

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2023.06.001

端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的稳定性分析

王艳红, 郭长青*, 陈翔瑜

(南华大学 土木工程学院, 湖南 衡阳 421001)

摘要:在端部随从力和黏弹性的共同作用下输流管道可能会表现出更加丰富的动力学特性,研究了端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的稳定性。管道黏弹性采用 Kelvin 模型,以 Bernoulli-Euler 梁模型为基础,建立了流动流体和端部随从力共同作用下管道的运动微分方程,采用 Galerkin 法对其进行离散。利用特征值分析了端部随从力、黏弹性系数与质量比对系统失稳临界流速的影响。通过计算得到了不同参数下复频率实部、虚部随流速的变化曲线,分析了各参数对管道振动特性与稳定性的影响。结果表明:端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的失稳方式为颤振失稳;端部随从力的大小和方向对系统失稳临界流速有较大影响,增大端部随从力,系统发生失稳的临界流速会减小;增大管道黏弹性系数,系统发生失稳的临界流速会略微增加;增大质量比,系统发生失稳的临界流速也随之增大。

关键词:端部随从力;黏弹性;输流管道;颤振;稳定性

中图分类号:TV134 **文献标志码:**A

文章编号:1673-0062(2023)06-0001-07

Stability Analysis of Viscoelastic Cantilever Fluid-conveying Pipes Under the Action of End-following Force

WANG Yanhong, GUO Changqing*, CHENG Xiangyu

(School of Civil Engineering, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract:The fluid-conveying pipe might exhibit richer dynamics under the combined effect of end-following force and viscoelasticity. The stability of viscoelastic cantilever fluid-conveying pipe under the action of end-following force was investigated. The pipe viscoelasticity was modeled by Kelvin model, and the differential equation of motion of the pipe under the co-action of flowing fluid and end follower force are established on the basis of Bernoulli-Euler beam model, which were discretized by Galerkin method. The effects of

收稿日期:2023-10-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51678286)

作者简介:王艳红(1998—),女,硕士研究生,主要从事流固耦合力学等方面的研究。E-mail:1716506151@qq.com。

*通信作者:郭长青(1965—),男,教授,主要从事流固耦合力学等方面的研究。E-mail:GuoCQ@hotmail.com

end following force, viscoelastic coefficient and mass ratio on the unsteady critical velocity of system for instability were analyzed using eigenvalues. The variation curves of the real and imaginary parts of the complex frequency with the flow velocity under different parameters were given, and the effects of each parameter on the vibration characteristics and stability of the pipe were investigated. The results showed that: under the action of end following force, the instability mode of viscoelastic cantilever flow pipe was fluttering; the magnitude and direction of end follower force have a great influence on the critical velocity of system instability; with increasing end following force, the critical velocity of the system instability decreases; with increasing the pipe viscoelastic coefficient, the critical velocity of the system instability will increase slightly; with increasing the mass ratio, the critical velocity of the system instability will also be increased.

key words: end-following force; viscoelasticity; fluid-conveying pipe; fluttering; stability

0 引言

输流管道的振动是典型的流固耦合问题,因其自身别样的特点,在石油化工、海洋工程、航空航天领域得到广泛使用,成为结构动力学研究的热点问题之一。无论流速多么小,只要管道与流体接触,就会发生动力学行为,为了了解输流管道的物理性质,对其振动特性进行了广泛的研究^[1-5]。

黏弹性输流管道普遍存在于各种工业领域中,如橡胶管和聚合物管在石油管道、推进剂管道和配水系统中的应用。这种黏弹性材料在发生变形时,同时具有黏性和弹性行为,表现出与时间相关的应变,是影响管道稳定性的一种重要内在因素。张计光等^[6]应用直接多尺度法研究了黏弹性输流管道在 Winkler 地基上的参数共振稳定性问题。R. Zanganeh 等^[7]详细分析了四种支承条件下(无支承、固定支承、弹性支承、黏弹性支承)黏弹性输流管道对水锤作用的影响。王忠民等^[8]采用归一化幂级数法研究了两端固支 Kelvin 模型黏弹性输流圆管的振动与稳定性。漆发辉等^[9]采用 Galerkin 法对分布随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的振动与稳定性进行了分析。冯振宇等^[10]研究了简支 Kelvin 模型黏弹性输流管道的动力稳定性。刘颖等^[11]运用格林函数法研究了不同参数对系统稳态响应的影响。B. Zhu 等^[12]研究了具有外部激励作用下黏弹性输流管道的二维和三维动力学。

随从力又称伴生力,它会跟随结构的变形而变化。端部随从力顾名思义是随从力作用在管道的端部,其方向总是与管道端部切线方向一致。在外部因素中,某些环境下随从力的存在是不容

忽视的。郭长青等^[13]研究了两端简支支承输流管道在分布随从力作用下的稳定性。赵凤群等^[14]采用小波-微分求积(DQ)法分析了外部分布随从力和管内流动流体共同作用下简支 Kelvin 模型黏弹性输流管道的振动特性和稳定性。A. R. Askarian 等^[15]在考虑轴向跟随力和分布随从力的同时,利用分数阶 Zener 黏弹性模型研究了各参数对不同边界条件输流管道稳定性的影响。陶立佳等^[16]研究了端部随从力、质量比对无量纲复频率与系统失稳临界流速的关系以及悬臂输流管道振动与稳定性的影响。

查阅文献发现,至今还未有研究学者同时考虑管道材料的黏弹性和端部随从力作用进行研究。于是本文将管道的黏弹性与端部随从力同时考虑,研究了端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的稳定性。分析了端部随从力、管道黏弹性系数与质量比大小变化时对管道振动和稳定性的作用。

1 管道运动微分方程

1.1 模型及运动微分方程的建立

图 1 为黏弹性悬臂输流管道受端部随从力作用的模型。管内流体以恒定流速流动且不可压缩,运动过程中,端部随从力永远与管道端部切线方向保持一致。

管道以 Bernoulli-Euler 梁模型为基础,黏弹性采用 Kelvin 模型,不考虑阻尼,把任意时刻 t 位置 x 处的挠度记为 $w(x, t)$ 。运动微分方程为:

$$E^* I \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中: E^* 为管道黏弹性系数, 单位 $\text{Pa} \cdot \text{s}$; I 为管道截面惯性矩, 单位 m^4 ; E 为弹性模量, 单位 N/m^2 ; w 为管道横向位移, 单位 m ; P 为端部随从力, 单位 N ; U 为管道内流体的运动速度, 单位 m/s ; L 为管道长度, 单位 m ; M 和 m 分别为流体和管道的单位长度质量, 单位 kg/m 。

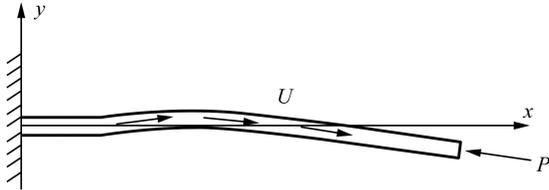


图 1 端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道模型
Fig. 1 Modeling of a viscoelastic cantilever fluid-conveying under end-following force

1.2 运动方程无量纲化

引入以下无量纲参数代入式(1)中:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{w}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{(M+m)}}, \\ \beta &= \frac{M}{M+m}, \gamma = \frac{PL^2}{EI}, u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \\ \alpha &= \frac{E^*}{L^2} \sqrt{\frac{I}{E(M+m)}} \end{aligned} \quad (2)$$

从而将式(1)写成无量纲形式:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^5 \eta}{\partial \xi^4 \partial \tau} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + (u^2 + \gamma) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \\ 2u\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

2 求解运动微分方程

运用 Galerkin 方法求解该问题。设式(3)解的形式为:

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\xi) T_i(\tau) \quad (4)$$

式中: $\varphi_i(\xi)$ 为梁的第 i 阶振型函数; $T_i(\tau)$, $i=1, 2, \dots, N$ 为输流管道的广义坐标。为了使计算精度更加精确, 模拟结果更加真实可靠, 以下数值计算中取 $N=10$ 。

对于图 1 所示端部随从力作用下悬臂输流管道, 由于端部随从力沿切向方向作用, 在端部不产生剪力, 因此, 其所有边界条件与自由的悬臂管道相同。振型函数为:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x - \\ &c_i (\sinh \lambda_i x - \sin \lambda_i x) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 λ_i 满足特征方程:

$$\cos \lambda_i \cosh \lambda_i = -1 \quad (6)$$

系数 c_i 由下式给出:

$$c_i = \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} = \frac{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i} \quad (7)$$

将式(4)代入方程(3), 方程两边同时乘以 $\varphi_j(\xi)$, 然后关于 ξ 在 $[0, 1]$ 区间积分, 由振型函数的正交性可得:

$$\begin{aligned} \alpha \lambda_j^4 \dot{T}_j + (u^2 + \gamma) \sum_{i=1}^N T_i \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_j' d\xi + \lambda_j^4 T_j + \\ 2u\sqrt{\beta} \sum_{i=1}^N \dot{T}_i \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j d\xi + \ddot{T}_j = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

($j = 1, 2, \dots, N$)

为求解方便, 令

$$z = [z_1 \dots z_N z_{N+1} \dots z_{2N}]^T = [T_1 \dots T_N \dot{T}_1 \dots \dot{T}_N]^T \quad (9)$$

将二阶线性微分方程组式(9)化为一阶线性微分方程组:

$$\dot{z} = Az \quad (10)$$

式中系数矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_{ij} & -C_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & -a_{44} \end{bmatrix} \quad (11)$$

式(11)中非零元素为:

$$\begin{aligned} a_{j, N+j} &= 1 \\ a_{N+j, i} &= -\delta_{ij} \lambda_i^4 - (u^2 + \gamma) \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_j d\xi \\ a_{N+j, N+i} &= -\delta_{ij} \alpha \lambda_i^4 - 2u\sqrt{\beta} \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j d\xi \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

3 计算结果与分析

3.1 临界流速随端部随从力、黏弹性系数和质量比的变化

为了直观表示临界流速 u 与端部随从力 γ 、黏弹性系数 α 、质量比 β 的变化关系, 以流速 u 为自变量, 端部随从力、黏弹性系数与质量比其中一量为因变量(其余两量给定), 求解矩阵 A 所有特征值实部最大值等于零的方程, 利用搜索加二分法得出计算结果。

图 2 为 $\alpha=0.01$, 端部随从力不同取值时黏弹性悬臂输流管道质量比 β 与临界流速 u 的关系。在图 2 中: 若增大质量比, 管道系统的无量纲临界

流速将增大;若增大端部随从力,管道系统的无量纲临界流速将减小。在端部随从力 $\gamma=30$ 的这条曲线上, $u=0$ 时系统已经发生失稳,但当 $\beta>0.70$ 时,系统可在达到一定流速后获得稳定,若流速继续增大,则系统会发生再次失稳。

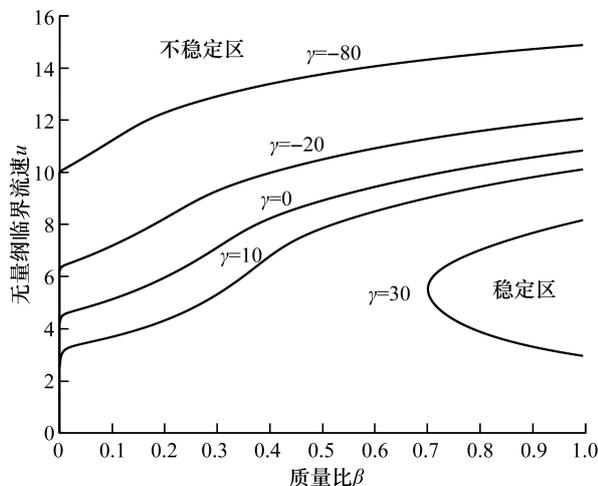


图 2 不同端部随从力下输流管道临界流速与质量比的关系 ($\alpha=0.01$)

Fig. 2 Relationship between critical flow velocity and mass ratio in fluid-conveying pipe with different end-following force ($\alpha=0.01$)

图 3 为 $\alpha=0.01$, 质量比 β 不同取值时黏弹性悬臂输流管道端部随从力 γ 与临界流速 u 的关系。在图 3 中;所有曲线都在横轴 $\gamma=11.55$ 这一点汇聚,该点即为端部随从力单独作用时的失稳临界值。当 $\gamma<11.55$ 且流速较低时,质量比无论取何值,系统都处于稳定状态,当 $\gamma>11.55$, $u=0$ 时系统已发生失稳,但随着流速增大到一定数值后系统会获得稳定,若流速继续增大,系统则会再次失稳。当端部随从力 ($\gamma<0$) 与流速方向相同,即端部随从力为拉力时,使系统发生失稳的无量纲临界流速增大;当端部随从力 ($\gamma>0$) 与流速方向相反,即端部随从力为压力时,使系统发生失稳的无量纲临界流速减小。结合图 2 与图 3 可以发现,质量比增大使系统的稳定区域面积逐渐扩大,说明增大质量比有利于系统产生稳定状态。

图 4 为 $\beta=0.2$, 黏弹性系数 α 不同取值时悬臂输流管道端部随从力 γ 与临界流速 u 的关系。图 4 中所有曲线相交于 $\gamma=-23.46$ 这一点,当 $\gamma>-23.46$ 时,增大管道黏弹性系数会使得系统的稳定区域扩大,此时黏弹性系数的存在对系统稳定是有利的;当 $\gamma<-23.46$ 时,增大管道黏弹

性系数会使得系统的稳定区域缩小,此时黏弹性系数的存在对系统稳定是不利的。在黏弹性系数为零的这条曲线上,无量纲临界流速随端部随从力单调递减,系统只经历了由稳定到失稳两种状态,这与文献[16]中的计算结果相同;而在黏弹性系数不为零的其他曲线上,端部随从力大于一定值时,伴随着流速的慢慢增大,系统则会经历失稳、稳定和再失稳三种状态。证明黏弹性的从无到有使系统产生了质的变化。

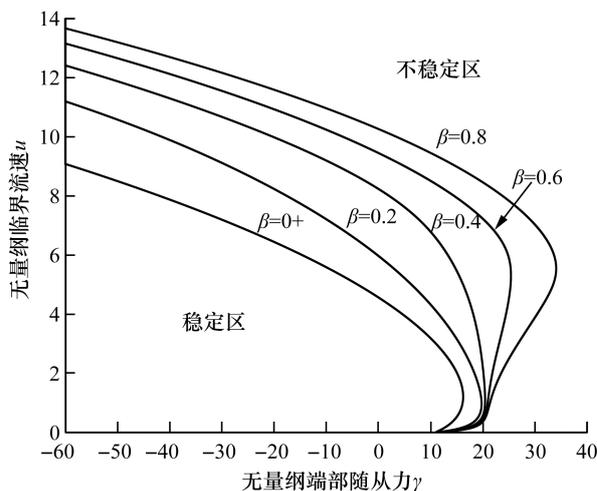


图 3 不同质量比下输流管道临界流速与端部随从力的关系 ($\alpha=0.01$)

Fig. 3 Relationship between critical flow velocity and end-following force in fluid-conveying pipe with different mass ratios ($\alpha=0.01$)

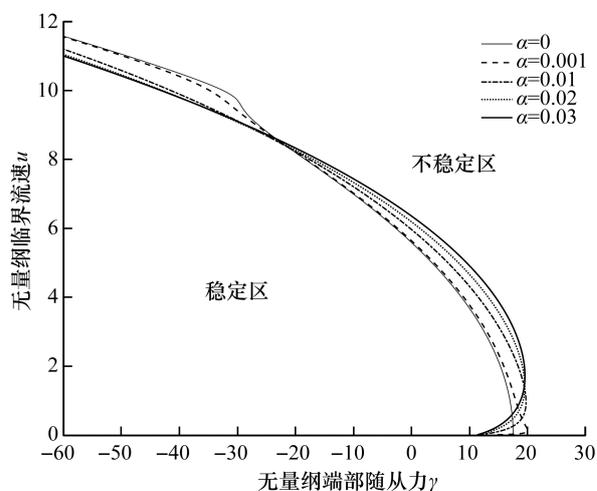


图 4 不同黏弹性系数下输流管道临界流速与端部随从力的关系 ($\beta=0.2$)

Fig. 4 Relationship between critical flow velocity and end-following force in fluid-conveying pipe with different viscoelastic coefficients ($\beta=0.2$)

3.2 无量纲复频率随流速的变化及稳定性分析

记矩阵 A 的特征值 $\Gamma = \Gamma_R + i\Gamma_I$, Γ_R, Γ_I 的取值决定了系统的运动状态。若 $\Gamma_I = 0, \Gamma_R > 0$, 系统处于静态稳定, 若 $\Gamma_I > 0, \Gamma_R < 0$, 系统处于动态稳定, 若 $\Gamma_I = 0, \Gamma_R < 0$, 系统发生静态发散失稳, 若 $\Gamma_I > 0, \Gamma_R > 0$, 系统发生动态颤振失稳, 若 $\Gamma_R = 0$, 系统处于失稳临界状态, 此时的流速称为失稳临界流速。

给出不同取值的端部随从力 γ 、黏弹性系数 α 、流速 u 和质量比 β , 可求出矩阵 A 的特征值 Γ 。以无量纲复频率 Ω 替代表示特征值 Γ , 即可得到系统前两阶模态无量纲复频率随无量纲流速变化的关系。无量纲复频率 Ω :

$$\Omega = -i\Gamma = -i(\Gamma_R + i\Gamma_I) = \Gamma_I - i\Gamma_R = \Omega_R + i\Omega_I \quad (13)$$

首先不考虑管道黏弹性这一因素的存在, 画出了 $\alpha=0, \beta=0.2$, 不同端部随从力下输流管道前两阶复频率实部、虚部随流速变化的情况如图 5 所示。以下分析均在各图中数值计算范围内得出。通过观察端部随从力 $\gamma=10$ 的两条曲线发现: 系统一阶模态处于稳定。当 $5.63 \leq u < 8.10$ 时, 系统处于静力稳定, 图中剩余部分即 $0 \leq u < 5.63$ 、 $u \geq 8.10$ 两区间内系统为动力稳定; 系统二阶模态在 $0 \leq u < 3.68$ 区间内处于动力稳定, 当流速 $u \geq 3.68$ 时, 管道发生颤振失稳。 $\gamma=1, 5$ 的情况与其类似。由图 5 可以看出, 质量比一定时, 端部随从力对输流管道发生颤振失稳的临界流速有影响, 发生颤振失稳的临界流速随着端部随从力的增大而减小。

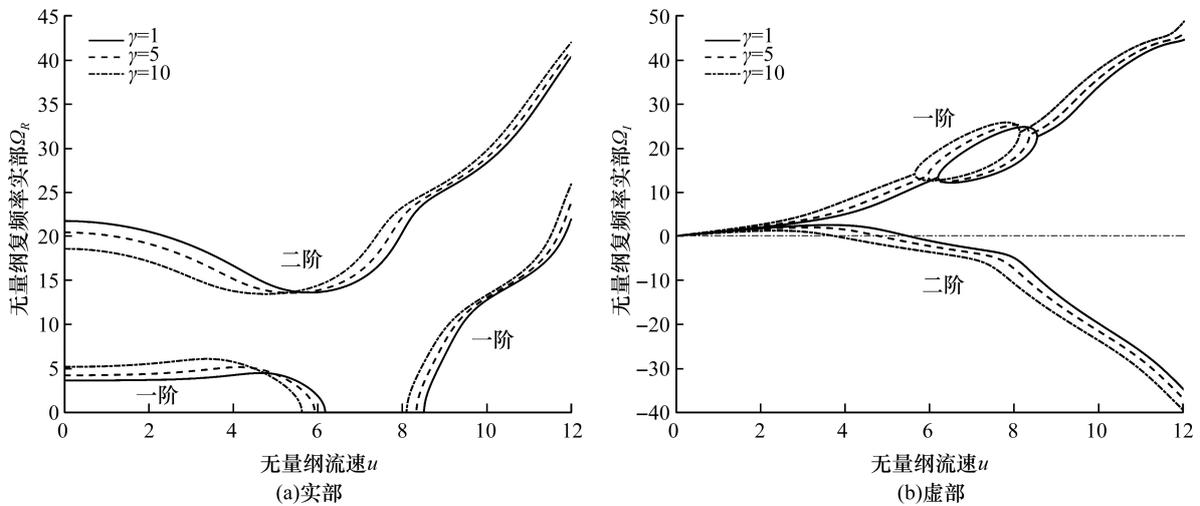


图 5 不同端部随从力下输流管道前两阶复频率随流速的变化 ($\alpha=0, \beta=0.2$)

Fig. 5 Variation of the first two orders of complex frequency with flow velocity in fluid-conveying pipe under different end-following force ($\alpha=0, \beta=0.2$)

接下来考虑管道黏弹性的存在, 图 6 给出了 $\alpha=0.01, \beta=0.2$ 时, 输流管道在不同端部随从力下前两阶复频率实部、虚部随流速变化的情况。通过对比分析图 5 与图 6 发现, 两幅图像的曲线变化趋势大致相同, 图 6 中系统一阶模态同样处于稳定, 存在一个静力稳定区间、两个动力稳定区间; 系统二阶模态也同样先发生动力稳定, 然后在流速大于一定值时管道发生颤振失稳。由此可得, 在考虑了管道系统的黏弹性后, 系统发生颤振失稳的临界流速同样会随着端部随从力的增大而减小, 且系统的整体稳定性不会发生质的改变。

当 $\alpha=0.01, \gamma=10$ 时, 画出了输流管道在不

同质量比下前两阶复频率实部、虚部随流速变化的情况如图 7 所示。当 $\beta=0.6$ 时, 系统一阶模态处于稳定, 在 $3.95 \leq u \leq 4.45$ 和 $8.74 \leq u \leq 10.19$ 两个区间内处于静力稳定, 图中剩余区间为动力稳定; 系统二阶模态在 $0 \leq u < 8.5$ 范围内处于动力稳定, 当流速 $u \geq 8.5$ 时, 管道发生颤振失稳。 $\beta=0.2, 0.4$ 的情况与其类似。观察整个图 7 可以得出: 当黏弹性系数 α 与端部随从力 γ 一定时, 质量比对输流管道发生颤振失稳的临界流速存在明显影响, 发生颤振失稳的临界流速随着质量比的增大而明显增大。

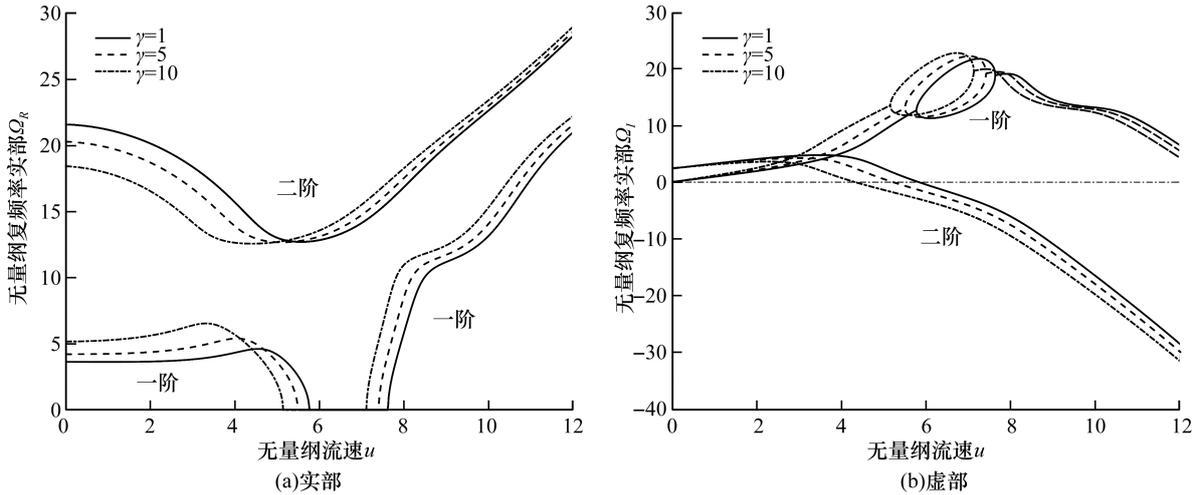


图 6 不同端部随从力下输流管道前两阶复频率随流速的变化($\alpha=0.01, \beta=0.2$)

Fig. 6 Variation of the first two orders of complex frequency with flow velocity in fluid-conveying pipe under different end-following force($\alpha=0.01, \beta=0.2$)

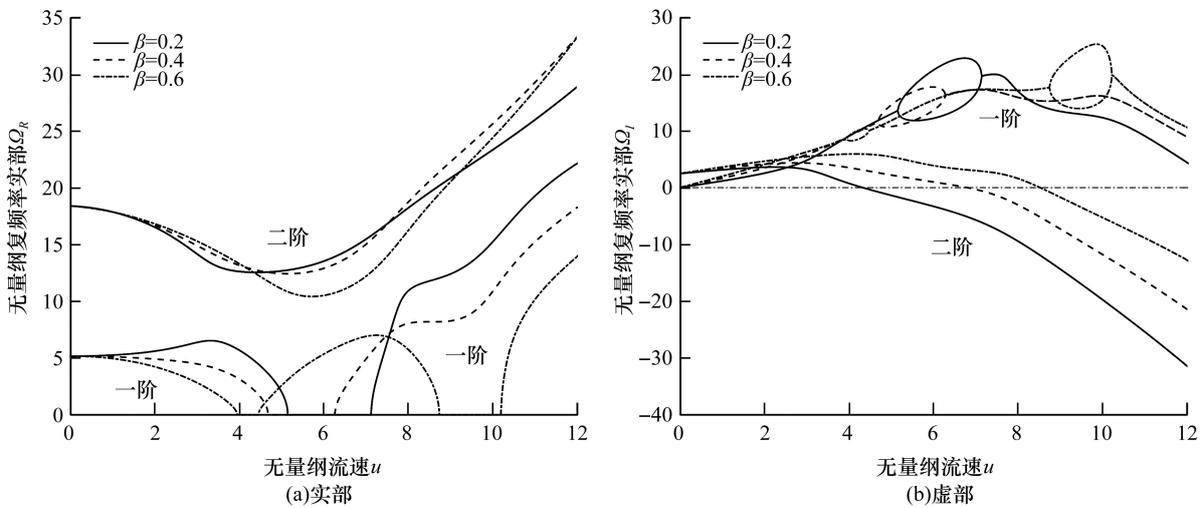


图 7 不同质量比下输流管道前两阶复频率随流速的变化($\alpha=0.01, \gamma=10$)

Fig. 7 Variation of the first two orders of complex frequency with flow velocity in fluid-conveying pipe with different mass ratios($\alpha=0.01, \gamma=10$)

当 $\gamma=10, \beta=0.2$ 时, 输流管道在不同黏弹性系数作用下前两阶复频率随流速变化的情况如图 8 所示。黏弹性系数 $\alpha=0.02$ 时, 系统一阶模态处于稳定, 在 $4.68 \leq u \leq 6.29$ 区间内发生静力稳定, 图中剩余区间为动力稳定; 当流速 $u \geq 4.66$ 时, 管道发生颤振失稳。 $\alpha=0.001, 0.01$ 的情况与其类似。观察整个图 8 可以得出: 当固定端部随从力 γ 与质量比 β 时, 黏弹性这一参数对输流管道发生颤振失稳的临界流速有一定的影响, 发生颤振失稳的临界流速随着黏弹性系数的增大而略微增大。

4 结 论

- 1) 无量纲端部随从力的大小和方向对输流管道发生颤振失稳的临界流速有较大影响。
- 2) 端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道发生失稳的无量纲临界流速随质量比的增大而增大。
- 3) 端部随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的失稳方式为颤振失稳, 未发生发散失稳。悬臂输流管道的稳定性并没有因为端部随从力和黏弹性系数的出现而发生改变, 系统一阶模态是稳定的, 二阶模态发生颤振失稳。

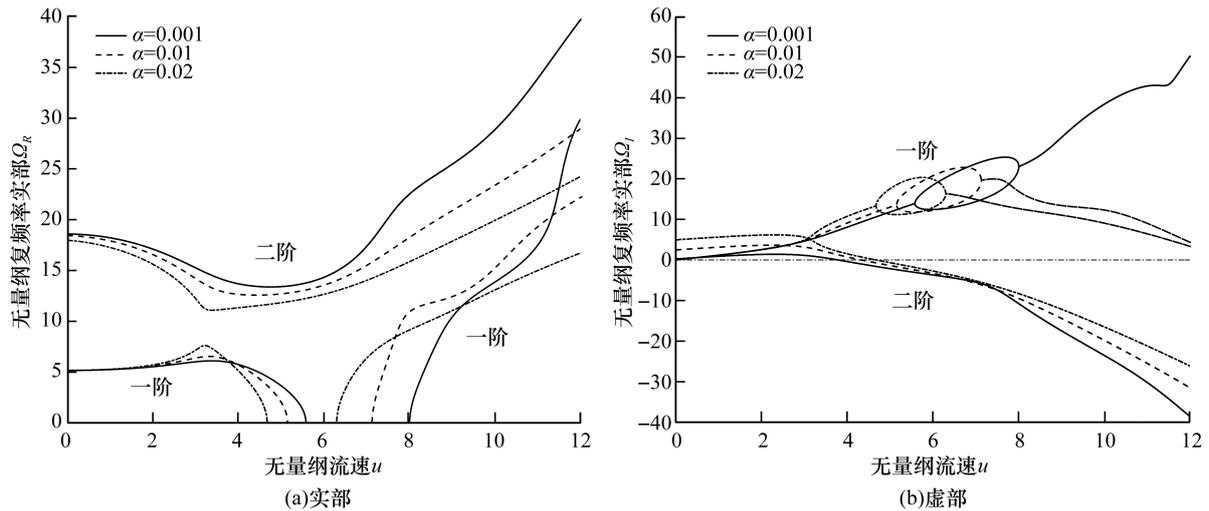


图8 不同黏弹性系数下输流管道前两阶复频率随流速的变化($\gamma=10, \beta=0.2$)

Fig. 8 Variation of the first two orders of complex frequency with flow velocity in fluid-conveying pipe with different coefficients of viscoelasticity($\gamma=10, \beta=0.2$)

4) 黏弹性的从无到有使系统产生了质的变化,黏弹性系数对管道发生颤振失稳的临界流速影响并不明显;当端部随从力大于一定值时,随着管道黏弹性系数的增加,无量纲临界流速略微增加。

参考文献:

- [1] 邢景棠,周盛,崔尔杰. 流固耦合力学概述[J]. 力学进展,1997,27(1):20-39.
- [2] PAÏDOUSSIS M P,ISSID N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid[J]. Journal of sound and vibration,1974,33(3):267-294.
- [3] 易浩然,周坤,代胡亮,等. 含集中质量悬臂输流管的稳定性与模态演化特性研究[J]. 力学学报,2020,52(6):1800-1810.
- [4] ZHOU J,CHANG X P,XIONG Z J, et al. Stability and nonlinear vibration analysis of fluid-conveying composite pipes with elastic boundary conditions[J]. Thin-walled structures,2022,179(12):109597.
- [5] LU Z Q,ZHANG K K,DING H, et al. Nonlinear vibration effects on the fatigue life of fluid-conveying pipes composed of axially functionally graded materials[J]. Nonlinear dynamics,2020,100(2):1091-1104.
- [6] 张计光,陈立群,钱跃竝. Winkler 地基上粘弹性输流管的参数共振稳定性[J]. 振动与冲击,2013,32(13):137-141.
- [7] ZANGANEH R,AHMADI A,KERAMAT A. Fluid-structure interaction with viscoelastic supports during waterhammer in a pipeline[J]. Journal of fluids and structures,2015,54:215-234.
- [8] 王忠民,张战午,赵凤群. 输流粘弹性曲管的稳定性分析[J]. 应用数学和力学,2005,26(6):743-748.
- [9] 漆发辉,王天林,郭长青. 分布随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的稳定性分析[J]. 南华大学学报(自然科学版),2022,36(6):1-7.
- [10] 冯振宇,王忠民,赵凤群. 简支 Kelvin 模型粘弹性输流管道的动力稳定性[J]. 工程力学,2004,21(1):185-190.
- [11] 刘颖,郭长青. 粘弹性悬臂输流管道在激励力下的稳态响应分析[J]. 南华大学学报(自然科学版),2021,35(1):43-48.
- [12] ZHU B,ZHANG X L,ZHAO T Y. Nonlinear planar and non-planar vibrations of viscoelastic fluid-conveying pipes with external and internal resonances[J]. Journal of sound and vibration,2023,548(3):117558.
- [13] 郭长青,刘红涛,王晓锋,等. 输流管道在分布随从力作用下的振动和稳定性[J]. 工程力学,2010,27(4):190-196.
- [14] 赵凤群,王忠民,张菊梅. 基于 WDQ 法的粘弹性输流管道稳定性分析[J]. 计算力学学报,2011,28(4):584-589.
- [15] ASKARIAN A R,PERMOON M R,ZAHEDI M, et al. Stability analysis of viscoelastic pipes conveying fluid with different boundary conditions described by fractional Zener model[J]. Applied mathematical modelling,2022,103:750-763.
- [16] 陶立佳,郭长青,童立明. 悬臂输流管道在端部随从力作用下的稳定性[J]. 南华大学学报(自然科学版),2018,32(1):53-57.