

离散非线性 Schrödinger 方程同宿解的多重性

许晓亮, 陈会文*

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘 要: 研究了一类离散非线性 Schrödinger 方程同宿解的多重性, 在对非线性项作新的假设条件下, 利用临界点理论, 证明了该方程同宿解的多重性。

关键词: 离散非线性薛定谔方程; 临界点理论; 多重性; 同宿解

中图分类号: O175.25 **文献标志码:** A

文章编号: 1673-0062(2023)05-0075-06

Multiplicity of Homoclinic Solutions of Discrete Nonlinear Schrödinger Equations

XU Xiaoliang, CHEN Huiwen*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper was studied the multiplicity of homoclinic solutions for a class of discrete nonlinear Schrödinger equations. Under new assumptions on nonlinearity, the multiplicity of the homoclinic solutions is obtained by using the critical point theory.

key words: discrete nonlinear Schrödinger equations; critical point theory; multiplicity results; homoclinic solution

0 引 言

众所周知, 离散非线性薛定谔方程广泛应用于从非线性光学^[1], 生物分子链^[2]和凝聚态物理^[3]等许多领域之中。近十年来, 离散非线性薛定谔方程方程驻波解的存在性一直是一个非常热门的话题。离散非线性薛定谔方程的研究可分为

周期和非周期两类。针对周期的情况可见参考文献[4-7], 而对于非周期的情况可见参考文献[8-13]。相较于周期情况, 有关于非周期的研究相对较少。本文将考虑在 m 维无穷格点上的非周期离散非线性薛定谔方程:

$$-i\psi_n - \Delta\psi_n + v_n\psi_n = f_n(\psi_n), n \in \mathbb{Z}^m, \quad (1)$$

收稿日期: 2023-07-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11601222); 湖南省自然科学基金项目(2019JJ50487; 2019JJ40240); 湖南省教育厅优秀青年项目(22B0456); 湖南省研究生科研创新项目(CX20230976)

作者简介: 许晓亮(1996—), 男, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程方面的研究。E-mail: 13514469601@163.com。

* 通信作者: 陈会文(1986—), 男, 副教授, 博士, 主要从事微分方程方面的研究。E-mail: 393302567@qq.com

其中

$$\begin{aligned}\Delta\psi_n &= \psi_{(n_1+1, n_2, \dots, n_m)} + \psi_{(n_1, n_2+1, \dots, n_m)} + \dots + \\ &\psi_{(n_1, n_2, \dots, n_m+1)} - 2m\psi_{(n_1, n_2, \dots, n_m)} + \\ &\psi_{(n_1-1, n_2, \dots, n_m)} + \psi_{(n_1, n_2-1, \dots, n_m)} + \dots + \\ &\psi_{(n_1, n_2, \dots, n_m-1)}\end{aligned}$$

是 m 维空间的离散拉普拉斯算子, $V = \{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m}$ 是实数列。由于驻波解是局部周期解并且在无穷远处趋于0, 可以假设非线性项 $f_n(u)$ 是规范不变式, 即

$$f_n(e^{i\omega}u) = e^{i\omega}f_n(u),$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall (n, u) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

因此, ψ_n 可以写成下列形式:

$$\psi_n = u_n e^{-i\omega t}$$

并且满足

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \psi_n = 0$$

其中 $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m}$ 是实序列, $\omega \in \mathbb{R}$ 是时序频率, $|n| = |n_1| + |n_2| + \dots + |n_m|$ 表示多重指标 n 的长度, 则方程(1)可化为

$$-\Delta u_n + v_n u_n - \omega u_n = f_n(u_n), n \in \mathbb{Z}^m, \quad (2)$$

并且满足

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad (3)$$

于是求方程(1)的驻波解转化为求方程(2)在满足条件(3)时的同宿解。

有的学者研究了如下离散非线性薛定谔方程:

$$-\Delta u_n + v_n u_n - \omega u_n = \gamma_n f(u_n), n \in \mathbb{Z}^m.$$

例如 D. F. Ma 和 Z. Zhou 在参考文献[9]中, 利用临界点理论得到了非平凡解的存在及多重性。

随后, L. Q. Jia 和 G. W. Chen 在参考文献[10]中, 利用变分方法研究了方程(2)并得到了下面的定理:

$$(V) V = \{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m} \text{ 满足 } \lim_{|n| \rightarrow +\infty} v_n = +\infty. \quad (4)$$

$(F_1) f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且存在 $c_0, c_1 > 0$ 和 $p > 2$ 使得

$$|f_n(x)| \leq c_0 |x| + c_1 |x|^{p-1},$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

$$(F_2) \text{ 对于任意 } n \in \mathbb{Z}^m, \text{ 有 } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{F_n(x)}{|x|^2} = +\infty,$$

其中存在 $T_0 > 0$, 使得

$$F_n(x) := \int_0^x f_n(t) dt \geq 0, \forall |x| \geq T_0.$$

$$(F_3) f_n(-x) = -f_n(x), \forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

$(F_4) f_n(x)x - 2F_n(x) \geq 0, \forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}$, 且存在 $c_2 > 0$ 和 $\sigma > 1$ 使得

$$|F_n(x)| \leq c_2 |x|^{2\sigma} (f_n(x)x - 2F_n(x)),$$

$$\forall |x| \geq r_0, \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

(F_4') 存在 $\mu > 2$ 和 $\kappa > 0$ 使得

$$\mu F_n(s) \leq f_n(s)s + \kappa s^2, \forall (n, s) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

定理1(参考文献[10]) 若条件(V), 条件 $(F_1) \sim (F_4)$ 成立, 则方程(2)有无穷多个非平凡同宿解。

定理2(参考文献[10]) 若条件(V), 条件 $(F_1) \sim (F_3)$ 和条件 (F_4') 成立, 则方程(2)有无穷多个非平凡同宿解。

在上述文献的启发下, 本文运用临界点理论对方程(2)非平凡解的多重性进行了研究, 并对非线性项 $f_n(x)$ 做出新的假设, 将使用如下条件:

$$(F_5) f_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ 且存在 } M_0 > 0 \text{ 和 } p > 2, \text{ 使得}$$

$$|f_n(x)| \leq M_0(|x| + |x|^{p-1}),$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

$$(F_6) \tilde{F}_n(x) := \frac{1}{2} f_n(x)x - F_n(x) \geq g_n,$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}, \text{ 其中 } g \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R}), \text{ 对于所有 } n \in$$

$$\mathbb{Z}^m, \text{ 有 } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \tilde{F}_n(x) = +\infty, \text{ 并且存在 } T_0 > 0 \text{ 使得 } \tilde{F}_n(x) \geq 0, \forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}, |x| \geq T_0.$$

$$(F_7) \text{ 存在 } Q > 0, \eta > 2 \text{ 和 } T_1 > 0 \text{ 使得}$$

$$Qx^2 + f_n(x)x \geq \eta F_n(x),$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}, |x| \geq T_1.$$

本文的主要结果如下:

定理3 若条件(V)、 (F_2) 、 (F_3) 、 (F_5) 和条件 (F_6) 成立, 则方程(2)有无穷多个非平凡同宿解。

定理4 若条件(V)、 (F_2) 、 (F_3) 、 (F_5) 和条件 (F_7) 成立, 则方程(2)有无穷多个非平凡同宿解。

例1:

$$(1) F_n(x) = a_n [|x|^2 (|x|^2 + \sin|x|^2) - 6|x|^2 + |x|^2 (1 - 1/(1+|x|))].$$

$$(2) F_n(x) = a_n [2|x|^2 (1 - 1/(1+|x|)) - |x|^6].$$

其中, $0 < \inf_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n < \sup_{n \in \mathbb{Z}^m} a_n < +\infty$. 很容易验证, 例1满足条件 (F_2) 、 (F_3) 和条件 (F_5) , 其中(1)满足条件 (F_6) , 但不满足条件 (F_4) 。(2)满足条件 (F_7) , 却不满足条件 (F_4') 。故不满足定理1、2, 但满足定理3、4。

注1: 参考文献[6, 9, 14]利用了假设条件。

$$(F_8) |f_n(x)| \leq a(1+|x|^{p-1}), a>0, p>2,$$

$$\forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

显然,本文的条件 (F_5) 比条件 (F_1) 和上述条件 (F_8) 都弱。在参考文献[14]中,用下面经典的 Ambrosetti-Rabinowitz (AR) 条件代替条件 (F_5) :

$$0 < \mu F_n(u) \leq u f_n(u), \mu > 2, u \neq 0.$$

显然,由 (AR) 条件可得 $F_n(u) \geq C|u|^\mu > 0$, 其中 C 是常数, $|u| \geq 1$ 。所以 (AR) 条件比条件 (F_5) 强。本文中的例 1 可以很好地说明所得结果,很容易验证,例 1 不满足上诉所用的条件和 (AR) 条件,但却满足定理 3、定理 4 所用条件。

1 预备知识

考虑下列实序列空间:

$$l^q := \left\{ u = \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m} : u_n \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. \|u\|_q = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} |u_n|^q \right)^{1/q} < +\infty \right\}$$

其中 $q \in [1, +\infty)$ 。因此,有下述嵌入关系成立:

$$l^{q_1} \subset l^{q_2}, \|u\|_{q_2} \leq \|u\|_{q_1},$$

$$1 \leq q_1 \leq q_2 \leq +\infty, \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}^m} |u_n|.$$

令 $E := D((- \Delta + V)^{1/2})$, 其中

$$(- \Delta + V)u_n := - \Delta u_n + v_n u_n, V = \{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}^m}.$$

根据假设可知,算子 $- \Delta + V$ 是 l^2 空间上的无界自伴算子,又由算子 $- \Delta$ 是 l^2 空间上的有界算子,易得 $E = \{u \in l^2 : V^{1/2}u \in l^2\}$ 。

引理 1 (参考文献[15]) 假设条件 (V) 成立,则

(1) 对任意 $2 \leq p \leq \infty$, 从空间 E 到空间 l^p 的嵌入映射是紧的。

(2) 算子 H 的谱 $\sigma(H)$ 是离散的。

运用分析的技巧可将不定方程转化为正定方程,从而可以大大降低分析的难度,具体做法如下:

注 2: 显然,存在常数 $\theta > 0$, 使得

$$\lambda_1 + \theta - \omega > c > 0,$$

其中 $\lambda_1 := \inf \sigma(- \Delta + V)$ 。

令 $\bar{f}_n(x) = f_n(x) + \theta x$, 易证 $\bar{f}_n$ 满足条件 (F_2) 、 (F_3) 和条件 $(F_5) \sim (F_7)$ 。所以,方程(2)等价于下述方程:

$$- \Delta u_n + \bar{v}_n u_n = \bar{f}_n(u_n), n \in \mathbb{Z}^m, \quad (5)$$

并满足边界条件(3),其中 $\bar{v}_n = v_n + \theta - \omega$ 。因此,要证明定理 3、4,只需证明在假设条件成立的情况下方程(5)存在无穷多个非平凡同宿解。

定义算子 H 为 $Hu_n := - \Delta u_n + \bar{v}_n u_n$, 则在空间

E 上的内积和范数:

$$(u, \varphi) := (Hu, \varphi)_{l^2} =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} [(- \Delta u_n + \bar{v}_n u_n) \varphi_n],$$

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \forall u, \varphi \in E.$$

所以,方程(5)所对应的泛函可以写为:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} (Hu, u)_{l^2} - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \bar{F}_n(u_n) = \\ \frac{1}{2} \|u\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \bar{F}_n(u_n), \forall u \in E, \quad (6)$$

其中

$$\bar{F}_n(x) := \int_0^x \bar{f}_n(t) dt, \forall (n, x) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}.$$

因此,有 $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ 且

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = (u, v) - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \bar{f}_n(u_n) v_n, \\ \forall u, v \in E. \quad (7)$$

很容易得到方程(2)是泛函 Φ 所对应的 Euler-Lagrange 方程。因此,求解方程(2)的非平凡解可归结为求解泛函 Φ 的非零临界点。

设 X 为一个实 Banach 空间,泛函 $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, 若 X 中的序列 $\{u_n\}$ 满足条件

$$J(u_n) \rightarrow c,$$

$$(1 + \|u_n\|) \|J'(u_n)\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

则称 $\{u_n\}$ 为泛函 J 的水平 c 上的 Cerami 序列,记为 $(C)_c$ 序列。若泛函 J 的任何 $(C)_c$ 序列都存在收敛子列,则称泛函 J 满足 $(C)_c$ 条件。

引理 2 (参考文献[16]) 设 X 是一无限维 Banach 空间, $X = Y \oplus Z$, 其中 Y 是有限维空间,对所有 $c > 0$, 若 $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ 满足 $(C)_c$ 条件且

$$(1) \forall u \in X, \Phi(0) = 0, \Phi(-u) = \Phi(u);$$

$$(2) \text{存在常数 } \alpha, \rho > 0, \text{使得}$$

$$\Phi|_{\partial B_\rho \cap Z} \geq \alpha;$$

(3) 对任意有限维子空间 $\tilde{X} \subset X$, 存在 $R = R(\tilde{X}) > 0$, 使得在 $\tilde{X} \setminus B_R$ 上有

$$\Phi(u) \leq 0;$$

则 Φ 有一个由临界值组成的无界子序列。

引理 3 假设条件 (V)、 (F_2) 、 (F_5) 、 (F_6) 成立,对于任意序列 $\{u^k\} \subset E$, 若满足 $\Phi(u^k) \rightarrow c > 0$,

$$(1 + \|u^k\|) \|\Phi'(u^k)\| \rightarrow 0, \quad (9)$$

其中 $k \rightarrow \infty$, 则 $\{u^k\}$ 在空间 E 上是有界的。

证明: 因为 $\{u^k\}$ 满足式(9), 所以存在 $M_1 > 0$, 使得

$$M_1 \geq \frac{1}{2} \langle \Phi'(u^k), u^k \rangle - \Phi(u^k). \quad (10)$$

运用反证法,假设当 $k \rightarrow \infty$ 时,有 $\|u^k\| \rightarrow \infty$ 。令 $v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|}$, 则有 $\|v^k\| = 1$ 且存在 $v \in E$ 使得

$$(1) \text{ 在空间 } E \text{ 上,} \quad v^k \rightarrow v_0. \quad (11)$$

$$(2) \text{ 在空间 } l^q(\mathbb{Z}^m, \mathbb{R}) \ (2 \leq q < +\infty) \text{ 上,} \quad v^k \rightarrow v_0. \quad (12)$$

由于在空间 E 上 $v^k \rightarrow v_0$ 。对于所有的 $n \in \mathbb{Z}^m, v_n^k$ 收敛于 v_n , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_n^k = v_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

情况(一): $v = 0$ 。

(I) 假设对于任意的 $n \in \mathbb{Z}^m$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 存在常数 $T_0 > 0$, 使得 $|u_n^k| \leq T_0$ 。由条件 (F_5) 和注 2 可得

$$|\bar{F}_n(u_n^k)| \leq \frac{M_0}{2} |u_n^k|^2 + \frac{M_0 T_0^{p-2}}{p} |u_n^k|^2, \quad (13)$$

其中 $(n, u) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}$ 。

由式(6)和式(13)可得

$$\begin{aligned} \Phi(u^k) &= \frac{1}{2} \|u^k\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \bar{F}_n(u_n^k) \geq \\ &\frac{1}{2} \|u^k\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \left(\frac{M_0}{2} |u_n^k|^2 + \right. \\ &\left. \frac{M_0 T_0^{p-2}}{p} |u_n^k|^2 \right) \geq \frac{1}{2} \|u^k\|^2 - \\ &\left(\frac{M_0}{2} + \frac{M_0 T_0^{p-2}}{p} \right) \|u^k\|_2^2. \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)两边同时除以 $\|u^k\|^2$, 由式(12)和 $\{\Phi(u^k)\}$ 有界可知存在 $\bar{\varepsilon} \in (0, \frac{1}{2})$ 和 $\bar{N}_0 \in \mathbb{Z}$, 对于 $k \geq \bar{N}_0$, 使得 $\frac{1}{2} \leq \bar{\varepsilon} < \frac{1}{2}$ 。显然, 这是矛盾的。

(II) 假设存在 $n_0 \in \mathbb{Z}^m$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 使得 $|u_{n_0}^k| \rightarrow \infty$ 。对于 $0 \leq \bar{a}_1 < \bar{a}_2$, 令

$$\Omega_k(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \{n \in \mathbb{Z}^m : \bar{a}_1 \leq |u_n^k| < \bar{a}_2\}.$$

对于足够大的 $k \in \mathbb{N}, n_0 \in \Omega_k(T_0, +\infty)$, 结合式(6)、(7)、(10), 条件 (F_6) 和 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} M_1 &\geq \frac{1}{2} \langle \Phi'(u^k), u^k \rangle - \Phi(u^k) = \\ &\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \left[\frac{1}{2} f_n(u_n^k) u_n^k - \bar{F}_n(u_n^k) \right] \geq \\ &\bar{F}_{n_0}(u_{n_0}^k) - \|g\|_1 \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

显然, 与已知矛盾。

情况(二): $v \neq 0$ 。

令 $A = \{n \in \mathbb{Z}^m : v_n \neq 0\}$ 。对于所有 $n \in A$, 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} |u_n^k| = \infty$ 。

定义: 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$,

$$X_{n, \Omega_k(T_0, \infty)} := \begin{cases} 1, & n \in \Omega_k(T_0, \infty). \\ 0, & n \notin \Omega_k(T_0, \infty). \end{cases}$$

对于足够大的 $k \in \mathbb{N}, A \subset \Omega_k(T_0, \infty)$ 。由引理 1 可知 $\|v^k\|_2 \leq \gamma_2 \|v^k\|$, 结合式(6)、式(13), 条件 (F_2) , 注 2 和 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c + o(1)}{\|u^k\|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u^k)}{\|u^k\|^2} = \\ &\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \frac{\bar{F}_n(u_n^k)}{|u_n^k|^2} |v_n^k|^2 \right] = \\ &\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \sum_{n \in \Omega_k(0, T_0)} \frac{\bar{F}_n(u_n^k)}{|u_n^k|^2} |v_n^k|^2 - \right. \\ &\left. \sum_{n \in \Omega_k(T_0, \infty)} \frac{\bar{F}_n(u_n^k)}{|u_n^k|^2} |v_n^k|^2 \right] \leq \\ &\frac{1}{2} + \left(\frac{M_0}{2} + \frac{M_0 T_0^{p-2}}{p} \right) \gamma_2^2 - \\ &\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in \Omega_k(T_0, \infty)} \frac{\bar{F}_n(u_n^k)}{|u_n^k|^2} |v_n^k|^2 = \\ &\frac{1}{2} + \left(\frac{M_0}{2} + \frac{M_0 T_0^{p-2}}{p} \right) \gamma_2^2 - \\ &\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \left[\frac{|\bar{F}_n(u_n^k)|}{|u_n^k|^2} [X_{n, \Omega_k(T_0, \infty)}] |v_n^k|^2 \right] \leq \\ &\frac{1}{2} + \left(\frac{M_0}{2} + \frac{M_0 T_0^{p-2}}{p} \right) \gamma_2^2 - \\ &\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \liminf_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{|\bar{F}_n(u_n^k)|}{|u_n^k|^2} [X_{n, \Omega_k(T_0, \infty)}] |v_n^k|^2 \right] = \\ &-\infty. \end{aligned} \quad (15)$$

由此可推出矛盾, 所以 $\{u^k\}$ 在空间 E 上有界。

引理 4 假设条件 (V) 、 (F_2) 、 (F_5) 和 (F_6) 成立, 对于任意序列 $\{u^k\} \subset E$, 在空间 E 上有满足式(9)的收敛子列。

证明: 由 $\{u^k\}$ 的有界性可推出在空间 E 上有 $u_k \rightarrow u, k \rightarrow \infty$ 。首先, 证明

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} [(\bar{f}_n(u_n^k) - \bar{f}_n(u_n))(u_n^k - u_n)] \rightarrow 0, \quad (16)$$

其中 $k \rightarrow \infty$ 。由引理 1, 在空间 $l^q(2 \leq q < \infty)$ 上有 $u^k \rightarrow u, k \rightarrow \infty$ 。因此, 则有

$$\|u^k - u\|_2 \rightarrow 0. \quad (17)$$

由 $\{u^k\}$ 的有界性和引理 1 可得, 对于任意 $2 \leq q < \infty$, 有 $\|u^k\|_q < \infty$ 。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 结合条件 (F_5) ,

式(17)和 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} [(\bar{f}_n(u_n^k) - \bar{f}_n(u_n))(u_n^k - u_n)] \leq \\ & \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} [(|\bar{f}_n(u_n^k)| + |\bar{f}_n(u_n)|) |u_n^k - u_n|] \leq \\ & M_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} (|u_n^k| + |u_n^{p-1}|) |u_n^k - u_n| + \\ & M_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} (|u_n| + |u_n^{p-1}|) |u_n^k - u_n| \leq \\ & M_0 (\|u^k\|_2 + \|u^k\|_{2p-2}^{p-1}) \|u^k - u\|_2 + \\ & M_0 (\|u\|_2 + \|u\|_{2p-2}^{p-1}) \|u^k - u\|_2 \rightarrow 0, \quad (18) \end{aligned}$$

由 $u^k \rightharpoonup u$ 和式(18)可得

$$\begin{aligned} \|u^k - u\|^2 &= \langle \Phi'(u^k) - \Phi'(u), u^k - u \rangle + \\ & \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} [(\bar{f}_n(u_n^k) - \bar{f}_n(u_n))(u_n^k - u_n)] \rightarrow 0, \\ & k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

因此, Φ 满足 $(C)_c$ 条件。

引理5 假设条件 (V) 、 (F_2) 、 (F_5) 和 (F_7) 成立, 对于任意序列 $\{u^k\} \subset E$, 在空间 E 上有满足式(9)的收敛子列。

证明: 首先, 证明 $\{u^k\}$ 在空间 E 中有界, 然后再利用反证法来证明。假设当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|u^k\| \rightarrow \infty$ 。令 $v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|}$, 则有 $\|v^k\| = 1$ 并且当 $2 \leq q \leq \infty$ 时, 有 $\|v^k\|_q \leq \gamma_q \|v^k\| = \gamma_q$ 。

情况(一): $v = 0$ 。结合式(6)、式(7), 条件 (F_5) 、 (F_7) 和 Hölder 不等式, 存在 $M_2 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} M_2 &\geq \eta \Phi(u^k) - \langle \Phi'(u^k), u^k \rangle = \\ & \left(\frac{\eta}{2} - 1 \right) \|u^k\|^2 + \\ & \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} [\bar{f}_n(u_n^k) u_n^k - \eta \bar{F}_n(u_n^k)] \geq \\ & \left(\frac{\eta}{2} - 1 \right) \|u^k\|^2 - \\ & M_0 (1 + \eta) \sum_{n \in \Omega_k(0, T_1)} (|u_n^k|^2 + |u_n^k|^p) - \\ & \sum_{n \in \Omega_k(T_1, +\infty)} (Q |u_n^k|^2) \geq \frac{\eta - 2}{2} \|u^k\|^2 - \\ & [M_0 (1 + \eta) (1 + T_1^{p-2}) + Q] \|u^k\|_2^2 \quad (19) \end{aligned}$$

式(19)两边同时除以 $\|u^k\|^2$, 则可推出

$$\|v^k\|_2^2 \geq \frac{\eta - 2}{2M_3} > 0, k \rightarrow \infty, \quad (20)$$

其中, $M_3 = [M_0(1+\eta)(1+T_1^{p-2})+Q]$ 。由式(12)和式(20), 可得 $v \neq 0$ 。显然, 这是矛盾的。

情况(二): $v \neq 0$ 。其证明类似于式(15)的证

明, 可得到矛盾。

因此, $\{u^k\}$ 在空间 E 上有界。其余证明与引理4中的证明相同。

引理6 假设条件 (V) 、 (F_2) 、 (F_5) 成立, 对于任意有限维子空间 $\tilde{E} \subset E$, 则有

$$\Phi(u) \rightarrow -\infty, \|u\| \rightarrow \infty, u \in \tilde{E}.$$

证明: 运用反证法, 假设存在 $\{u^k\} \subset \tilde{E}$, 当 $\|u^k\| \rightarrow \infty$ 时, 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $M > 0$, 使得 $\Phi(u^k) \geq -M$ 。令 $v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|}$, 则有 $\|v^k\| = 1$ 。传递到子序

列, 可设在空间 E 上有 $v^k \rightharpoonup v, k \rightarrow \infty$ 。已知 $\tilde{E}$ 是有限维, 则在空间 E 上有 $v^k \rightarrow v$, 对所有的 $n \in \mathbb{Z}^m$, 有 $v_n^k \rightarrow v_n$, 所以 $\|v\| = 1$ 。类似式(15)的过程, 可推出矛盾。

推论1 假设条件 (V) 、 (F_2) 和 (F_5) 成立, 对于任意有限维子空间 $\tilde{E} \subset E$, 则有 $R = R(\tilde{E}) > 0$, 使得

$$\Phi(u) \leq 0, \forall u \in \tilde{E}, \|u\| \geq R.$$

令 $\{e_j\}$ 为空间 E 的标准正交基且 $X_j = \mathbb{R} e_j$,

$$Y_k = \bigotimes_{j=1}^k X_j, Z_k = \bigotimes_{j=k+1}^{\infty} X_j, k \in \mathbb{N}.$$

引理7 假设条件 (V) 和条件 (F_5) 成立, 则存在常数 $\rho, \alpha > 0$, 使得

$$\Phi|_{\partial B_\rho \cap Z_m} \geq \alpha.$$

证明: 令

$$\begin{aligned} l_2(k) &:= \sup_{u \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_2}{\|u\|}, \\ l_p(k) &:= \sup_{u \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_p}{\|u\|}, p > 2. \end{aligned}$$

易得 $0 < l_2(k+1) \leq l_2(k)$, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $l_2(k) \rightarrow l \geq 0$ 。对每一个 $k \geq 0$, 存在 $u^k \in \mathbb{Z}_k$ 使得 $\|u^k\| = 1$ 且 $\|u^k\|_2 > l_2(k)/2$ 。由 $\mathbb{Z}_k$ 的定义可知, 在空间 E 上有 $u^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 。因此, 由引理1可知, 在空间 l^2 上有 $u^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 。因此可得 $l = 0$, 即 $l_2(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ 。与之相似, 易得当 $k \rightarrow \infty$ 时有 $l_p(k) \rightarrow 0$ 。

选择一个足够大的整数 $k > 1$, 使得

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &\leq \frac{1}{2M_0} \|u\|^2, \|u\|_p^p \leq \frac{p}{4M_0} \|u\|^p, \\ p &> 2, \forall u \in Z_k. \quad (21) \end{aligned}$$

如果 $\|u\| = T_0$, 则有 $\|u\|_\infty \leq T_0$ 。因此, 由假设 (F_5) 和注2可得

$$|\bar{F}_n(u_n)| \leq \frac{M_0}{2} |u_n|^2 + \frac{M_0}{p} |u_n|^p. \quad (22)$$

结合式(6)、式(21)和式(22)可得

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \bar{F}_n(u_n) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \\ &\quad \frac{M_0}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} |u_n|^2 - \frac{M_0}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} |u_n|^p = \\ &\quad \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{M_0}{2} \|u\|_2^2 - \frac{M_0}{p} \|u\|_p^p \geq \\ &\quad \frac{1}{4} (\|u\|^2 - \|u\|^p) = \frac{2^{p-2} - 1}{2^{p+2}} : = \alpha, \\ &\quad \forall u \in Z_m, \|u\| = \frac{1}{2} : = \rho. \end{aligned}$$

由此引理得证。

2 主要结果证明

定理3的证明:令 $X=E$, $Y=Y_m$, $Z=Z_m$, F 满足条件 (F_2) 、 (F_3) 、 (F_5) 和条件 (F_6) 。通过引理3、4、7和推论1,满足引理2的所有条件。从而,系统有无穷多个非平凡解。

定理4的证明:令 $X=E$, $Y=Y_m$, $Z=Z_m$, F 满足条件 (F_2) 、 (F_3) 、 (F_5) 和条件 (F_7) 。通过引理5、7和推论1,同样满足引理2的所有条件。从而,系统有无穷多个非平凡解。

参考文献:

- [1] CHRISTODOULIDES D N, LEDERER F, SILBERBERG Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices[J]. Nature, 2003, 424(6950): 817-823.
- [2] KOPIDAKIS G, AUBRY S, TSIRONIS G P. Targeted energy transfer through discrete breathers in nonlinear systems[J]. Physical review letters, 2001, 87(16): 165501.
- [3] LIVI R, FRANZOSI R, OPPO G L. Self-localization of Bose-Einstein condensates in optical lattices via boundary dissipation[J]. Physical review letters, 2006, 97(6): 060401.
- [4] ZHOU Z, YU J S. Homoclinic solutions in periodic nonlinear difference equations with superlinear nonlinearity[J]. Acta mathematica sinica, 2013, 29(9): 1809-1822.
- [5] ZHOU Z, YU J S, CHEN Y M. Homoclinic solutions in periodic difference equations with saturable nonlinearity

- [J]. Science china mathematics, 2011, 54(1): 83-93.
- [6] MAI A, ZHOU Z. Discrete solitons for periodic discrete nonlinear Schrödinger equations[J]. Applied mathematics and computation, 2013, 222: 34-41.
- [7] TANG X H. Non-Nehari manifold method for asymptotically periodic Schrödinger equations[J]. Science China mathematics, 2015, 58(4): 715-728.
- [8] 贾荔茜. 非周期离散非线性薛定谔方程同宿解的研究[D]. 济南: 济南大学, 2019: 41-47.
- [9] ZHOU Z, MA D F. Multiplicity results of breathers for the discrete nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials[J]. Science china mathematics, 2015, 58(4): 781-790.
- [10] JIA L Q, CHEN G W. Discrete Schrödinger equations with sign-changing nonlinearities: Infinitely many homoclinic solutions[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2017, 452(1): 568-577.
- [11] LIN G H, ZHOU Z, YU J S. Ground state solutions of discrete asymptotically linear Schrödinger equations with bounded and non-periodic potentials[J]. Journal of dynamics and differential equations, 2020, 32(2): 527-555.
- [12] CHEN G W, SCHECHTER M. Multiple solutions for non-periodic Schrödinger lattice systems with perturbation and super-linear terms[J]. Zeitschrift für angewandte mathematik und physik, 2019, 70(5): 152.
- [13] 徐雄辉. 离散非线性薛定谔方程的变分问题研究[D]. 南昌: 南昌大学, 2022: 46-59.
- [14] ZHANG G, PANKOV A. Standing wave solutions of the discrete non-linear Schrödinger equations with unbounded potentials, II[J]. Applicable analysis, 2010, 89(9): 1541-1557.
- [15] ZHANG G. Breather solutions of the discrete nonlinear Schrödinger equations with unbounded potentials[J]. Journal of mathematical physics, 2009, 50(1): 013505.
- [16] RABINOWITZ P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. Rhode Island: American mathematical society, 1986: 55.
- [17] TANG X H. Infinitely many solutions for semilinear Schrödinger equations with sign-changing potential and nonlinearity[J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2013, 401(1): 407-415.