

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2023.06.008

## Horndeski 引力时空中的准开普勒运动

张 豪<sup>1</sup>, 高 玮<sup>1</sup>, 林文斌<sup>1,2\*</sup>

(1. 西南交通大学 物理科学与技术学院, 四川 成都 610031; 2. 南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

**摘要:** Horndeski 引力理论是标量张量修改引力理论中的集大成者。本文基于 Horndeski 引力度规张量, 推导试验粒子在准开普勒运动中的二阶后牛顿解, 以研究 Horndeski 引力中标量场对试验粒子准开普勒运动产生的效应。对 Horndeski 引力度规张量做二阶后牛顿近似展开, 计算试验粒子的拉格朗日量、轨道能量以及角动量, 由此表示的准开普勒运动的半长轴和偏心率。利用偏近点角和真近点角之间的关系, 推导了准开普勒运动的运动方程和周期。

**关键词:** 后牛顿近似; 准开普勒运动; Horndeski 引力

**中图分类号:** P135    **文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-0062(2023)06-0056-05

## Quasi-Keplerian Motion in Horndeski Gravity Space-time

ZHANG Hao<sup>1</sup>, GAO Wei<sup>1</sup>, LIN Wenbin<sup>1,2\*</sup>

(1. School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China; 2. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

**Abstract:** Horndeski gravity is the culmination of scalar tensor modified gravitational theory. In this paper, based on the Horndeski gravity metric tensor, the second-order post-Newtonian solution of the test particle in quasi-Kepler motion was derived, so as to study the effects of the scalar field in the Horndeski gravity on the quasi-Kepler motion of the test particle. The second order post Newton approximate expansion of Horndeski gravity metric tensor is used to calculate the Lagrangian, orbital energy and angular momentum of the test particle, thereby representing the semi-major axis and eccentricity of the quasi-Keplerian motion. Then, by using the relationship between eccentric anomaly and true anomaly, the equations of motion and period of quasi-Kepler motion are derived.

**key words:** post-Newtonian approximation; quasi-Keplerian motion; Horndeski gravity

收稿日期: 2023-08-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(11973025)

作者简介: 张 豪(1998—), 男, 硕士研究生, 主要从事理论物理方面的研究。E-mail: 3054671512@qq.com。\*通信

作者: 林文斌(1970—), 男, 教授, 主要从事理论物理方面的研究。E-mail: lwb@usc.edu.cn

## 0 引言

物体在引力场中的运动是广义相对论中的核心问题,被广泛关注。例如水星在太阳引力场中的近日点进动问题,是广义相对论的基本检验之一。在太阳这类质量较小,或者距离引力源较远的弱引力场情形,通常采用后牛顿近似的方法来研究试验粒子的运动问题<sup>[1-8]</sup>。后牛顿近似是一种为了得到更高精度的系统运动而对小量进行有序展开的方法。在后牛顿理论中,通常使用更高精度的开普勒参数来描述试验粒子在引力场中的运动。例如文献[9]中给出了试验粒子在赖斯纳-努德斯特伦时空中运动的后牛顿解析解,文献[10-11]给出了试验粒子在克尔时空中后牛顿解析解。

本文考虑的是 Horndeski 引力中试验粒子在准开普勒运动中的 2 阶后牛顿解,简称为 2PN (Post-Newtonian) 阶<sup>[12]</sup>。Horndeski 引力是一个经典的标量-张量理论。由 G. W. Horndeski 在 1974 年提出,通过在希尔伯特-爱因斯坦作用量中加入了标量场,来描述宇宙中其他物质对引力场的贡献。

本文将参考文献[4]的方法推导试验粒子在 Horndeski 引力场中的准开普勒运动的 2PN 解析解,并讨论 Horndeski 引力时空的参数  $p_{\text{eff}}$  对于试验粒子的运动方程、周期、轨道近日点进动等参数的影响。

## 1 Horndeski 引力中的拉氏量、能量、角动量

考虑平移对称类的 Horndeski 引力场,即引入的标量场  $\phi$  满足:  $\phi \rightarrow \phi + \text{常数}$ ,其作用量为:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (L_2 + L_3 + L_4 + L_5) \quad (1)$$

其中,四个拉格朗日量  $L_2, L_3, L_4, L_5$  与动力学项  $X = -\partial^\mu \partial_\mu \phi$  有关:

$$\begin{cases} L_2 = \eta X \\ L_4 = \left( \frac{1}{16}\pi + \beta\sqrt{-X} \right) + \partial_X(\beta\sqrt{-X}) \times \\ \quad [(\nabla^\mu \nabla_\mu \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2] \\ L_3 = L_5 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

这里,  $\eta, \beta$  是两个无量纲的参数。

根据式(1)和式(2),Horndeski 引力时空的度规可以表示为:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 +$$

$$r^2 \sin \theta^2 d\phi^2 \quad (3)$$

其中:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{8\pi p_{\text{eff}}}{r^2} \quad (4)$$

其中  $M$  表示引力源的质量,  $p_{\text{eff}} = \beta^2/\eta$ 。

这是一个渐进平坦的时空,在  $p_{\text{eff}} = 0$  时回到施瓦西时空。如图 1 所示,  $p_{\text{eff}} = -M^2/8\pi$  时存在一个视界极限,即当  $p_{\text{eff}} < -M^2/8\pi$  时不存在视界,  $0 > p_{\text{eff}} > -M^2/8\pi$  时,存在两个视界。在  $p_{\text{eff}} > 0$  时只存在一个视界。

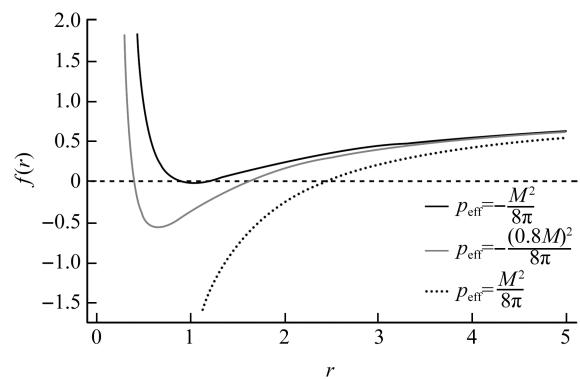


图 1 不同  $p_{\text{eff}}$  取值的 Horndeski 黑洞视界

Fig. 1 Horizons of Horndeski black hole with different values of  $p_{\text{eff}}$

根据后牛顿近似理论,将度规展开到 2PN 阶,有:

$$g_{00} = -1 + 2 \frac{M}{r} + \frac{8\pi p_{\text{eff}} - 2M^2}{r^2} - \frac{2M(8\pi p_{\text{eff}} - M^2)}{r^3} \quad (5)$$

$$g_{0i} = 0 \quad (6)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left( 1 + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} \right) + \frac{M^2 - 8\pi p_{\text{eff}}}{r^2} \frac{x_i x_j}{r^2} \quad (7)$$

式中  $i, j$  表示  $1, 2, 3$ 。

进而计算试验粒子的拉格朗日量:

$$\begin{aligned} L = & \frac{M}{r} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{8\pi p_{\text{eff}} - M^2}{2r} + \frac{Mv^2}{2r} + \\ & \frac{1}{8} v^4 + \frac{M^3}{2r} + \frac{7M^2 v^2}{4r^2} + \frac{7Mv^4}{8r} + \\ & \frac{v^6}{16} - \frac{4\pi p_{\text{eff}} M}{r^3} + \frac{2\pi p_{\text{eff}} v^2}{r^2} + \\ & \frac{(M^2 - 8\pi p_{\text{eff}})(x \cdot v)^2}{2r^4} \end{aligned} \quad (8)$$

式中: $v$ 代表试验粒子的速度。根据拉格朗日量得到在赤道面运动的能量 $\varepsilon$ 和角动量 $J$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon = & -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}v^2 - \frac{8\pi p_{\text{eff}} - M^2}{2r} + \frac{3Mv^2}{2r} + \\ & \frac{3}{8}v^4 + \frac{M(8\pi p_{\text{eff}} - M^2)}{2r^3} + \frac{21Mv^4}{8r} + \\ & \frac{(M^2 - 8\pi p_{\text{eff}})(x \cdot v)^2}{2r^4} + \frac{5v^6}{16} + \\ & \frac{v^2(8\pi p_{\text{eff}} + 7M^2)}{4r^2}\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}J = & |x \times v| \left[ 1 + \frac{v^2}{2} + \frac{3M}{r} + \frac{3v^4}{8} + \frac{7M^2}{2r^2} + \right. \\ & \left. \frac{7Mv^2}{2r} + \frac{4\pi p_{\text{eff}}}{r^2} \right]\end{aligned}\quad (10)$$

## 2 2PN 准开普勒运动

试验粒子在 Horndeski 引力时空赤道面的运动可以用极坐标表示:

$$x = r(\cos \phi e_x + \sin \phi e_y) \quad (11)$$

所以试验粒子的速度可以表示为:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \quad (12)$$

$$x \times v = r^2\dot{\phi}e_z \quad (13)$$

利用式(10)和式(11)替换能量 $\varepsilon$ 和角动量 $J$ 中的速度 $v$ ,得到:

$$\begin{aligned}\varepsilon = & -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{8\pi p_{\text{eff}} - M^2}{2r} + \\ & \frac{3M}{2r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{3}{8}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)^2 + \\ & \frac{M(8\pi p_{\text{eff}} - M^2)}{2r^3} + \frac{5}{16}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)^3 + \\ & \frac{21M}{8r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)^2 + \frac{(M^2 - 8\pi p_{\text{eff}})\dot{r}^2}{2r^2} + \\ & \frac{(8\pi p_{\text{eff}} + 7M^2)}{4r^2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}J^2 = & r^4\dot{\phi}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{3M}{r} + \frac{7M^2}{2r^2} + \right. \\ & \left. \frac{3}{8}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)^2 + \frac{4\pi p_{\text{eff}}}{r^2} + \frac{7M}{2r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \right]^2\end{aligned}\quad (15)$$

其中 $\cdot$ 表示对时间求导。利用这两个式子,可以把 $r^4\dot{\phi}^2$ 和 $\dot{r}^2$ 用能量 $\varepsilon$ 和角动量 $J$ 表示为:

$$\begin{aligned}r^4\dot{\phi}^2 = & J^2 \left( 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 - \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{r^2} - \right. \\ & \left. \frac{8M}{r} + \frac{34M^2}{r^2} + \frac{16M\varepsilon}{r} \right)\end{aligned}\quad (16)$$

$$\dot{r}^2 = A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^2} + \frac{A_3}{r^3} + \frac{A_4}{r^4} \quad (17)$$

其中:

$$A_0 = 2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 \quad (18)$$

$$A_1 = 2M - 12\varepsilon M + 18\varepsilon^2 M \quad (19)$$

$$A_2 = 8\pi p_{\text{eff}}(1 - 2\varepsilon) - J^2 + 2\varepsilon J^2 - 3\varepsilon^2 J^2 - 10M^2 + 36\varepsilon M^2 \quad (20)$$

$$A_3 = -48\pi p_{\text{eff}}M + 8J^2M - 16\varepsilon J^2M + 26M^3 \quad (21)$$

$$A_4 = (8\pi p_{\text{eff}} - 33M^2)J^2 \quad (22)$$

利用关系:

$$\dot{r}^2 = \left( \frac{dr^{-1}}{d\phi} \right)^2 r^4 \dot{\phi}^2 \quad (23)$$

进一步可以写成:

$$\begin{aligned}\left( \frac{dr^{-1}}{d\phi} \right)^2 = & \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{a_r(1 + e_r)} \right] \left[ \frac{1}{a_r(1 - e_r)} - \right. \\ & \left. \frac{1}{r} \right] \left( B_0 + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} \right)\end{aligned}\quad (24)$$

将式(14)~式(21)带入公式(22)中。可以解出试验粒子的准开普勒运动的半长轴 $a_r$ ,和偏心率 $e_r$ 。有:

$$a_r = -\frac{M}{2\varepsilon} \left( 1 + \frac{7}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{32\varepsilon\pi p_{\text{eff}}}{J^2} + \frac{8\varepsilon M^2}{J^2} \right) \quad (25)$$

$$\begin{aligned}e_r^2 = & 1 + \frac{2\varepsilon J^2}{M^2} \left( 1 - \frac{15}{2}\varepsilon + 40\varepsilon^2 - \frac{6M^2}{J^2} - \frac{8\varepsilon\pi p_{\text{eff}}}{J^2} - \right. \\ & \left. \frac{16M^4}{J^4} - \frac{64\pi p_{\text{eff}}M^2}{J^4} + \frac{15\varepsilon M^2}{J^2} - \frac{20\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} \right) \quad (26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_1 = & 1 - \frac{8\pi p_{\text{eff}}}{J^2} - \frac{6M^2}{J^2} - \frac{64M^2\pi p_{\text{eff}}}{J^4} - \frac{16\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} - \\ & \frac{16M^4}{J^4} - \frac{14\varepsilon M^2}{J^2}\end{aligned}\quad (27)$$

$$B_2 = -\frac{4M(8\pi p_{\text{eff}} + 2M^2)}{J^2} \quad (28)$$

$$B_3 = 8\pi p_{\text{eff}} - M^2 \quad (29)$$

引入真近点角 $f$ ,将式(20)改写为:

$$\left( \frac{dr^{-1}}{d\phi} \right)^2 = \left( \frac{dr^{-1}}{df} \right)^2 \left( \frac{df}{d\phi} \right)^2 \quad (30)$$

令:

$$\left( \frac{dr^{-1}}{df} \right)^2 = \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{a_r(1 + e_r)} \right] \left[ \frac{1}{a_r(1 - e_r)} - \frac{1}{r} \right] \quad (31)$$

$$\left( \frac{df}{d\phi} \right)^2 = \left( B_0 + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^2} \right) \quad (32)$$

式(29)的解可以将中心距 $r$ 可以表示为:

$$r = \frac{a_r(1 - e_r^2)}{1 + e_r \cos f} \quad (33)$$

将式(25)~式(27)带入到式(29)中,得到:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\phi} &= F \left[ 1 - \frac{e_r M^2}{J^4} (8\pi p_{\text{eff}} + 5M^2) \cos f + \right. \\ &\quad \left. \frac{e_r^2 M^2}{4J^4} (8\pi p_{\text{eff}} - M^2) \cos 2f \right] \end{aligned} \quad (34)$$

其中:

$$F = \left( 1 - \frac{3M^2}{J^2} - \frac{4\pi p_{\text{eff}}}{J^2} - \frac{15\varepsilon M^2}{2J^2} - \frac{69M^4}{4J^4} - \right. \\ \left. \frac{4\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} - \frac{54\pi p_{\text{eff}}M^2}{J^4} - \frac{8\pi^2 p_{\text{eff}}^2}{J^4} \right) \quad (35)$$

对式(32)积分,有:

$$\phi \left( \frac{2\pi}{\Phi} \right) = f + \frac{e_r M^2 \sin f}{J^4} (8\pi p_{\text{eff}} + 5M^2) - \\ \frac{e_r^2 M^2 \sin 2f}{8J^4} (8\pi p_{\text{eff}} - M^2) \quad (36)$$

其中:

$$\Phi = 2\pi \left( 1 + \frac{3M^2}{J^2} + \frac{4\pi p_{\text{eff}}}{J^2} - \frac{24\pi^2 p_{\text{eff}}^2}{J^4} - \frac{4\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} - \right. \\ \left. \frac{78\pi^2 p_{\text{eff}}^2 M^2}{J^4} + \frac{15\varepsilon M^2}{2J^2} - \frac{105M^4}{4J^4} \right) \quad (37)$$

最后推导准开普勒方程,将式(14)和式(33)带入到式(32)中,得到:

$$\begin{aligned} r^2 \dot{f} &= J \left( 1 - \varepsilon - \frac{4M}{r} - \frac{3M^2}{J^2} - \frac{4\pi p_{\text{eff}}}{J^2} + \varepsilon^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{9M^2}{r^2} - \frac{8\pi p_{\text{eff}}}{r^2} - \frac{9\varepsilon M^2}{2J^2} + \frac{4M\varepsilon}{r} + \frac{12M^3}{J^2 r} + \right. \\ &\quad \left. \frac{16\pi p_{\text{eff}} M}{J^2 r} - \frac{54\pi p_{\text{eff}} M^2}{J^4} - \frac{69M^4}{4J^4} - \right. \\ &\quad \left. \frac{8\pi^2 p_{\text{eff}}^2}{J^4} - \frac{8e_r M^2 \pi p_{\text{eff}}}{J^4} \cos f - \frac{5e_r M^4}{J^4} \cos f + \right. \\ &\quad \left. \frac{8\pi p_{\text{eff}} e_r^2 M^2}{J^4} \cos 2f + \frac{e_r^2 M^4}{4J^4} \cos 2f \right) \end{aligned} \quad (38)$$

再引入偏近点角  $u$ ,和真近点角  $f$  之间的关系为:

$$\sin f = \frac{(1 - e_r^2)^{\frac{1}{2}} \sin u}{1 - e_r \cos u} \quad (39)$$

$$\cos f = \frac{\cos u - e_r}{1 - e_r \cos u} \quad (40)$$

$$f = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1 + e_r}{1 - e_r}} \tan \frac{u}{2} \right] \quad (41)$$

所以:

$$\frac{df}{dt} = \frac{(1 - e_r^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - e_r \cos u} \frac{du}{dt} \quad (42)$$

中心距  $r$  也可以用偏近点角  $u$  来表示:

$$r = a_r(1 - e_r \cos u) \quad (43)$$

将式(34)~式(38)带入式(33)中,并进行积分就能得到准开普勒方程:

$$t \left( \frac{2\pi}{T_u} \right) = u - e_r \sin u + \frac{M\varepsilon^2}{\sqrt{-2\varepsilon J^2}} \left( 30 + \right. \\ \left. \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{M^2} \right) (f - u) \quad (44)$$

其中:

$$T_u = \frac{2\pi M}{(-2\varepsilon)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{15\varepsilon}{4} - \frac{105\varepsilon^2}{32} + \right. \\ \left. \frac{M\varepsilon^2}{\sqrt{-2\varepsilon J^2}} \left( 30 + \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{M^2} \right) \right] \quad (45)$$

$$e_r = \left[ 1 + 8\varepsilon + 36\varepsilon^2 + \frac{32\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} + \frac{8M^2\varepsilon}{J^2} - \right. \\ \left. \frac{M\varepsilon^2}{\sqrt{-2\varepsilon J^2}} \left( 30 + \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{M^2} \right) \right] e_r \quad (46)$$

式中: $T_u$  表示轨道周期。

### 3 结 论

本文从 Horndeski 引力时空度规出发,推导了试验粒子的拉格朗日量和在黑洞赤道面运动的能量  $\varepsilon$ 、角动量  $J$ 。然后通过迭代法得到了在 Horndeski 引力场中的 2PN 准开普勒运动方程。

结果如下:

$$x = r(\cos \phi e_x + \sin \phi e_y)$$

$$r = a_r(1 - e_r \cos u)$$

$$\phi \left( \frac{2\pi}{\Phi} \right) = f + N_0 \sin f + N_1 \sin 2f$$

$$f = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1 + e_r}{1 - e_r}} \tan \frac{u}{2} \right]$$

$$t \left( \frac{2\pi}{T_u} \right) = u - e_r \sin u + N_2(f - u)$$

其中:

$$a_r = -\frac{M}{2\varepsilon} \left( 1 + \frac{7}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{32\varepsilon\pi p_{\text{eff}}}{J^2} + \frac{8\varepsilon M^2}{J^2} \right)$$

$$e_r^2 = 1 + \frac{2\varepsilon J^2}{M^2} \left( 1 - \frac{15}{2}\varepsilon + 40\varepsilon^2 - \frac{6M^2}{J^2} - \frac{8\varepsilon\pi p_{\text{eff}}}{J^2} - \right. \\ \left. \frac{16M^4}{J^4} - \frac{64\pi p_{\text{eff}} M^2}{J^4} + \frac{15\varepsilon M^2}{J^2} - \frac{20\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} \right)$$

$$\Phi = 2\pi \left( 1 + \frac{3M^2}{J^2} + \frac{4\pi p_{\text{eff}}}{J^2} - \frac{24\pi^2 p_{\text{eff}}^2}{J^4} - \frac{4\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} - \right. \\ \left. \frac{78\pi^2 p_{\text{eff}}^2 M^2}{J^4} + \frac{15\varepsilon M^2}{2J^2} - \frac{105M^4}{4J^4} \right)$$

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \frac{e_r M^2}{J^4} (8\pi p_{\text{eff}} + 5M^2) \\
 N_1 &= -\frac{e_r^2 M^2}{8J^4} (8\pi p_{\text{eff}} - M^2) \\
 T_u &= \frac{2\pi M}{(-2\varepsilon)^{3/2}} \left[ 1 - \frac{15\varepsilon}{4} - \frac{105\varepsilon^2}{32} + \frac{M\varepsilon^2}{\sqrt{-2\varepsilon J^2}} \times \right. \\
 &\quad \left. \left( 30 + \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{M^2} \right) \right] \\
 e_r &= \left[ 1 + 8\varepsilon + 36\varepsilon^2 + \frac{32\pi p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} + \frac{8M^2\varepsilon}{J^2} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{M\varepsilon^2}{\sqrt{-2\varepsilon J^2}} \left( 30 + \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{M^2} \right) \right] e_r \\
 N_2 &= \frac{M\varepsilon^2}{\sqrt{-2\varepsilon J^2}} \left( 30 + \frac{16\pi p_{\text{eff}}}{M^2} \right)
 \end{aligned}$$

在这些参数中,  $a_r$  和  $e_r$  分别表示的是后牛顿近似下的准开普勒运动的半长轴和偏心率。 $u$  表示偏近点角,  $f$  表示真近点角。 $T_u$  代表轨道的周期。

试验粒子的轨道近日点的进动可以表示为:

$$\Delta\Phi = \Phi - 2\pi = \left( \frac{6\pi M^2}{J^2} + \frac{8\pi^2 p_{\text{eff}}}{J^2} - \right. \\
 \frac{48\pi^3 p_{\text{eff}}^2}{J^4} - \frac{8\pi^2 p_{\text{eff}}\varepsilon}{J^2} + \frac{15\pi\varepsilon M^2}{J^2} - \\
 \left. \frac{156\pi^3 p_{\text{eff}}^2 M^2}{J^4} - \frac{105\pi M^4}{2J^4} \right)^\circ$$

可见, 参数  $p_{\text{eff}}$  在 Horndeski 引力度规上出现在 1PN 阶, 会对试验粒子的准开普勒运动轨道的近日点进动上产生 1PN 效应, 而对半长轴  $a_r$ 、偏心率  $e_r$  和轨道周期  $T_u$  产生的效应出现在 2PN 阶。

### 参考文献:

- [1] 朱小彦. 二阶后牛顿参数化框架下球对称引力场中的光线传播研究[D]. 衡阳: 南华大学, 2021: 5-11.
- [2] 李杰. 克尔黑洞引力场中试验粒子的运动和后牛顿近似精度研究[D]. 衡阳: 南华大学, 2020: 17-30.
- [3] 高玮. 双星系统的后牛顿运动及引力波辐射研究[D]. 衡阳: 南华大学, 2022: 7-19.
- [4] 杨波. 后牛顿近似下试验粒子运动的解析解[D]. 成都: 西南交通大学, 2021: 19-31.
- [5] 李杰, 林文斌. 坐标系选取对星体轨道理论预言的影响[J]. 南华大学学报(自然科学版), 2020, 34(4): 94-97.
- [6] 邓晨. 二体问题分析解法在多体问题数值精度改进中的应用[D]. 南宁: 广西大学, 2022: 26-56.
- [7] 伍歆. 后牛顿理论研究最新进展[C]//中国天文学会. 中国天文学会 2015 年学术年会摘要集. 北京: 中国天文学会, 2015: 2.
- [8] 钟双英, 刘崧, 胡淑娟. 致密双星后牛顿偏心轨道的引力波研究[J]. 物理学报, 2013, 62(23): 34-42.
- [9] YANG B, LIN W. Post-Keplerian motion in Reissner-Nordström spacetime [J]. General relativity gravitation, 2019, 51(9): 116.
- [10] YANG B, HE G, LIN W. The next-to-leading spin-orbit effects on the general motions in Kerr spacetime [J]. Physica scripta, 2021, 96(8): 085007.
- [11] YANG B, JIANG C, LIN W. The effects of the spin-induced quadrupole on the equatorial motion in Kerr spacetime [J]. Physica scripta, 2020, 95(10): 10500.
- [12] HORNDESKI G W. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space [J]. International journal of theoretical physics, 1974, 10(6): 363-384.