

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2023.06.009

## 非线性阻尼下光滑不连续振子极限环的全局演化

侯林霞, 李震波\*

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

**摘要:**针对光滑不连续振子,提出了一种优化的广义谐波函数摄动法,得到其极限环的振幅与系统参数之间的解析关系式以及极限环的解析近似解。同时,基于微分方程定性理论,建立了该振子极限环特征量的解析计算公式。利用上述结果,可围绕极限环何时产生、如何分岔、在何处消失以及稳定性如何等问题,对具有复杂非线性阻尼项的光滑不连续振子极限环的全局演化过程展开定量分析。通过将本文所得之结果与龙格-库塔法之结果进行对比,验证了所提优化方法的可行性和可靠性,为研究强非线性振动系统解的全局演化问题,提供了新的参考方法。

**关键词:**光滑不连续振子;无理项势能;极限环;广义谐波函数摄动法

**中图分类号:** O242 **文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-0062(2023)06-0061-07

## Global Evolution of Limit Cycle of Smooth and Discontinuous Oscillator with Nonlinear Damping

HOU Linxia, LI Zhenbo\*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

**Abstract:** An optimized generalized harmonic function perturbation method was proposed for the smooth discontinuity (SD for short) oscillator. Via the method, an analytical relationship between amplitude of limit cycle and the system parameters can be derived. Meanwhile, based on the qualitative theorem of ordinary differential equations, an analytical calculation formula of the limit cycle characteristic quantity for this oscillator was established. With the above results, the global evolution of limit cycle for SD oscillator with complex nonlinear damping can be quantitatively analyzed, such as when the limit cycle emerges, how it bifurcates, whether it is stable and where it disappears. In addition, the analytical approximate solution of the limit cycle was also obtained. By comparing the results ob-

收稿日期:2023-09-25

基金项目:湖南省教育厅优秀青年项目(21B0419)

作者简介:侯林霞(1996—),女,硕士研究生,主要从事微分方程与动力系统方面的研究。E-mail:h15136723329@163.com。\*通信作者:李震波(1986—),男,副教授,博士,主要从事非线性动力系统的分岔与混沌方面的研究。E-mail:lizhenbo@usc.edu.cn

tained in this paper with those of the Runge-Kutta method, the feasibility and reliability of the proposed optimization method were verified, and a new reference method was provided for the study of the global evolution of the solutions of strongly nonlinear vibration systems.

**key words:** smooth and discontinuous oscillator; irrational potential; limit cycle; generalized harmonic function perturbation method

## 0 引言

近年来,光滑不连续(smooth and discontinuous, SD)振子的研究仍然是一个热门话题。Q. J. Cao 等于 2006 年首次提出了 SD 振子<sup>[1]</sup>,随后众多学者对 SD 振子作了大量的研究。文献[2]对 SD 振子的研究现状进行了详细综述,其中不仅包括理论研究,还包括工程应用<sup>[3-4]</sup>。对于无阻尼的 SD 振子,Q. J. Cao 等进行了详细的研究<sup>[1,5]</sup>,他们发现对于不连续的 SD 振子,系统既表现出非标准动力学特性,又表现出标准双井特性。对于具有黏性阻尼和外部谐波激励的 SD 振子,文献[6-8]分别使用不同的方法研究了系统的周期解及其稳定性,其中文献[8]分别从三个方面分析它的线性稳定和非线性稳定,同时给出了周期解的个数及其相应的稳定性。而文献[9-13]主要对系统的全局动力学特性进行了研究,包括各种分岔和混沌行为,其中王翠明等<sup>[13]</sup>基于多尺度法求得系统平均方程,并在此基础上研究了系统的 Hopf 分岔。周碧柳等<sup>[14]</sup>则对更为复杂的耦合 SD 振子的混沌行为进行研究,利用均方准则和相流函数理论分别得到了弱噪声和强噪声情况下该振子混沌阈值的解析表达式。但是,对于由非线性阻尼引起的 SD 振子自激振动的研究还比较少见,已有的研究主要侧重于 SD-van der pol 振子<sup>[15-17]</sup>,其中文献[16]研究了该振子极限环的数量,结果表明该系统最多有五个极限环,包含一个大极限环(对称极限环)和四个小极限环(非对称极限环)。

本文考虑一类具有复杂非线性阻尼项的 SD 振子。针对的情况展开推导,得到了极限环的振幅与系统参数之间的解析关系式和极限环的特征量与其振幅的解析关系式。基于上述关系式,对极限环从产生到分岔再到消失的全过程进行了定量分析,展现了系统的全局动力学行为。同时,还求得了极限环的解析近似解。通过将本方法获得的结果与龙格-库塔法获得的结果进行了对比,验证了所提优化方法的可行性和可靠性。

## 1 无阻尼光滑不连续振子的解

考虑以下无阻尼 SD 振子的周期解:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) = 0 \quad (1)$$

令初值为

$$x(0) = c, \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

其中  $\omega_0, \alpha \in \mathbb{R}$ 。引入非线性时间变换  $\varphi(t)$ , 可得

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\varphi), \Phi(\varphi + \pi) = \Phi(\varphi) \quad (3)$$

将方程(3)代入振子(1)可得

$$\Phi \frac{d}{d\varphi} (\Phi x') + \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) = 0 \quad (4)$$

其中  $x' = \frac{dx}{d\varphi}$ 。设方程(4)的解为

$$x(t) = a \cos^2 \varphi(t) + b \quad (5)$$

其中  $a, b \in \mathbb{R}$ , 在方程(4)的左右两边同时乘以  $x'(\varphi) = -2a \cos \varphi(t) \sin \varphi(t)$ , 然后再分别对  $\varphi$  积分, 可以得到

$$\frac{1}{2} (\Phi x')^2 = - \int_{x(0)}^{x(\varphi)} \omega_0^2 u \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\right) du \quad (6)$$

把  $\varphi = \pi/2$  代入式(6), 可以得到

$$\int_{a+b}^b \omega_0^2 u \left(1 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\right) du = 0 \quad (7)$$

其中  $x(0) = a+b=c$ ,  $a$  和  $b$  可以通过式(7)解出。

由方程(6)可得

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{2 \int_{a \cos^2 \varphi + b}^{a+b} \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) dx}{(x'_0(\varphi))^2}} \quad (8)$$

其中  $\varphi \neq \frac{n}{2}\pi, (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

$$\begin{cases} \Phi(0) = \sqrt{\omega_0^2(a+b) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(a+b)^2 + \alpha^2}}\right)} / a \\ \Phi(\pi/2) = \sqrt{\omega_0^2 b \left(1 - \frac{1}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}}\right)} / a \end{cases}$$

由于  $\Phi$  是一个周期函数, 所以它可以展开为以下傅里叶级数

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{2 \int_{a \cos^2 \varphi + b}^{a+b} \omega_0^3 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) dx}{(x'_0(\varphi))^2}} =$$

$$\sum_{i=0}^m (p_i \cos(i\varphi) + q_i \sin(i\varphi)) \quad (9)$$

因此可以找到方程(4)的周期解。

## 2 广义谐波函数摄动法

考虑以下非线性阻尼 SD 振荡器

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right) = \varepsilon f(\mu, x, \dot{x}) \quad (10)$$

$\varepsilon$  是一个很小的正数,  $\mu$  是控制参数。与文献[18]类似,我们假设系统(10)具有如下形式的解

$$x(t) = a \cos^2 \varphi(t) + b \quad (11)$$

其中  $\alpha$  和  $\varphi$  可以写成  $\varepsilon$  的幂级数

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi(\varphi) = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots \quad (13)$$

式(13)中  $\Phi_0$  可由方程(8)决定。解(11)可以改写为

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \cos^2 \varphi(t) + b \\ x_n = a_n \cos^2 \varphi(t) \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (15)$$

将式(13)和式(14)代入式(10),可以得到

$$\varepsilon^0: \Phi_0 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_0 x'_0) + \omega_0^2 x_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + \alpha^2}} \right) = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & \Phi_0 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_1 x'_0) + \Phi_1 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_0 x'_0) + \\ & \Phi_0 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_0 x'_1) + \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{(x_0^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) x_1 = \\ & f(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: & \Phi_0 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_2 x'_0) + \Phi_2 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_0 x'_0) + \\ & \Phi_0 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_0 x'_2) + \Phi_1 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_0 x'_1) + \\ & \Phi_0 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_1 x'_1) + \Phi_1 \frac{d}{d\varphi}(\Phi_1 x'_0) + \\ & \omega_0^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{(x_0^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) x_2 + \frac{3x_0 \alpha^2 \omega_0^2 x_1^2}{2(x_0^2 + \alpha^2)^{5/2}} = \\ & f'_x(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) x_1 + f'_x(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) \times \\ & (\Phi_0 x'_1 + \Phi_1 x'_0) \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $x' = dx/d\varphi, f'_x = \partial f/\partial x, f'_x = \partial f/\partial \dot{x}$

在第 1 节中,我们讨论了方程(16)的解法。接下来,将给出方程(17)的求解过程。由式(15)可知

$$x_0 = a_0 \cos^2 \varphi(t) + b \quad (19)$$

其中

$$\int_{a_0+b}^b \omega_0^2 x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right) dx = 0 \quad (20)$$

$$\Phi_0(\varphi) = \sqrt{\frac{2 \int_{a_0 \cos^2 \varphi + b}^{a_0+b} \omega_0^2 x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right) dx}{(x'_0(\varphi))^2}} \quad (21)$$

在式(17)两边同时乘以  $x'_0 = -2a_0 \cos \varphi \sin \varphi$ , 然后从  $\varphi_0$  到  $\varphi$  对其进行积分,可以得到

$$\begin{aligned} \Phi_0 \Phi_1 x_0'^2 \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) x'_0 d\varphi - \\ & \frac{a_1}{2a_0} (\Phi_0 x'_0)^2 \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} - \omega_0^2 x_0 x_1 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + \alpha^2}} \right) \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} \end{aligned} \quad (22)$$

将  $\varphi_0 = 0$  和  $\varphi = \pi$  代入式(22),得到如下结果

$$\int_0^{\pi} f(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) x'_0 d\varphi = 0 \quad (23)$$

将  $\varphi_0 = 0$  和  $\varphi = \pi/2$  代入式(22),可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} f(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) x'_0 d\varphi + \\ \omega_0^2 a_1 (a_0 + b) \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(a_0 + b)^2 + \alpha^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

类似地,将  $\varphi_0 = 0$  代入式(22),可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi} f(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) x'_0 d\varphi - \Phi_0 \Phi_1 x_0'^2 - \\ \frac{a_1}{2a_0} (\Phi_0 x'_0)^2 - \omega_0^2 x_0 x_1 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + \alpha^2}} \right) + \\ \omega_0^2 a_1 (a_0 + b) \times \\ \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(a_0 + b)^2 + \alpha^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

要获得方程(10)的一阶摄动解,需要分别计算未知量  $a_0, a_1, b, \Phi_0$  和  $\Phi_1$ 。首先,  $a_0, b$  和  $\Phi_0$  可以从方程(20),方程(21)和方程(23)中得到。其次,  $a_1$  可以从式(24)中得到,因此  $\Phi_1$  很容易由式(25)求得。采用类似的过程,还可以求出方程的二阶摄动解  $x_2$  和  $\Phi_2$ ,但随着阶数的增加,计算过程会变得越来越复杂。更为重要的,对于中等大小的  $\varepsilon$ ,一阶解的精度是满足需求的。

## 3 极限环

本节将采用第 2 节提到的摄动法研究以下具有非线性阻尼的 SD 振子:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \right) = \varepsilon (\mu + \mu_2 x^2 + \mu_4 x^4) x \quad (26)$$

这意味着

$$f(\mu, x, \dot{x}) = (\mu + \mu_2 x^2 + \mu_4 x^4) \dot{x} \quad (27)$$

其中  $\mu_2, \mu_4 \in R_0$ 。由方程(10)可知

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{2 \int_{a_0 \cos^2 \varphi + b}^{a_0 + b} \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) dx}{(x'_0(\varphi))^2} = \sum_{i=0}^m (p_i \cos(i\varphi) + q_i \sin(i\varphi)) \quad (28)$$

在这里  $m \in N^*$ 。下面令

$$I(\varphi) = \int f(\mu, x_0, \Phi_0 x'_0) x'_0 d\varphi = \int (\mu + \mu_2 x_0^2 + \mu_4 x_0^4) \times \left(\sum_{i=0}^m (p_i \cos(i\varphi) + q_i \sin(i\varphi))\right) x_0'^2 \quad (29)$$

将式(19)和式(28)代入式(29),后者可改写为

$$I(\varphi; a_0, b) \Big|_0^\pi = 0 \quad (30)$$

解方程(20)和方程(24),可以得到  $a_0$  和  $b$ 。

一般情况下,当  $\Phi_0(\varphi)$  比较复杂时,方程(28)中的傅里叶系数不能解析的得到。这意味着很难推导出极限环的  $A$  与参数  $\mu$  之间的解析关系。只有在给出所有系统参数的情况下,才能求解振子(26)的解。为了克服这一不足,本文针对  $\alpha \geq 1$  的情况对广义谐波函数摄动法进行了优化。该情况下,振子(26)为单井势,这意味着如果存在极限环,则极限环具有对称振幅。因此,方程(20)可以改写为

$$\int_A^{-A} \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) dx = 0 \quad (31)$$

其中  $A$  表示极限环的振幅,  $A = a_0 + b, -A = b$ 。

因此方程(26)的解亦可改写为

$$x_0 = 2A \cos^2 \varphi - A \quad (32)$$

考虑到解的对称性,公式(28)的傅立叶级数只展开一个项,即  $m=0$ 。因此可得

$$\Phi_0(\varphi) = \frac{2 \int_{2A \cos^2 \varphi - A}^A \omega_0^2 x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) dx}{(x'_0(\varphi))^2} \approx p_0 \quad (33)$$

这里,  $p_0$  的计算采用了将积分区间一分为二的复合辛普森积分公式<sup>[19]</sup>,从而使得在  $\Phi_0(\varphi)$  较复杂时,依然能算得  $p_0$  的解析表达式。其结果如下:

$$p_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{\omega_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\alpha^2 + A^2} - \frac{A^2}{2}\right)}{A^2}} + \frac{1}{6} \sqrt{\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + A^2}}\right)} \quad (34)$$

将式(32)和式(34)代入式(30),可以得到如下  $\mu$  与  $A$  的关系

$$\mu = - \frac{\frac{1}{8} A^2 \left[ B_1 \left( \mu_2 + \frac{1}{2} A^2 \mu_4 \right) + (2\mu_2 + A^2 \mu_4) B_2 \right]}{\frac{1}{2} B_1 + B_2} \quad (35)$$

其中,  $B_1 = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{A^2 + \alpha^2}}\right) \omega_0^2}$ ,

$$B_2 = \sqrt{\frac{(A^2 + 2\sqrt{\alpha^2} - 2\sqrt{A^2 + \alpha^2}) \omega_0^2}{A^2}}$$

对式(35)中的  $\mu$  求  $A$  的一阶导并令它等于0,解得

$$A = 0, A = - \frac{i \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_4}}, A = \frac{i \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_4}}$$

$i$  表示虚数单位。从上述结果可以发现,在  $\mu_2 \mu_4 < 0$  的条件下,方程(35)在  $x$  正半轴最多有一个极值点。这意味着对任意给定的  $\mu$ ,最多有两个不同的正数  $A$  与之对应。即振子(26)在  $\alpha \geq 1$  的情况下最多有两个极限环。将式(29)代入式(24),可得

$$a_1 = \frac{I(\varphi) \Big|_0^{\pi/2}}{\omega_0^2 (a_0 + b) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(a_0 + b)^2 + \alpha^2}}\right)} \quad (36)$$

由式(29)易得

$$a_1 = 0 \quad (37)$$

将方程(33)和方程(38)代入方程(25),可得

$$\Phi_1 = \frac{I(\varphi)}{\Phi_0 x_0'^2} = \frac{I(\varphi)}{p_0 x_0'^2} \quad (38)$$

因此,振子(26)的极限环的表达式如下

$$x = a_0 \cos^2 \varphi + b + O(\varepsilon^2) \quad (39)$$

$$\dot{x} = -2a_0 (\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1) \cos \varphi \sin \varphi + O(\varepsilon^2) \quad (40)$$

此外,为了判断极限环的稳定性,可基于微分方程定性理论,计算如式(41)所示的极限环特征量<sup>[20]</sup>

$$cq = \int_0^\pi \frac{1}{\Phi_0} \left( \mu + \left( \sum_{i=1}^4 \mu_i a_0 \cos^2 \varphi + b \right)^i \right) d\varphi \quad (41)$$

其中  $cq$  表示特征量。当  $cq > 0$  时极限环不稳定,当  $cq = 0$  时,极限环半稳定,  $cq < 0$  时,极限环稳定。

## 4 算例

本节通过具体的算例来分析具有非线性阻尼

的 SD 振子(26)的极限环的全局演化。考虑如下形式的振子

$$\ddot{x} + 9x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \right) = \varepsilon(\mu + x^2 - 4x^4)x \quad (42)$$

这是振子(26)的一种情况。其中  $\omega_0 = 3, \alpha = 2, \mu_2 = 1, \mu_4 = -1$ 。将各项系数代入方程(35)和方程(41)中可得如下两个解析关系式:

$$\mu = \frac{\frac{1}{8}A^2((6 - 12A^2)M_1 + (3 - 6A^2)M_2)}{-3M_1 + 1.5M_2} \quad (43)$$

$$cq = \frac{7.1A^2((2 - 8A^2)M_1 + (0.7 - 4A^2)M_2)}{(6M_1 + 3M_2)(3M_1 + 1.5M_2)} \quad (44)$$

其中,  $A$  表示极限环的振幅,

$$M_1 = \sqrt{\frac{4 + A^2 - 2\sqrt{4 + A^2}}{A^2}}, M_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{4 + A^2}}}$$

它们的曲线图如图 1 所示。图 1 上半部分表示振子(43)的极限环的振幅  $A$  与参数  $\mu$  之间的关系。下半部分表示极限环的振幅  $A$  与特征量  $cq$  之间的关系。

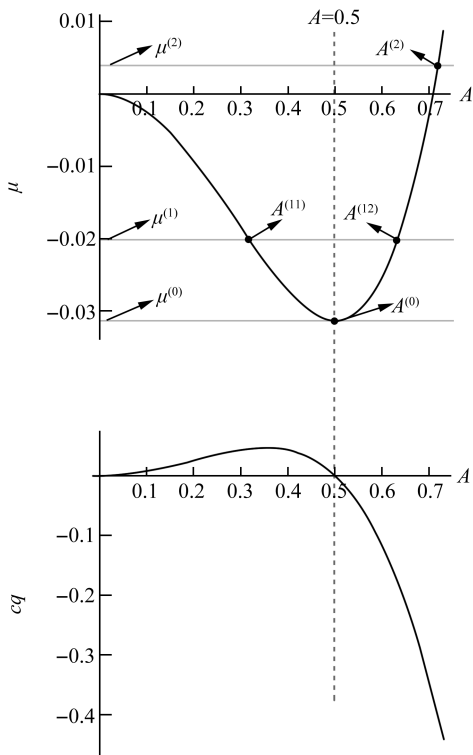


图 1 振子(43)的振幅  $A$  与其控制参数  $\mu$  以及特征量  $cq$  之间的关系

Fig. 1 Relationship between the amplitude  $A$  and control parameter  $\mu$  as well as characteristic quantity  $cq$  of the oscillator (43)

在图 1 中,  $\mu^{(0)} = -0.03125, \mu^{(1)} = -0.02, \mu^{(2)} = 0.004, A^{(0)}(0.5, -0.03125), A^{(1)}(0.316, -0.02), A^{(12)}(0.632, -0.02), A^{(2)}(0.718, 0.004)$ 。接下来,我们通过图 1 来分析振子(43)的极限环的全局演化过程。

1) 当  $\mu < \mu^{(0)}$  时,不存在极限环;

2) 随着  $\mu$  增加至  $\mu^{(0)}$  的某一个邻域  $\delta(\mu^{(0)})$  内,一个极限环出现,它的振幅约为  $A^{(0)}$ 。从图 1 中可知此时的特征量为 0,因此它是一个半稳定极限环。与此同时,从图 1 中的  $cq-A$  图可以看出,在  $A^{(0)}$  点附近,曲线从横轴的正半轴穿到负半轴,由此可以判断,该半稳定极限环是外部稳定内部不稳定的极限环;

3) 随着  $\mu$  的继续增大,当  $\mu^{(0)} < \mu < 0$  时,半稳定极限环分岔为两个极限环。从图 1 中可以看出,较小的极限环,其特征量  $cq > 0$ ,而较大的极限环,其特征量  $cq < 0$ 。因此,较小的极限环是不稳定的,较大的极限环是稳定的。特别的,当  $\mu = 0$  时,较小的极限环逐渐收敛到平衡点  $(0, 0)$ ,而较大的极限环继续增大;

4) 当参数  $\mu > 0$  时,只有较大的极限环存在,而且它是稳定的。

此外,为了分析极限环的个数随着参数变化的变化情况,在其他参数不变的情况下,选择了五组不同的  $\mu_4$ ,并绘制了不同  $\mu_4$  下的  $\mu-A$  曲线图。结果展示在图 2 中。

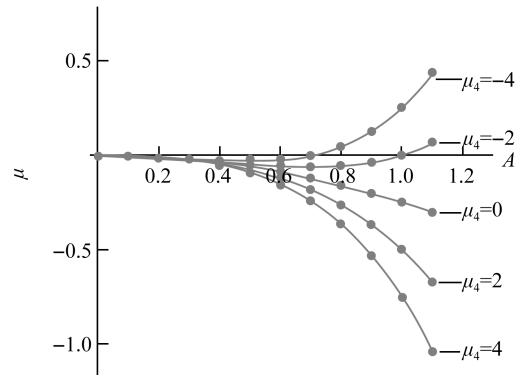


图 2 五组不同的  $\mu_4$  下,  $\mu$  与振幅  $A$  的关系

Fig. 2 Relationship between  $\mu$  and  $A$  at five different sets of  $\mu_4$

其中,图 1 所示的  $\mu-A$  曲线,对应图 2 中  $\mu_4 = -4$  的情况。同时,为了展示本文所用方法的精确度,在  $\varepsilon = 0.1$  的情况下,利用数值方法也绘制了上述  $\mu-A$  曲线,并一起展示在图 2 中进行对比。

从图 2 中可以看出,在其他参数不变的情况下,当  $\mu_4 \geq 0$  时,系统只有一个极限环,当  $\mu_4 < 0$  时,系统存在两个极限环。通过对比可以发现,本文所提议的方法有着较高的精度,所预测的结果是可信的。

除了上述分析之外,利用本文所提出的方法还能获得振子(43)的解析近似解。考虑  $\mu = -0.028$ ,  $\mu = -0.02$ ,  $\mu = -0.002$  和  $\mu = 0.004$  四种情况,利用公式(43)可得 4 组  $\mu$  相对应的  $A$  值,针对不同的  $A$  值,可以从式(28)和式(39)中得出相应的  $\Phi_0$  和  $\Phi_1$ 。由此,极限环的一阶近似解可表示为:

$$x = 2A \cos^2 \varphi - A + O(\varepsilon^2) \tag{45}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Phi_0(\varphi) + \varepsilon \Phi_1(\varphi) + O(\varepsilon^2) \tag{46}$$

$$\Phi_0 = K_1 + K_2 \cos(2\varphi) + K_3 \cos(4\varphi) + K_4 \cos(6\varphi) + K_5 \cos(8\varphi) + HH \tag{47}$$

$$\Phi_1 = L_1 \sin(2\varphi) + L_2 \sin(4\varphi) + L_3 \sin(6\varphi) + L_4 \sin(8\varphi) + HH \tag{48}$$

其中,  $HH$  代高阶谐波,  $A, K_i$  和  $L_i$  的值如表 1 所示。当  $\varepsilon = 2$  时,所求之解的相图呈现在了图 3 中,通过该图中所做的对比不难发现,本方法得到的结果对于较大的  $\varepsilon$  也是精确的。从解的图像来看,与图 1 展示的结果是一致的,即当  $\mu^{(0)} < \mu < 0$  时,随着  $\mu$  的增大,较大极限环的振幅逐渐增大,较小极限环的振幅逐渐减小。直到  $\mu = 0$  较小的极限环收敛到平衡点  $(0, 0)$ ,而较大的极限环随着  $\mu$  的继续增大。

表 1  $A, K_i$  和  $L_i$  的值  
Table 1 Values of  $A, K_i$  和  $L_i$

$\mu$	-0.028	-0.02	-0.002	0.004
$A$	0.4116/0.575	0.3162/0.6325	0.0902/0.7013	0.718
$K_1$	1.0688/1.0761	1.0655/1.0792	1.061/1.0831	1.0841
$K_2$	0.0001/0.0001	0.0001/0.0001	0.0001/0.0001	0.0001
$K_3$	0.0025/0.0048	0.0015/0.0058	0/0.007	0.0073
$K_4$	0.0001/0.0001	0.0001/0.0001	0.0001/0.0001	0.0001
$K_5$	-0.0002/-0.0002	-0.0001/-0.0002	-0.0001/-0.0003	-0.0003
$L_1$	0/0	0/0	0/0	0
$L_2$	0.0046/-0.0021	0.0042/-0.0084	0.0005/-0.0197	-0.0232
$L_3$	0/0	0/0	0/0	0
$L_4$	-0.0012/-0.0046	-0.0004/-0.0067	0/-0.0101	-0.0111

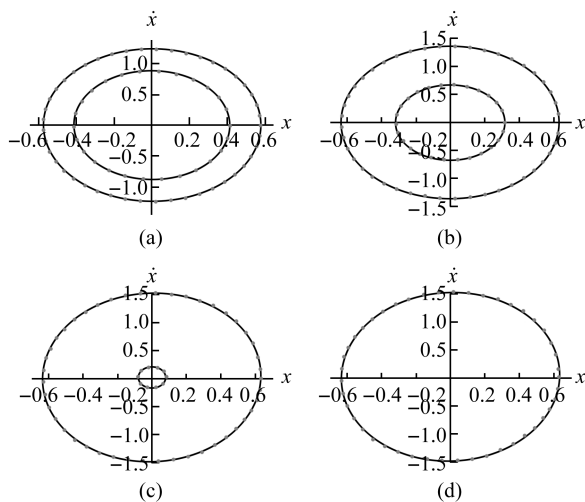


图 3 振子(42)的极限环  
Fig. 3 Limit cycles for oscillator (42)

### 5 结 论

由于无理项势能的复杂性,许多经典的定量方法都难以对非线性阻尼下的 SD 振子极限环的全局演化展开解析分析。为了弥补这一不足,本文提出了优化的广义谐波函数摄动法。利用该方法,推导了时,具有非线性阻尼的 SD 振子的极限环振幅与系统参数之间的解析关系式以及极限环特征量与振幅之间的解析关系式。利用上述关系式,从极限环的存在性、稳定性、数量以及位置等方面对极限环从产生到分岔再到消失的全过程展开了定量分析,并求得了系统极限环的解析近似解。通过将本文所得结果与数值结果进行比较,验证了本文所提方法的有效性和准确性。为研究强非线性振动系统解的全局演化问题,提供了新的参考方法。

## 参考文献:

- [1] CAO Q J, WIERCIGROCH M, PAVLOVSKAIA E E, et al. Archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[J]. *Physical review E*, 2006, 74(4):046218.
- [2] ZHANG Y T, CAO Q J. The recent advances for an archetypal smooth and discontinuous oscillator[J]. *International journal of mechanical sciences*, 2022, 214(1):106904.
- [3] YANG T, CAO Q J, HAO Z F. A novel nonlinear mechanical oscillator and its application in vibration isolation and energy harvesting[J]. *Mechanical systems and signal processing*, 2021, 155:107636.
- [4] CHEN J E, SUN M, HU W H, et al. Performance of non-smooth nonlinear energy sink with descending stiffness [J]. *Nonlinear dynamics*, 2020, 100(1):255-267.
- [5] CAO Q, WIERCIGROCH M, PAVLOVSKAIA E, et al. The SD oscillator and its attractors[J]. *Journal of physics: Conference series*, 2008, 96(1):012064.
- [6] LI Z X, CAO Q J, WIERCIGROCH M, et al. Analysis of the periodic solutions of a smooth and discontinuous oscillator[J]. *Acta mechanica sinica*, 2013, 29(4):575-582.
- [7] CHEN H B, XIE J H. Harmonic and subharmonic solutions of the SD oscillator[J]. *Nonlinear dynamics*, 2016, 84(4):2477-2486.
- [8] LIANG Z T, YANG Y J. Existence and stability of periodic oscillations of a smooth and discontinuous oscillator[J]. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 2020, 555:124511.
- [9] CAO Q J, WIERCIGROCH M, PAVLOVSKAIA E E, et al. The limit case response of the archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[J]. *International journal of Non-Linear mechanics*, 2008, 43(6):462-473.
- [10] CAO Q J, XIONG Y P, WIERCIGROCH M. Resonances of the SD oscillator due to the discontinuous phase[J]. *Journal of applied analysis and computation*, 2011, 1(2):183-191.
- [11] SHEN J, LI Y R, DU Z D. Subharmonic and grazing bifurcations for a simple bilinear oscillator[J]. *International journal of non-linear mechanics*, 2014, 60:70-82.
- [12] YI T, DU Z. Degenerate grazing bifurcations in a simple bilinear oscillator[J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2014, 24(11):1450141.
- [13] 王翠艳, 王明昊. SD 振子的 Hopf 分岔研究[J]. *机械工程与自动化*, 2022(2):18-20.
- [14] 周碧柳, 靳艳飞. 高斯色噪声和谐波激励共同作用下耦合 SD 振子的混沌研究[J]. *力学学报*, 2022, 54(7):2030-2040.
- [15] TIAN R L, CAO Q J, YANG S P. The codimension-two bifurcation for the recent proposed SD oscillator[J]. *Nonlinear dynamics*, 2010, 59(1):19-27.
- [16] CHEN H B, LLIBRE J, TANG Y L. Global dynamics of a SD oscillator[J]. *Nonlinear dynamics*, 2018, 91(3):1755-1777.
- [17] CHEN H. Global analysis on the discontinuous limit case of a smooth oscillator[J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2016, 26(4):1650061.
- [18] LI Z B, TANG J S, CAI P. A generalized harmonic function perturbation method for determining limit cycles and homoclinic orbits of Helmholtz—Duffing oscillator [J]. *Journal of sound and vibration*, 2013, 332(21):5508-5522.
- [19] 李庆阳, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 5 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [20] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2015:202.