DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2023. 02. 013

具有投资收益的双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型的破产概率

宋　鑫[1],廖基定[1],王　琳[2*],张　邦[1]

(1. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001;2. 湖南交通工程学院 公共基础课部,湖南 衡阳 421001)

摘　要:本文研究了保费过程和索赔过程均为复合 Poisson-Geometric 过程的具有投资收益的双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型,利用概率论中的期望理论和切比雪夫不等式,得出此模型的调节系数不存在。在将干扰因素考虑进来后,得到了调节系数和破产概率的表达式。

关键词:双险种;复合 Poisson-Geometric 过程;破产概率;投资

中图分类号:O211.67　　**文献标志码**:A

文章编号:1673-0062(2023)02-0091-06

The Ruin Probability of a Double-type-insurance Double Compound Poisson-Geometric Risk Model with Investment Returns

SONG Xin[1], LIAO Jiding[1], WANG Lin[2*], ZHANG Bang[1]

(1. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China; 2. Department of Public Infrastructure, Hunan Institute of Traffic Engineering, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: A double compound Poisson-Geometric risk model with investment returns has been studied, in which the premium process and claim process are both Poisson-Geometric process. Using the expectation theory in probability theory and the Chebyshev inequality, it concludes that the adjustment coefficient of this model does not exist. After taking the interference factors into account, the expressions of the adjustment coefficient and the ruin probability are obtained.

key words: double-type-insurance; compound Poisson-Geometric process; ruin probability; investment

---

收稿日期:2022-12-13

基金项目:湖南省科技厅项目(2010SKR02)

作者简介:宋　鑫(1998—),女,硕士研究生,主要从事保险风险与精算方面的研究。E-mail:songxin6551@163.com。

*通信作者:王　琳(1978—),女,副教授,主要从事微分方程定性理论方面的研究。E-mail:1668963605@qq.com

0 引 言

近年来,对保险风险模型中破产问题的研究一直是金融与保险精算学的研究热点。越来越多的国内外学者在经典风险模型的基础上开展了进一步研究。文献[1]首先把经典 Poisson 模型推广到带扰动的风险模型。文献[2]研究了经典风险模型破产概率及其局部解的渐近解。因在实际过程中,索赔次数并不会完全服从 Poisson 分布,文献[3]在经典模型的基础上首次引入一类复合 Poisson-Geometric 分布,得了复合 Poisson-Geometric 风险模型的破产概率的表达式。文献[4-5]对复合 Poisson-Geometric 风险模型进行研究,文献[4]得到了 Gerber-Shiu 折现惩罚期望函数所满足的更新方程,且推导出了破产概率和破产即刻前盈余分布等所满足的更新方程,文献[5]研究了其破产概率的上界估计问题,得到了估计公式。考虑到影响盈余的因素,文献[6-11]引入了利率因素、干扰因素、分红问题、随机保费问题等。文献[12-13]将单险种的复合 Poisson-Geometric 过程推广到双险种,考虑随机保费服从复合 Poisson 过程,索赔为复合 Poisson-Geometric 过程的双险种的风险模型。文献[14]则是考虑随机保费与索赔过程均为复合 Poisson-Geometric 过程的双险种的风险模型,本文则是在此基础上,引入具有投资收益的双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型,利用概率论中的期望理论和切比雪夫不等式推导得到了调节系数,并获得了破产概率的表达式。

1 预备知识

定义 1[3] 称母函数 $G(t)=\exp\left[\dfrac{\lambda(t-1)}{1-\rho t}\right]$ 所对应的分布为 Poisson-Geometric 分布,记为 $PG(\lambda,\rho)$,其中 $\lambda>0, 0\leqslant\rho<1$。

定义 2[3] 设 $\lambda>0, 0\leqslant\rho<1$,称 $\{N(t);t\geqslant0\}$ 为参数 λ,ρ 复合 Poisson-Geometric 过程。如果满足:

(1) $N(0)=0$;

(2) $\{N(t);t\geqslant0\}$ 具有独立平稳增量;

(3) 对 $t>0$ 有 $N(t)\sim PG(\lambda t,\rho)$ 而且

$$E[N(t)]=\frac{\lambda t}{1-\rho},\mathrm{Var}=\frac{\lambda t(1+\rho)}{(1-\rho)^2}。$$

定义 3[3] 设 $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$,其中 $\{N(t);t\geqslant0\}$ 为复合 Poisson-Geometric 过程;X_i 之间独立同分布,而且与 $\{N(t)\}$ 独立。称 $\{Y(t);t\geqslant0\}$ 为双复合 Poisson-Geometric。设 X_i 的矩母函数为 $M_X(r)$,并且每次 $X_i\geqslant0$,则有以下结论:

(1) $\{Y(t);t\geqslant0\}$ 具有独立平稳的增量;

(2) $N(t)$, $Y(t)$ 的矩母函数分别为

$$M_{N(t)}(r)=\exp\left[\frac{\lambda t(\mathrm{e}^r-1)}{1-\rho\mathrm{e}^r}\right],$$

$$M_{Y(t)}(r)=\exp\left[\frac{\lambda t(M_X(r)-1)}{1-\rho M_X(r)}\right]。$$

2 模 型

建立如下两种模型:

$$U(t)=u-u_1+(1+\beta t)u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)} \tag{1}$$

$$U^*(t)=u-u_1+(1+\beta t)u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)}+\sigma W(t) \tag{2}$$

式中:u 为初始本金;u_1 为带有稳定收益的投资金;β 为稳定的投资收益率;$M_1(t)$、$M_2(t)$ 分别为 $X^{(1)}$、$X^{(2)}$ 到时刻 t 为止的保单个数;$X_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,M_1(t))$, $X_i^{(2)}(i=1,2,\cdots,M_2(t))$ 分别为第 i 张保单的保费;$N_1(t)$、$N_2(t)$ 为到时刻 t 为止的两险种的理赔次数;$Y_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,N_1(t))$, $Y_i^{(2)}(i=1,2,\cdots,N_2(t))$ 为第 i 次的理赔金额;$W(t)$ 为影响整体运营的干扰因素,为服从标准正态分布的布朗运动;σ 为扰动系数;$U(t)$ 表示到时刻 t 为止的盈余。

提出假设:

(1) $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$ 均为非负独立同分布随机变量序列。

(2) $M_1(t)\sim PG(\lambda_1 t,\rho_1)$, $M_2(t)\sim PG(\lambda_3 t,\rho_3)$, $N_1(t)\sim PG(\lambda_2 t,\rho_2)$, $N_2(t)\sim PG(\lambda_4 t,p_4)$, $W(t)$ 为标准正态分布的布朗运动。

(3) $X_i^{(1)}$, $X_i^{(2)}$, $Y_i^{(1)}$, $Y_i^{(2)}$, $M_1(t)$, $M_2(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$, $W(t)$ 相互独立。

称模型(1)为带有投资收益的双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型,其中保费过程、索赔过程均为复合 Poisson-Geometric 过程;模型(2)为具有投资收益的带干扰的双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型。

定义 4[15] 记 $T=\inf\{t\geqslant0, U(t)<0\}$,表示保险公司破产时刻(若对任意的 $t\geqslant0$ 都有 $U(t)\geqslant0$,

则定义 $T=\infty$),则在初始资本为 u 的条件下,定义保险公司最终破产概率为 $\psi(u)=P\{T<\infty \mid U(0)=u\}$ 生存概率为 $\varphi(u)=1-\psi(u)$。

记 $S(t)=\beta t u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)} X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i^{(2)}$ 为模型(1)中的盈利过程,记 $S^*(t)=\beta t u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)} X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i^{(2)}+\sigma W(t)$ 为模型(2)中的盈利过程,为了保证公司的正常运转,须要求期望收入总和大于支出总额。即要求 $E[S(t)]>0$,而

$$\begin{aligned}E[S(t)]&=E\left[\beta t u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)} X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i^{(2)}\right]=\beta t u_1+\\&E[M_1(t)]E[X^{(1)}]+E[M_2(t)]\times E[X^{(2)}]-E[N_1(t)]E[Y^{(1)}]-E[N_2(t)]E[Y^{(2)}]=\Big(\beta u_1+\\&\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]\Big)t>0\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}E[S^*(t)]&=E\left[\beta t u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)} X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i^{(2)}+\sigma W(t)\right]=\beta t u_1+\\&E[M_1(t)]E[X^{(1)}]+E[M_2(t)]\times E[X^{(2)}]-E[N_1(t)]E[Y^{(1)}]-E[N_2(t)]E[Y^{(2)}]=\Big(\beta u_1+\\&\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]\Big)t>0。\end{aligned}$$

因为 $t>0$,所以

$$\beta u_1+\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}\times E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]>0。$$

其中 $X^{(1)}, X^{(2)}, Y^{(1)}, Y^{(2)}$ 分别表示 $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$ 同分布的随机变量,在此可定义安全系数为

$$\theta=\frac{\beta u_1+\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]}{\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]+\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(1)}]}-1,$$

并且 $\theta>0$,当 $\theta\leqslant 0$ 时,一定会发生破产,即 $\psi(u)=1$。

3 主要结论

引理 1　对于模型(1)存在一个函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS(t)}]=e^{g(r)t}$。

证明:令 $M_{X^{(1)}}(r), M_{X^{(2)}}(r), M_{Y^{(1)}}(r), M_{Y^{(2)}}(r)$ 分别表示 $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$ 的矩母函数,则

$$\begin{aligned}E[e^{-rS(t)}]&=E\left[\exp\left\{-r\left[\beta t u_1+\sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)} X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i^{(2)}\right]\right\}\right]=E[e^{-r\beta t u_1}]\times\\&E\left[\exp\left(-r\sum_{i=1}^{M_1(t)} X_i^{(1)}\right)\right]\times E\left[\exp\left(-r\sum_{i=1}^{M_2(t)} X_i^{(2)}\right)\right]\times\\&E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i^{(1)}\right)\right]E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i^{(2)}\right)\right]=\\&\exp\left[-r\beta t u_1+\frac{\lambda_1 t(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3 t(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2 t(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4 t(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}\right]。\end{aligned}$$

令

$$g(r)=-r\beta u_1+\frac{\lambda_1(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}$$

则 $E[e^{-rS(t)}]=e^{g(r)t}$。

引理 2　对于模型(2)存在一个函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS^*(t)}]=e^{g(r)t}$。

证明:同理理论 1 的证明,令

$$g(r)=-r\beta u_1+\frac{\lambda_1(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}+\frac{1}{2}r^2\sigma^2$$

则有 $E[\mathrm{e}^{-rS^*(t)}]=\mathrm{e}^{g(r)t}$。

定义 5　方程 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内的正解 R,称之为调节函数。

定理 1　模型(1)中不存在 R。

证明:由

$$g(r)=-r\beta u_1+\frac{\lambda_1(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)},$$

可得 $g(0)=0,g(+\infty)=-\infty$,

$$g'(r)=-\beta u_1-\frac{\lambda_1 M'_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2}-\frac{\lambda_3 M'_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2}+\frac{\lambda_4 M'_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2},$$

$$g'(0)=-\beta u_1-\frac{\lambda_1 M'_{X^{(1)}}(0)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(0)]^2}-\frac{\lambda_3 M'_{X^{(2)}}(0)(1-\rho_3)}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(0)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_{Y^{(1)}}(0)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(0)]^2}+\frac{\lambda_4 M'_{Y^{(2)}}(0)(1-\rho_4)}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(0)]^2}=-\beta u_1-\frac{\lambda_1 E[X^{(1)}]}{1-\rho_1}-\frac{\lambda_3 E[X^{(2)}]}{1-\rho_3}+\frac{\lambda_2 E[N^{(1)}]}{1-\rho_2}+\frac{\lambda_4 E[N^{(2)}]}{1-\rho_4}<0$$

$$\begin{aligned}g''(r)=&\frac{\lambda_1 M''_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2+2\lambda_1\rho_1(1-\rho_1)[M'_{X^{(1)}}(-r)]^2[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^4}+\\&\frac{\lambda_3 M''_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2+2\lambda_3\rho_3(1-\rho_3)[M'_{X^{(2)}}(-r)]^2[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^4}+\\&\frac{\lambda_2 M''_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2+2\lambda_2\rho_2(1-\rho_2)[M'_{Y^{(1)}}(r)]^2[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^4}+\\&\frac{\lambda_4 M''_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2+2\lambda_4\rho_4(1-\rho_4)[M'_{Y^{(2)}}(r)]^2[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^4}>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(0)=&\frac{\lambda_1 E[(X^{(1)})^2]+2\lambda_1\rho_1[E[X^{(1)}]]^2}{1-\rho_1}+\frac{\lambda_3 E[(X^{(2)})^2]+2\lambda_3\rho_3[E[X^{(2)}]]^2}{1-\rho_3}+\\&\frac{\lambda_2 E[(Y^{(1)})^2]+2\lambda_2\rho_2[E[Y^{(1)}]]^2}{1-\rho_2}+\frac{\lambda_4 E[(Y^{(2)})^2]+2\lambda_4\rho_4[E[Y^{(2)}]]^2}{1-\rho_4}>0。\end{aligned}$$

所以 $g'(r)$在$(0,+\infty)$上是增函数,又 $g'(0)<0$,故 $g(r)$递减,而 $g(0)=0,g(+\infty)<0$,所以 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内无解,即模型(1)不存在调节系数。

定理 2　模型(2)中存在唯一的调节系数 R。

证明:由

$$g(r)=-r\beta u_1+\frac{\lambda_1(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}+\frac{1}{2}r^2\sigma^2,$$

可得 $g(0)=0,g(+\infty)=+\infty$,

$$g'(r)=-\beta u_1-\frac{\lambda_1 M'_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2}-\frac{\lambda_3 M'_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2}+\frac{\lambda_4 M'_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2}+r\sigma^2$$

$$g'(0)=-\beta u_1-\frac{\lambda_1 E[X^{(1)}]}{1-\rho_1}-\frac{\lambda_3 E[X^{(2)}]}{1-\rho_3}+\frac{\lambda_2 E[N^{(1)}]}{1-\rho_2}+\frac{\lambda_4 E[N^{(2)}]}{1-\rho_4}<0,$$

所以

$$g''(r)=\frac{\lambda_1 M''_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2+2\lambda_1\rho_1(1-\rho_1)[M'_{X^{(1)}}(-r)]^2[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^4}+$$

$$\frac{\lambda_3 M''_{X(2)}(-r)(1-\rho_3)[1-\rho_3 M_{X(2)}(-r)]^2+2\lambda_3\rho_3(1-\rho_3)[M'_{X(2)}(-r)]^2[1-\rho_3 M_{X(2)}(-r)]}{[1-\rho_3 M_{X(2)}(-r)]^4}+$$

$$\frac{\lambda_2 M''_{Y(1)}(r)(1-\rho_2)[1-\rho_2 M_{Y(1)}(r)]^2+2\lambda_2\rho_2(1-\rho_2)[M'_{Y(1)}(r)]^2[1-\rho_2 M_{Y(1)}(r)]}{[1-\rho_2 M_{Y(1)}(r)]^4}+$$

$$\frac{\lambda_4 M''_{Y(2)}(r)(1-\rho_4)[1-\rho_4 M_{Y(2)}(r)]^2+2\lambda_4\rho_4(1-\rho_4)[M'_{Y(2)}(r)]^2[1-\rho_4 M_{Y(2)}(r)]}{[1-\rho_4 M_{Y(2)}(r)]^4}+\sigma^2$$

$$g''(0)=\frac{\lambda_1 E[(X^{(1)})^2]+2\lambda_1\rho_1[E[X^{(1)}]]^2}{1-\rho_1}+\frac{\lambda_3 E[(X^{(2)})^2]+2\lambda_3\rho_3[E[X^{(2)}]]^2}{1-\rho_3}+$$
$$\frac{\lambda_2 E[(Y^{(1)})^2]+2\lambda_2\rho_2[E[Y^{(1)}]]^2}{1-\rho_2}+\frac{\lambda_4 E[(Y^{(2)})^2]+2\lambda_4\rho_4[E[Y^{(2)}]]^2}{1-\rho_4}+\sigma^2>0。$$

所以 $g(r)$ 在 $r>0$ 时为严格单调下凸函数,而 $g(0)=0,g(+\infty)>0$,所以 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 上存在唯一的调节系数 R,使得 $g(R)=0$,即模型(2)存在调节系数。

定理 3　风险模型(2)的最终的破产概率为 $\psi(u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-Ru}}{E[\mathrm{e}^{-RU*(T)}\mid T<\infty]}$,($R$ 为调节系数)。

证明:由定理 2 可知,模型(2)有唯一的调节系数 R,使得 $g(R)=0$,即 $E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}]=\mathrm{e}^{-RU*}$。而

$$E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}]=E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T\leqslant t]P(T\leqslant t)+E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t]P(T>t),$$

现只需要证明 $\lim\limits_{t\to\infty}E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t]P(T>t)=0$,定理就得证。

令

$$a=\beta u_1+\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}],$$

$$b^2=\frac{\lambda_1 E[(X^{(1)})^2]}{1-\rho_1}+\frac{2\lambda_1\rho_1[E[X^{(1)}]]^2}{(1-\rho_1)^2}+\frac{\lambda_3 E[(X^{(2)})^2]}{1-\rho_3}+\frac{2\lambda_3\rho_3[E[X^{(2)}]]^2}{(1-\rho_3)^2}+\frac{\lambda_2 E[(Y^{(1)})^2]}{1-\rho_2}+\frac{2\lambda_2\rho_2[E[Y^{(1)}]]^2}{(1-\rho_2)^2}+\frac{\lambda_4 E[(Y^{(2)})^2]}{1-\rho_4}+\frac{2\lambda_4\rho_4[E[Y^{(2)}]]^2}{(1-\rho_4)^2}+\sigma^2。$$

则 $E[U*(t)]=u+at$,$\mathrm{Var}[U*(t)]=b^2t$。考虑函数 $h(t)=E[U*(t)]-bt^{\frac{2}{3}}$,则有 $\lim\limits_{t\to+\infty}h(t)=+\infty$,$\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-rh(t)}=+\infty$。因此,当

$$E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t]=E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t,0\leqslant U*(t)\leqslant h(t)]P(T>t,0<U*(t)<h(t))+E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t,U*(t)>h(t)]\times P(T>t,U*(t)>h(t))\leqslant P(0\leqslant U*(t)\leqslant h(t))+\mathrm{e}^{-Rh(t)}。$$

由切比雪夫不等式有:

$$0\leqslant P(0\leqslant U*(t)\leqslant h(t))\leqslant P(|U*(t)-E[U*(t)]|\geqslant bt^{\frac{2}{3}})\leqslant\frac{\mathrm{Var}[U*(t)]}{(bt^{\frac{2}{3}})^2}=t^{-\frac{1}{3}}。$$

又因为 $E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t]\leqslant t^{-\frac{1}{3}}+\mathrm{e}^{-Rh(t)}$,所以 $\lim\limits_{t\to\infty}E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T>t]=0$,所以可知

$$E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T<\infty]P(T>\infty)=E[\mathrm{e}^{-RU*(t)}\mid T<\infty]\psi(u),$$

所以模型(2)的破产概率为

$$\psi(u)=\frac{\mathrm{e}^{-Ru}}{E[\mathrm{e}^{-RU*(T)}\mid T<\infty]}。$$

即定理得证。

推论 1　模型(2)中,$\{U*(n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 的最终破产概率满足 Lundberg 不等式 $\psi(u)<\mathrm{e}^{-Ru}(u\geqslant 0)$。

证明:当 $T<\infty$ 时,$U(t)<0$,因此 $E[\mathrm{e}^{-RU*(T)}\mid T<\infty]>1$,由定理 3 可知,$\psi(u)<\mathrm{e}^{-Ru}$。

参考文献:

[1] GERBER H U. An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk [J]. Skandinavisk aktuarietidskrift, 1970, 1970(3/4): 205-210.

[2] 廖基定,龚日朝,邹捷中,等. 经典风险模型破产概率及其局部渐近解[J]. 应用数学学报, 2009, 32(2): 354-367.

[3] 毛泽春,刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J]. 应用数学学报, 2005, 28(3): 419-428.

[4] 廖基定,龚日朝,刘再明,等. 复合 Poisson-Geometric

风险模型 Gerber-Shiu 折现惩罚函数[J]. 应用数学学报,2007,30(6):1076-1085.

[5] 廖基定,刘再明,龚日朝. 赔付次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型破产概率上界估计[J]. 南华大学学报(自然科学版),2008,22(3):5-8.

[6] 李学锋,郭仲凯. 常利率下带干扰的复合 Poisson-Geometric 风险模型的期望折现罚金函数[J]. 中南民族大学学报(自然科学版),2018,37(4):157-160.

[7] HUANG Y J,YU W G. Studies on a double Poisson-Geometric insurance risk model with interference [J]. Discrete dynamics in nature and society,2013,2013:1-8.

[8] YAN D Z. Some results on a double compound Poisson-Geometric risk model with interference[J]. Theoretical economics letters,2012,2(1):45-49.

[9] 孙宗岐,陈志平. 复合 Poisson-Geometric 风险下保险公司的最优投资-再保-混合分红策略[J]. 工程数学学报,2016,33(5):463-479.

[10] QIAO K L,HAN J Q. The gerber-shiu discounted penalty function of an improved Poisson-Geometric risk model [J]. Journal of systems science and mathematical sciences,2016,36(10):1743-1752.

[11] 侯致武,高磊. 一类带干扰的复合 Poisson-Geometric 风险模型的生存概率[J]. 沈阳大学学报(自然科学版),2022,34(1):71-76.

[12] 成军祥,杨婷婷. 一种基于 Poisson 过程的双险种 Poisson-Geometric 过程模型研究[J]. 北京电子科技学院学报,2011,19(2):40-45.

[13] 乔克林,李亚,徐佩佩. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的双险种风险模型[J]. 延安大学学报(自然科学版),2018,37(1):27-30.

[14] 王春梅,廖基定. 双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型[J]. 南华大学学报(自然科学版),2011,25(3):68-71.

[15] 赵金娥,王贵红,龙瑶. 理赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型[J]. 西南大学学报(自然科学版),2013,35(3):78-83.