mathrm{e}^{\lambda_1+\delta}-2)-\\&c(\lambda_1+\delta)+\sigma A_1-\mu+1],\end{aligned}$$

$$J_2(z)=[-\rho\underline{\psi}^2(z)+(\rho-1)\underline{\psi}(z)]。$$

由函数 $c=\dfrac{k(\lambda)}{\lambda}$ 可知，$J_1(z)>0$ 始终成立。选择充分大的 M 且 $\underline{\psi}(z)\ll1$ 时，$J_1(z)$ 主导着 $J_2(z)$，因此由 $J_1(z)$ 的正负来决定。将以上叙述总结为下面的引理。

引理 4　当 $c=c_0+\varepsilon$ 时，存在 $0<\delta\ll1$ 并且 $M\gg1$，则式(23)～式(24)定义的连续函数($\underline{\psi}$,

$\underline{\phi}$)是系统(3)的一对下解。

由以上分析,当 ε_1 足够小时,本文找到了合适的上解和下解都以 $c_0+\varepsilon_1$ 进行传播,因此可以给出本文关键的最小行波速度线性选择的结论。

定理 1 当 $c=c_0+\varepsilon_1$ 时,存在 $0<\delta\ll1$ 并且 $M\gg1$,若不等式(21)~(22)都成立,则系统(3)的最小行波速度是线性选择的。

3 结 论

生物种群晶格模型是研究较为广泛的一类系统,本文在原有的系统中添加了 Allee 效应反应项 $f(v_n)=v_n(1-v_n)(1+\rho v_n)$,重点关注了 ρ 对线性速度选择的影响。首先给出上下解和速度选择的相关知识,且对系统(2)进行行波变换,进而对所得到的行波系统(3)在平衡点 e_0 处进行线性化。然后通过计算特征值及特征向量得到 e_0 处系统的渐进行为,然后通过构造一组新颖的行波,得到这组行波是系统(3)的上解的充分条件,并给出另外一组更小的行波,证明了在任意参数下这组行波都是下解,最后通过比较原理可以得到最小波速线性选择的充分条件,同时也说明了当 $c=c_0+\varepsilon_1$ 且 ε_1 充分小时,只需要构造一组行波并证明是上解,即可得到系统(3)最小行波速度的线性选择。充分条件的结果也说明了 Allee 效应对行波速度的线性选择产生一定的影响。

参考文献:

[1] 郑秋实,张一敏,薛楠楠. 典型钒页岩钒赋存状态的密度泛函研究[J]. 稀有金属,2022,46(4):488-496.

[2] 张怡娇. 多分体病毒在复杂网络中的传播动力学研究[D]. 兰州:兰州大学,2022:24-27.

[3] 梁冬梅,刘海燕,甘云丹,等. 低压下一种新的聚合氮结构[J]. 科学通报,2021,66(22):2908-2914.

[4] STAMATAKIS M,VLACHOS D G. A graph-theoretical kinetic Monte Carlo framework for on-lattice chemical kinetics[J]. The Journal of chemical physics,2011,134(21):214115.

[5] 许坤,王海丽,王献立,等. 垂直腔面发射激光器相干耦合阵列二维光束偏转[J]. 光子学报,2019,48(1):121-127.

[6] BAK S M. Existence of periodic traveling waves in systems of nonlinear oscillators on 2D-lattice[J]. Matematychni studii,2011,35(1):60-65.

[7] BAK S M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice[J]. Ukrainian mathematical journal,2017,69(4):509-520.

[8] 代云中,何凯瑞,杜程茂,等. LC 滤波 H6 结构逆变器离散模型简化与动力学行为[J]. 高电压技术,2017,43(10):3313-3321.

[9] BOOTH V,ERNEUX T,LAPLANTE J P. Experimental and numerical study of weakly coupled bistable chemical reactors[J]. The journal of physical chemistry,1994,98(26):6537-6540.

[10] MORFU S,NEKORKIN V I,BILBAULT J M,et al. Wave front propagation failure in an inhomogeneous discrete Nagumo chain:Theory and experiments[J]. Physical review E,2002,66(4):046127.

[11] WANG H Y,HUANG Z,OU C H. Speed selection for the wavefronts of the lattice Lotka-Volterra competition system[J]. Journal of differential equations,2020,268(7):3880-3902.

[12] ZHANG Y,WU S L. Minimal-speed selection of traveling fronts to a three components lattice competition system[J]. International journal of biomathematics,2022,15(4):2250016.

[13] TANG Y,PAN C,WANG H,et al. Speed determinacy of travelling waves for a three-component lattice Lotka-Volterra competition system[J]. Journal of biological dynamics,2022,16(1):340-353.

[14] ALLEE W C,BOWEN E S. Studies in animal aggregations:Mass protection against colloidal Silver among goldfishes[J]. Journal of experimental zoology,1932,61(2):185-207.

[15] 毕志敏. 海洋生物种群密度的空间斑图行为分析[D]. 济南:山东大学,2022:5-7.

[16] HUANG Z,OU C. Speed determinacy of traveling waves to a stream-population model with Allee effect[J]. SIAM journal on applied mathematics,2020,80(4):1820-1840.