DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2022. 06. 011

一类四阶椭圆型方程解的存在性

阳 晃,陈会文*,李家萌

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:研究了一类四阶椭圆型方程解的存在性,在对非线性项作新的假设条件下,通过山路引理得到了四阶椭圆方程的一个非平凡解的存在性结果。

关键词:四阶椭圆型方程;变分法;山路引理;非平凡解

中图分类号:O175.25 **文献标志码**:A

文章编号:1673-0062(2022)06-0065-07

Existence of Solutions for a Class of Fourth-order Elliptic Equations

YANG Huang, CHEN Huiwen*, LI Jiameng

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of solutions for a class of fourth-order elliptic equations. Under new assumptions on nonlinearity f, the existence of a nontrivial solution of a fourth order elliptic equation is obtained by using critical theorems.

key words: fourth-order elliptic equations; variational methods; mountain pass theorem; nontrivial solutions

0 引 言

考虑下列四阶椭圆型方程:

$$\begin{cases} -\Delta^2 u - \Delta u + V(x)u = f(x,u), x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $V:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, f:\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。

四阶椭圆方程产生于研究悬桥周期振动中的行波问题[1]和研究静态偏转的弹性板问题,大量应用于物理、化学等现象中,因此受到了广泛研究和关注。对于求解高阶椭圆型方程,运用变分法可以巧妙地将寻找方程解的问题化为寻找相应能量泛函临界点的问题。1973 年 A. Ambrosetti 和 P. H. Rabinowitz 提出的山路引理为在变分框架下研究解的存在性及多重性提供了强有力的工具,随后各类四阶椭圆方程解的存在性和多重性等问题便成为学者们的研究热点之一,其中就有许多学者研究了四阶椭圆方程的解(参考文献[1-11])。确切地来说,Y. L. Yin 和 X. Wu(参考文献[4])研究了问题(1),他们利用变分方法得到了下面

收稿日期:2022-07-16

作者简介:阳 晃(1997—),女,硕士研究生,主要从事偏微分方面的研究。E-mail:1149313438@qq.com。*通信作者:陈会文(1986—),男,副教授,博士,主要从事微分方程方面的研究。E-mail:393302567@qq.com

定理。

定理 1　若 f 满足下列条件:

(V) $\inf_{\mathbb{R}^N} V(x)>0$,对任意 $M>0$,有 $meas\{x\in\mathbb{R}^N: V(x)\leqslant M\}<+\infty$,其中 $meas(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的勒贝格测度;

(f_1) $|f(x,t)|\leqslant a(1+|t|^{p-1})\ (x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$,其中 $p\in(2,2^*)$ 且 $a>0$,其中

$$2^*=\begin{cases}\dfrac{2N}{N-4}, & N>4\\ +\infty, & N\leqslant 4\end{cases};$$

(f_2) 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$,$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)}{t}=0$;

(f_3) $a_0:=\inf_{t\in\mathbb{R},|t|=1}F(x,t)>0$;

(f_4) 对所有 $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$,存在 $\mu>2$,使得 $\mu F(x,t)\leqslant f(x,t)t$;

则问题(1)存在一个非平凡解。

定理 2　若 f 满足(V),(f_1)和(f_2)以及下列条件:

(f_5) 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$,存在 $2<\omega<2_*$,使得

$$\lim\inf_{|t|\to\infty}\frac{F(x,t)}{|t|^{\omega}}>0;$$

(f_6) 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$,存在 $\mu>2$ 和 $r>0$,使得 $\mu F(x,t)\leqslant f(x,t)t$,其中 $|t|\geqslant r$;

则问题(1)存在一个非平凡解。

注 1:(f_3)和(f_4)暗示了(f_5)和(f_6),则定理 1 推广了定理 2。

之后有学者引入参数 λ 研究了如下方程

$$\begin{cases}\Delta^2u-\Delta u+\lambda V(x)u=f(x,u), x\in\mathbb{R}^N,\\ u\in H^2(\mathbb{R}^N),\end{cases}$$

例如 J. Liu 和 S. X. Chen 等人在文献[9]中假设 V,$f(x,u)$ 满足类似文献[4]中的假设条件,同样利用变分方法得到了非平凡解的存在及多重性。

随后,Zhang 和 Tang 等人在文献[10]中假设 V 满足下列假设条件:

(V_1) $V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$,$\inf_{\mathbb{R}^N}V(x)>-\infty$;

(V_1') 存在一个常数 $d_0>0$,有

$$\lim_{|y|\to\infty} meas\{x\in\mathbb{R}^N: |x-y|\leqslant d_0, V(x)\leqslant M\}=0, \forall M>0$$

其中 $meas(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的勒贝格测度;

在 $f(x,u)$ 满足一定的假设条件下,同样利用变分原理得到了无穷多个解的存在性。还有学者研究如 $\varepsilon^4\Delta^2u+V(x)u=f(x,u)$,$x\in\mathbb{R}^N$ 这样的四阶椭圆方程解的存在和多重性等等,例如文献[11]。

本文对一类四阶椭圆方程非平凡解的存在性进行了研究,并对 $f(x,u)$ 作新的假设条件,故将使用以下条件:

(V′) $V\in C(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$,$\inf_{\mathbb{R}^N}V(x)>0$ 并且存在一个常数 $d_0>0$,有

$$\lim_{|y|\to\infty} meas\{x\in\mathbb{R}^N: |x-y|\leqslant d_0, V(x)\leqslant M\}=0,\ \forall M>0$$

(f_7) 当 $|t|\to 0$ 时,$f(x,t)=o(|t|)$ 对 $x\in\mathbb{R}^N$ 一致成立,且 $F(x,t):=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s\geqslant 0$;

(f_8) 存在一个域 $G\subset\mathbb{R}^N$,使得

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{|F(x,t)|}{|t|^2}=\infty,$$

关于 a. e. $x\in G$ 一致成立;

(f_9) $\mathcal{F}(x,t):=\dfrac{1}{2}f(x,t)t-F(x,t)\geqslant 0$,并且存在 $c_0>0$,$R_0>0$ 且 $\sigma\in(0,1)$,则

$$\left[\frac{|f(x,t)|}{|t|^{\sigma}}\right]^{\frac{2N}{2N-(1+\sigma)(N-4)}}\leqslant c_0\mathcal{F}(x,t),\quad |t|\geqslant R_0 \text{ 且 } N>4$$

以及对一些 $\kappa\in(1,2/(1-\sigma)]$

$$\left[\frac{|f(x,t)|}{|t|^{\sigma}}\right]^{\kappa}\leqslant c_0\mathcal{F}(x,t),\ |t|\geqslant R_0 \text{ 且 } N\leqslant 4。$$

定理 3　假设满足(V′),(f_1)和(f_7)~(f_9)条件,则问题(1)有一个非平凡解。

注 2:很容易看出,(V′),(f_8)和(f_9)弱于(V),(f_3)和(f_4),其中(f_8)是局部超线性条件,由此建立了一个新的存在性准则。

例 1:当 $N>4$ 且 $F(x,t)=[\sin(2\pi x_1)+|\sin(2\pi x_1)|]t^2\ln(1+t^2)$,则

$$f(x,t)=[\sin(2\pi x_1)+|\sin(2\pi x_1)|]\times\left[2t\ln(1+t^2)+\frac{2t^3}{1+t^2}\right]$$

$$\mathcal{F}(x,t)=\frac{[\sin(2\pi x_1)+|\sin(2\pi x_1)|]t^4}{1+t^2}\geqslant 0$$

很显然,当 $\sigma\in(0,1)$,$G=(1/6,1/2)\times\mathbb{R}^{N-1}$,$f$ 满足(f_7)~(f_9),但不满足(f_4)和(f_6),故不满足定理 1 和定理 2。

1　预备知识

在希尔伯特空间

$$E=\left\{u\in H^2(\mathbb{R}^N)\ \Big|\ \int_{\mathbb{R}^N}(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x<+\infty\right\}$$

其中内积表示为

$$(u,v)_E=\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x$$

相关范数为

$$\|u\|_E=\left\{\int_{\mathbb{R}^N}(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

显然,E 是连续嵌入到 $H^2(\mathbb{R}^N)$,因此在 $s\in[2,2^*]$,连续嵌入到 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 故存在一个常数 γ_s 使得

$$\|u\|_s\leqslant\gamma_s\|u\|,\forall u\in E \tag{2}$$

其中 $\|u\|_s$ 表示在 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 中所有 $s\in[2,2^*]$ 的通常范数。

引理 1　(参考文献[12]) 在假设(V′)条件下,对于 $s\in[2,2^*)$,E 紧嵌入 $L^s(\mathbb{R}^N)$。对每个 $u\in E$,定义

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\Delta u|^2+|\nabla u|^2+V(x)u^2)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x \tag{3}$$

故有下列引理:

引理 2　(参考文献[4]) 如果假设(V′),(f_7)和(f_8)成立,那么 $\Phi\in C^1(E,\mathbb{R})$,且有对任意的 $u,v\in E$ 有

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x \tag{4}$$

此外,$\Psi':E\to E^*$ 是紧性的,E^* 是 E 的对偶空间,其中

$$\Psi(u)=\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x。$$

众所周知,问题(1)是函数 $\Phi:E\to\mathbb{R}$的欧拉-拉格朗日方程,因此 $u\in E$ 是问题(1)的弱解,当且仅当 u 是 Φ 临界点,即对任意的 $v\in E$ 有

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\mathrm{d}x=0$$

引理 3　(参考文献[13])假设 $G\subset\mathbb{R}^N$ 是一个开集,则对所有的闭集 $H\subset G$,存在一个函数 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,使得对所有 $x\in\mathbb{R}^N\backslash G,\phi(x)=0$;对所有 $x\in H,\phi(x)=1$;对所有 $x\in G\backslash H,0\leqslant\phi(x)\leqslant1$。

定义 1　(参考文献[14]) 假设 E 是一个实 Banach 空间,$\varphi\in C^1(E,\mathbb{R})$。如果对任意的$\{u_k\}\subset E$,$\varphi(u_k)$有界,$\varphi'(u_k)\to0(k\to\infty)$蕴含$\{u_k\}$有收敛子序列,则称 φ 满足(PS)条件。

引理 4　(参考文献[15]) 设 E 是一个有限维巴拿赫空间,$\Phi\in C^1(E,\mathbb{R})$,满足(PS)条件。如果 Φ 满足下列条件:

(1)$\Phi(0)=0$;

(2)存在常数 $\rho,\alpha>0$,使得 $\Phi|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$;

(3)存在 $e\in E\backslash\bar{B}_\rho$,使得 $\Phi(e)\leqslant0$;

则 Φ 有一临界值 $c\geqslant\alpha$,且

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}\Phi(g(s))$$

其中

$$\Gamma=\{g\in C([0,1],E):g(0)=0,g(1)=e\}。$$

注记 1　文献[16]的结果表明,从(C)条件下可以得到一个形变引理和一个指标理论,这是得到临界点定理的基础。在文献[15]中,可以证明如果采用(C)条件而不是(PS)条件,就可证明引理 4 仍然成立。故当任意序列$\{u_n\}$满足

$$I(u_n)\to c,\|I'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to0 \tag{5}$$

有一个收敛子序列,则称 $I\in C^1(E,\mathbb{R})$满足(C)条件。

2　定理 3 的证明

显而易见,$\Phi\in C^1(E,\mathbb{R})$,$\Phi(0)=0$,接下来证明定理 3。

设 $A=-\Delta^2-\Delta+V$,其中 A 是一稠密域 $D(A)=H^2(\mathbb{R}^N)$的线性算子,那么 A 在 $L^2(\mathbb{R}^N)$中与域 $D(A)$是自伴的(参考文献[17],定理 4.26)。鉴于唯一延拓定理(参考文献[18]),则有以下引理。

引理 5　满足假设(V′),如果 $A\omega=-\Delta^2\omega-\Delta\omega+V(x)\omega$,且 $\omega|_G=0$,则 $\omega=0$。

引理 6　假设满足(V′),(f_1)和$(f_7)\sim(f_9)$条件,$\{u_n\}\subset E$ 满足 $\Phi(u_n)\to c$,$\|\Phi'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to0,n\to\infty$,则$\{u_n\}$在 E 中有界。

证明:为了证明$\{u_n\}$的有界性,用反证法,假设当 $n\to\infty$ 时,$\|u_n\|\to\infty$。设 $v_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$,显然,$\|v_n\|=1$ 且 $\|v_n\|_s\leqslant\gamma_s\|v_n\|=\gamma_s(2\leqslant s\leqslant2^*)$。当 n 足够大时

$$c+1\geqslant\Phi(u_n)-\frac{1}{2}(\Phi'(u_n),u_n)=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{F}(x,u_n)\mathrm{d}x \tag{6}$$

对 $0\leqslant a<b$,设

$$\Omega_n(a,b)=\{x\in\mathbb{R}^N:a\leqslant|u_n|<b\}$$

通过子序列,可以假设在 E 中 $v_n\rightharpoonup v$,且根据引理

1,当 $s\in[2,2^*)$,在 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n\to v$,且在$\mathbb{R}^N$ 中几乎处处 $v_n\to v(n\to\infty)$。

(1)考虑 $N>4$ 的情况。

情形 1　$v=0$。对于 $s\in[2,2^*)$,在 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n\to 0$,且在$\mathbb{R}^N$ 中几乎处处 $v_n\to 0(n\to\infty)$,结合(f_1)和(f_7),存在正常数 C_1,得

$$\int_{\Omega_n(0,R_0)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n|^2\mathrm{d}x\leqslant C_1\|v_n\|_2^2\to 0(n\to\infty)\tag{7}$$

由 Hölder's 不等式,(f_9)和式(6),存在正常数 C_2,可得

$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^{\sigma+1}\mathrm{d}x\leqslant \frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1-\sigma}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{2^*-1-\sigma}{2^*}}\cdot \|v_n\|_{2^*}^{\sigma+1}\leqslant \frac{C_2}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\mathcal{F}(x,u_n)\mathrm{d}x\right]^{\frac{2^*-1-\sigma}{2^*}}= o(1)\tag{8}$$

结合式(7)和式(8),可得

$$1+o(1)=\frac{\|u_n\|^2-\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle}{\|u_n\|^2}= \frac{1}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)v_n\mathrm{d}x\leqslant \int_{\Omega_n(0,R_0)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n|^2\mathrm{d}x+ \frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^{\sigma+1}\mathrm{d}x= o(1)$$

故矛盾。

情形 2　$v\neq 0$。对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,由式(4)和式(5)可知

$$o(1)=\langle\Phi'(u_n),\|u_n\|\varphi\rangle=\|u_n\|\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u_n\Delta\varphi+\nabla u_n\nabla\varphi+V(x)u_n\varphi)\mathrm{d}x-\|u_n\|\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)\varphi\mathrm{d}x= \|u_n\|^2\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v_n\Delta\varphi+\nabla v_n\nabla\varphi+V(x)v_n\varphi)\mathrm{d}x- \|u_n\|\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)\varphi\mathrm{d}x$$

得到

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v_n\Delta\varphi+\nabla v_n\nabla\varphi+V(x)v_n\varphi)\mathrm{d}x- \frac{1}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)\varphi\mathrm{d}x=o(1)\tag{9}$$

又因为

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)\varphi\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\int_{u_n\neq 0}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^\sigma|\varphi|\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left[\int_{\Omega_n(0,R_0)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^\sigma|\varphi|\mathrm{d}x+\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^\sigma|\varphi|\mathrm{d}x\right]\leqslant$$
$$\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left\{C_3\|v_n\|_2^\sigma\|\varphi\|_{2/(2-\sigma)}+\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}\right)^{\frac{2^*}{2^*-1-\sigma}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{2^*-1-\sigma}{2^*}}\|v_n\|_{2^*}^\sigma\|\varphi\|_{2^*}\right\}\leqslant$$
$$\frac{C_4}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left\{\|\varphi\|_{2/(2-\sigma)}+\|\varphi\|_{2^*}\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\mathcal{F}(x,u_n)\mathrm{d}x\right]^{\frac{2^*-1-\sigma}{2^*}}\right\}\leqslant$$
$$\frac{C_5}{\|u_n\|^{1-\sigma}}[\|\varphi\|_{2/(2-\sigma)}+\|\varphi\|_{2^*}]=o(1)\tag{10}$$

其中 C_3,C_4 和 C_5 为正常数。结合式(9)和式(10)得

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v_n\Delta\varphi+\nabla v_n\nabla\varphi+V(x)v_n\varphi)\mathrm{d}x=o(1)\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\tag{11}$$

因为 $v_n\rightharpoonup v(n\to\infty)$,由式(11)可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v\Delta\varphi+\nabla v\nabla\varphi+V(x)v\varphi)\mathrm{d}x=0\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\tag{12}$$

这表明 $Av=-\Delta^2v-\Delta v+V(x)v=0$。根据引理 5,可知 $v|_G\neq 0$,由(f_7),(f_8)和 Fatou's 引理得

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{c+o(1)}{\|u_n\|^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2}\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}v_n^2\mathrm{d}x\right]\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\int_G\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}v_n^2\mathrm{d}x\right]=-\infty$$

故矛盾。

（2）考虑 $N \leqslant 4$ 的情况。

情形1　$v=0$。对于 $s \in [2,2^*)$，在 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n \to 0$，且在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处 $v_n \to 0(n\to\infty)$，结合(f_1)和(f_7)，存在正常数 C_6，得

$$\int_{\Omega_n(0,R_0)} \frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n|^2 dx \leqslant C_6 \|v_n\|_2^2 \to 0(n\to\infty) \tag{13}$$

根据 Hölder's 不等式，(f_9)和式(6)，对一些 $\kappa \in (1,2/(1-\sigma)]$，取 $\kappa'=\kappa(\sigma+1)/(\kappa-1)$，存在正常数 C_7，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\int_{\Omega_n(R_0,\infty)} \frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^{\sigma+1}dx \leqslant \\ &\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}\right)^\kappa dx\right]^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \\ &\|v_n\|_{\kappa'}^{\sigma+1} \leqslant \frac{C_7}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\mathcal{F}(x,u_n)dx\right]^{\frac{1}{\kappa}} = \\ &o(1)\end{aligned} \tag{14}$$

结合式(13)和式(14)，可得

$$\begin{aligned}1+o(1) &= \frac{\|u_n\|^2 - \langle\Phi'(u_n),u_n\rangle}{\|u_n\|^2} = \\ &\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)v_n dx \leqslant \\ &\int_{\Omega_n(0,R_0)} \frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|}|v_n|^2 dx + \\ &\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\int_{\Omega_n(R_0,\infty)} \frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^{\sigma+1}dx = \\ &o(1)\end{aligned}$$

故矛盾。

情形2　$v \neq 0$。对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，由式(4)和式(5)可知

$$\begin{aligned}o(1) = \langle\Phi'(u_n),\|u_n\|\varphi\rangle &= \|u_n\|\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta u_n \Delta\varphi + \\ &\nabla u_n \nabla\varphi + V(x)u_n\varphi)dx - \\ &\|u_n\|\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\varphi dx = \\ &\|u_n\|^2\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v_n\Delta\varphi + \nabla v_n \nabla\varphi + \\ &V(x)v_n\varphi)dx - \|u_n\|\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\varphi dx\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v_n\Delta\varphi + \nabla v_n\nabla\varphi + V(x)v_n\varphi)dx - \\ &\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\varphi dx = o(1)\end{aligned} \tag{15}$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\varphi dx &\leqslant \frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\int_{u_n\neq 0}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^\sigma|\varphi|dx = \\ &\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left[\int_{\Omega_n(0,R_0)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^\sigma|\varphi|dx + \int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}|v_n|^\sigma|\varphi|dx\right] \leqslant \\ &\frac{1}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left\{C_8\|v_n\|_2^\sigma\|\varphi\|_{2/(2-\sigma)} + \left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|u_n|^\sigma}\right)^\kappa dx\right]^{\frac{1}{\kappa}}\|v_n\|_{\kappa'}^\sigma\|\varphi\|_{\kappa'}\right\} \leqslant \\ &\frac{C_9}{\|u_n\|^{1-\sigma}}\left\{\|\varphi\|_{2/(2-\sigma)} + \|\varphi\|_{\kappa'}\left[\int_{\Omega_n(R_0,\infty)}\mathcal{F}(x,u_n)dx\right]^{\frac{1}{\kappa}}\right\} \leqslant \\ &\frac{C_{10}}{\|u_n\|^{1-\sigma}}[\|\varphi\|_{2/(2-\sigma)} + \|\varphi\|_{\kappa'}] = o(1)\end{aligned} \tag{16}$$

其中 C_8，C_9 和 C_{10} 为正常数。结合式(15)和式(16)得

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v_n\Delta\varphi + \nabla v_n\nabla\varphi + V(x)v_n\varphi)dx = o(1) \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{17}$$

因为 $v_n \rightharpoonup v(n\to\infty)$，由式(17)可知

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\Delta v\Delta\varphi + \nabla v\nabla\varphi + V(x)v\varphi)dx = 0 \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{18}$$

这表明 $Av=-\Delta^2 v-\Delta v+V(x)v=0$。根据引理5，可知 $v|_G \neq 0$，由(f_7)，(f_8)和 Fatou's 引理得

$$\begin{aligned}0 = \lim_{n\to\infty}\frac{c+o(1)}{\|u_n\|^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2} \leqslant \\ &\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}v_n^2 dx\right] \leqslant \\ &\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \int_G \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}v_n^2 dx\right] = -\infty\end{aligned}$$

故矛盾。综上所述，所以$\{u_n\}$在 E 中有界。

引理7　如果 $u_n \subset E$ 满足 $\Phi'(u_n)\to 0$，且是

有界序列,则 $u_n \subset E$ 有收敛子序列。

证明:由引理 2 可知,$\{u_n\}$ 有一个 $\{u_{n_j}\}$ 子序列,且取点 $u \in E$,使得 $\|\Psi'(u_{n_j})-\Psi'(u)\|_{E^*}\to 0$,其中 $n_j\to\infty$,因此

$$\begin{aligned}\|u_{n_j}-u_{n_i}\|_E^2 &= \langle \Phi'(u_{n_j})-\Phi'(u_{n_i}),u_{n_j}-u_{n_i}\rangle - \\ &\langle \Psi'(u_{n_j})-\Psi'(u_{n_i}),u_{n_j}-u_{n_i}\rangle \leqslant \\ &(\|\Phi'(u_{n_j})\|_{E^*}+\|\Phi'(u_i)\|_{E^*})\times \\ &\|u_{n_j}-u_{n_i}\|_E + \|\Psi'(u_{n_j}) - \\ &\Psi'(u_{n_i})\|_{E^*}\|u_{n_j}-u_{n_i}\|_E \to 0, \\ &(i\to\infty, j\to\infty)\end{aligned}$$

这就说明了 $\{u_{n_j}\}$ 是 E 中的柯西序列,由于 E 的完备性,可知 $\{u_{n_j}\}$ 在 E 中有收敛序列。

引理 8 在满足假设(V′),(f_1)和(f_7)下,存在常数 $\rho,\alpha>0$,使得 $\Phi|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$。

证明:由(f_1)和(f_7),可知对于 $0<\varepsilon<\frac{1}{\gamma_2^2}$,存在常数 $C(\varepsilon)>0$,使得

$$|f(x,t)|\leqslant\varepsilon|t|+C(\varepsilon)|t|^{p-1},\quad \forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$$

且

$$|F(x,t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|t|^2+\frac{C(\varepsilon)}{p}|t|^p,\quad \forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \tag{19}$$

由(V′),式(2),式(3)和式(19)可知,得

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2 - \\ &\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2-\frac{C(\varepsilon)}{p}\|u\|_p^p\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2 - \\ &\frac{\varepsilon}{2}\gamma_2^2\|u\|^2-\frac{C(\varepsilon)}{p}\gamma_p^p\|u\|^p = \\ &\frac{1}{2}(1-\varepsilon\gamma_2^2)\|u\|^2-\frac{C(\varepsilon)}{p}\gamma_p^p\|u\|^p\end{aligned}$$

由于 $1-\varepsilon\gamma_2^2>0$ 且 $p>2$,则存在常数 $\rho,\alpha>0$,当 $\|u\|=\rho$ 时,使得 $\Phi(u)\geqslant\alpha$。故证毕。

引理 9 满足假设(V′)和(f_8)下,存在 $e\in E\backslash\bar{B}_\rho$,使得 $\Phi(e)\leqslant 0$。

证明:由(f_8)可知,对任意的 $k_1>0$,存在 $T_1>0$,使得

$$F(x,u)\geqslant k_1|u|^2,\ \forall x\in G,\ |u|\geqslant T_1 \tag{20}$$

对任意 $\zeta>0$,存在一个闭集 G_1 和一个开集 G_2,使得 $G_1\subset G\subset G_2$,且

$$meas(G_1)>0,\ meas(G_2\backslash G_1)<\zeta,\quad meas(G\backslash G_1)<\zeta \tag{21}$$

由引理 3 可知,存在一个函数 $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$,使得对所有 $x\in\mathbb{R}^N\backslash G_2$,$\phi(x)=0$;对所有 $x\in G_1$,$\phi(x)=1$;对所有 $x\in G_2\backslash G_1$,$0\leqslant\phi(x)\leqslant 1$。因此 $\phi\in E$。设 $e(x)=\bar{\delta}\phi(x)$,$\zeta=1/(\bar{\delta}^p)$,其中 $\bar{\delta}>0$。令 $\bar{M}=\sup\limits_{x\in G_1}V(x)$,由式(3),式(19)和式(21)可得

$$\begin{aligned}\Phi(e) &= \frac{1}{2}\|e\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,e)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\|e\|^2-\int_{G_1}F(x,e)\mathrm{d}x-\int_{G_2\backslash G_1}F(x,e)\mathrm{d}x\leqslant \\ &\frac{1}{2}\left[\int_{G_2\backslash G_1}(|\Delta e|^2+|\nabla e|^2+V(x)e^2)\mathrm{d}x+\int_{G_1}(|\Delta e|^2+|\nabla e|^2+V(x)e^2)\mathrm{d}x\right]- \\ &\int_{G_1}k_1|e|^2\mathrm{d}x+\int_{G_2\backslash G_1}(\frac{\varepsilon}{2}|e|^2+\frac{C(\varepsilon)}{p}|e|^p)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{G_2\backslash G_1}(|\Delta e|^2+|\nabla e|^2+V(x)e^2)\mathrm{d}x+ \\ &\frac{1}{2}\bar{\delta}^2\int_{G_1}V(x)\mathrm{d}x-\int_{G_1}k_1|e|^2\mathrm{d}x+\int_{G_2\backslash G_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}|e|^2+\frac{C(\varepsilon)}{p}|e|^p\right)\mathrm{d}x\leqslant \\ &\frac{1}{2}\int_{G_2\backslash G_1}(|\Delta e|^2+|\nabla e|^2+V(x)e^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\bar{\delta}^2\bar{M}-k_1\bar{\delta}^2 meas(G_1)+ \\ &\int_{G_2\backslash G_1}(\frac{\varepsilon}{2}|e|^2+\frac{C(\varepsilon)}{p}|e|^p)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{G_2\backslash G_1}(|\Delta e|^2+|\nabla e|^2+V(x)e^2)\mathrm{d}x+ \\ &\left[\frac{1}{2}\bar{M}-k_1 meas(G_1)\right]\bar{\delta}^2+\int_{G_2\backslash G_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}|e|^2+\frac{C(\varepsilon)}{p}|e|^p\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

选取 k_1 足够大的时候,则

$$\frac{1}{2}\bar{M}-k_1 meas(G_1)<0$$

然后当 k_1 不变时,可以选择一个足够大的 $\bar{\delta}$,使得 $\|e\|>\rho$ 且 $\Phi(e)\leqslant 0$。

定理 3 的证明:由引理 6 ~ 引理 9 可知,Φ 满足引理 4 的所有条件,则 Φ 有一临界值 $c\geqslant\alpha$,且

$$c=\inf_{g\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]}\Phi(g(s))$$

其中 $\Gamma=\{g\in C([0,1],E):g(0)=0,g(1)=e\}$

因此,存在 $u^*\in E$,使得

$$\Phi(u^*) = c \text{ 且 } \Phi'(u^*) = 0$$

则 u^* 是问题(1)的解。

参考文献:

[1] LAZER A C,MCKENNA P J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges:Some new connections with nonlinear analysis[J]. SIAM review,1999,32(4):537-578.

[2] 吉蕾. 一类四阶椭圆型方程解的存在性和多重性[D]. 重庆:西南大学,2008:5-25.

[3] 燕艳菊,池自英,张延凤. 一类非线性四阶椭圆方程解的唯一性[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版),2013,13(2):38-40.

[4] YIN Y L,WU X. High energy solutions and nontrivial solutions for fourth-order elliptic equations[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2010,375(2):699-705.

[5] 高小丽. 四阶椭圆方程解的存在性和多解性[D]. 太原:山西大学,2012:3-19.

[6] 陈玉松,李晨. 一类四阶椭圆方程的无穷多个解的存在性[J]. 河南教育学院学报(自然科学版),2020,29(1):12-15.

[7] 张粘,贾高. 一类带有非局部项的四阶椭圆方程无穷多高能量解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版),2019,54(6):81-87.

[8] YE Y W,TANG C L. Existence and multiplicity of solutions for fourth-order elliptic equations in R^N[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2013,406(1):335-351.

[9] LIU J,CHEN S X,WU X. Existence and multiplicity of solutions for a class of fourth-order elliptic equations in R^N[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2012,395(2):608-615.

[10] ZHANG W,TANG X H,ZHANG J. Infinitely many solutions for fourth-order elliptic equations with sign-changing potential[J]. Taiwanese journal of mathematics,2014,18(2):645-659.

[11] PIMENTA M,SOARES S. Existence and concentration of solutions for a class of biharmonic equations[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2012,390(1):274-289.

[12] BARTSCH T,WANG Z Q,WILLEM M. The Dirichlet problem for superlinear elliptic equations[M]. Chapter 1. In Handbook of Differential Equations-Stationary Partial Differential Equations. Elsevier:Amsterdam,2005:1-55.

[13] LV Y. Existence and multiplicity of solutions for a class of sublinear Schrödinger-Maxwell equations[J]. Boundary value problems,2013(1):1-22.

[14] MAWHIN J,WILLEM M. Criticalpoint theory and Hamiltonian systems[M]. Berlin:Springer-Verlag,1989:1-50.

[15] RABINOWITZ P. Minimax methods in critical piont theory with applications to differential equations[M]. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Providence. Rhode Island:the American Mathematical Society,1986:7-18.

[16] BARTOLO P,BENCI V,FORTUNATO D. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with resonance at infifinity[J]. Nonlinear analysis:Theory,methods & applications,1983,7(9):981-1012.

[17] EGOROV Y,KONDRATIEV V. On spectral theory of elliptic operators[M]. Basel:Birkhäuser,1996:133-151.

[18] SCHECHTER M,SIMON B. Unique continuation for Schrodinger operators with unbounded potentials[J]. Jouranl of mathematical analysis and applications,1980,77(2):482-492.