

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2022.06.010

具有双时滞的分数阶 BAM 神经网络模型的动力学行为

李冰冰, 廖茂新*, 李伟南

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘要: 本文研究了一类具有双时滞的五神经元分数阶 BAM 神经网络模型的动力学行为。通过将时滞之和作为参数, 利用分数阶微分方程稳定性理论和分支理论, 得到了系统零平衡点稳定性和产生 Hopf 分支的充分条件, 并通过仿真模拟, 验证了理论分析的正确性。

关键词: 分数阶 BAM 神经网络模型; 时滞; 稳定性; Hopf 分支

中图分类号: O175 **文献标志码:** A

文章编号: 1673-0062(2022)06-0058-07

Dynamic Behavior of the Fractional Order BAM Neural Network Model with Two Delays

LI Bingbing, LIAO Maoxin*, LI Weinan

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper studied the dynamic behavior of a class of five-neuron fractional order BAM neural networks with double delays. By taking the sum of time delays as parameters and using fractional differential equation stability theory and bifurcation theory, the sufficient conditions of zero-equilibrium stability and Hopf bifurcation of the system are obtained, and the correctness of theoretical analysis is verified by simulation.

key words: fractional BAM neural network model; delay; stability; Hopf bifurcation

0 引言

近几十年, 双向联想记忆(bidirectional associative memory, BAM)神经网络具有自学习、自组织

和自适应性及大规模并行处理等优点, 其在优化求解、智能控制和模式识别等方面均有广泛的应用。关于神经网络的研究最早可追溯到 20 世纪 40 年代, 但直到 20 世纪 80 年代神经网络才开始

收稿日期: 2022-08-10

基金项目: 湖南省自然科学基金项目(2020JJ4516); 湖南省学位与研究生教学改革研究项目(2019JGYB192); 湖南省研究生科研创新项目(CX20220980)

作者简介: 李冰冰(1997—), 女, 硕士研究生, 主要从事微分方程方面的研究。E-mail: 1697875782@qq.com。* 通信作者: 廖茂新(1969—), 男, 教授, 博士, 主要从事微分方程方面的研究。E-mail: 841139745@qq.com

受到国际上学者的重视从而得到稳步发展。1984 年 J. J. Hopfield 建立简化的神经网络模型^[1]和 1989 年 C. M. Marcus 提出具延迟的神经网络模型^[2],之后为了有效地掌握延迟神经网络模型的内在规律,许多学者开始研究神经网络的动力学行为^[3-7]。文献[8-9]均研究了具有五个神经元的整数阶 BAM 神经网络模型,并以时滞之和作为参数给出了系统平衡点稳定性和产生 Hopf 分支的充分判据。

由于分数阶时滞微分系统相对整数阶可以更加准确地描述系统的动态行为,其被广泛应用在控制系统、复杂网络、金融系统等领域,目前学者们关于分数阶微分动力系统的研究也取得了大量成果(如文献[10-16]等)。常用的分数阶导数定义有 Riemann-Liouville 导数、Caputo 导数和 Grunwald-Letnikov 导数。考虑到 Caputo 导数更易选取初值,本文采用 Caputo 型分数阶导数进行计算。为得到本文的主要结果,现给出如下定义与引理。

定义 1 Caputo 型分数阶导数^[17]定义为

$${}_a^C D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{q+1-n}},$$

其中 $n-1 < q < n$, $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数。

Caputo 分数阶导数的拉普拉斯变换形式为

$$L\{D^q f(t); s\} = s^q F(s) - \sum_{l=0}^{n-1} s^{q-l-1} f^{(l)}(0),$$

$$n-1 < q < n \in \mathbb{Z}^+.$$

若 $f^{(l)}(0) = 0, l = 1, 2, \dots, n$, 则 $L\{D^q f(t); s\} = s^q F(s)$ 。

引理 1^[18] 考虑具有多个状态变量的分数阶线性系统

$$\begin{cases} D^q y_1(t) = \bar{I}_{11} y_1(t) + \bar{I}_{12} y_2(t) + \dots + \bar{I}_{1n} y_n(t), \\ D^q y_2(t) = \bar{I}_{21} y_1(t) + \bar{I}_{22} y_2(t) + \dots + \bar{I}_{2n} y_n(t), \\ \dots\dots \\ D^q y_n(t) = \bar{I}_{n1} y_1(t) + \bar{I}_{n2} y_2(t) + \dots + \bar{I}_{nn} y_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $q \in (0, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。系统(2)的特征方程 $\Delta(s)$ 如下

$$\Delta(s) = \begin{bmatrix} s^q - \bar{I}_{11} & \bar{I}_{12} & \dots & \bar{I}_{1n} \\ \bar{I}_{21} & s^q - \bar{I}_{22} & \dots & \bar{I}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{I}_{n1} & \bar{I}_{n2} & \dots & s^q - \bar{I}_{nn} \end{bmatrix},$$

若方程 $\det(\Delta(s)) = 0$ 的所有根 s 的实部均为负值, 则系统(1)的零解是 Lyapunov 全局渐近稳定的。

基于以上思想,本文建立如下具有双时滞的分数阶 BAM 神经网络模型。

$$\begin{cases} D^q y_1(t) = -\alpha_1 y_1(t) + m_{21} f_1(y_2(t - \tau_2)) + \\ \quad m_{31} f_1(y_3(t - \tau_2)) + m_{41} f_1(y_4(t - \tau_2)) + \\ \quad m_{51} f_1(y_5(t - \tau_2)), \\ D^q y_2(t) = -\alpha_2 y_2(t) + m_{12} f_2(y_1(t - \tau_1)), \\ D^q y_3(t) = -\alpha_3 y_3(t) + m_{13} f_3(y_1(t - \tau_1)), \\ D^q y_4(t) = -\alpha_4 y_4(t) + m_{14} f_4(y_1(t - \tau_1)), \\ D^q y_5(t) = -\alpha_5 y_5(t) + m_{15} f_5(y_1(t - \tau_1)). \end{cases} \quad (2)$$

在模型(2)中, D^q 表示 Caputo 型导数且满足 $0 < q \leq 1$, m_{ij}, m_{il} ($i = 2, 3, 4, 5; j = 2, 3, 4, 5$) 表示 I 层神经元与 J 层神经元之间的连接权值。 α_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 表示神经元内部的衰减速率, f_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 为激励函数负责不同层神经元间的输入输出, τ_1 为 I 层神经元到 J 层神经元的传输延迟, τ_2 为 J 层神经元到 I 层神经元的传输延迟。

为得到本文主要结果,现给出假设:

(H1) $f_i \in C^1, f_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, 5$ 。

本文分为三个部分。在第 1 节中,通过分析分数阶系统(2)的线性化形式的特征方程,讨论了系统平衡点渐进稳定性和产生 Hopf 分支的条件。在第 2 节,通过一个实例进行仿真模拟,验证了理论结果的正确性。最后,在第 3 节给出主要结论。

1 模型的动力学分析

现作如下变换

$$\begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2, \\ u_1(t) = y_1(t - \tau_1), \\ u_2(t) = y_2(t), \\ u_3(t) = y_3(t), \\ u_4(t) = y_4(t), \\ u_5(t) = y_5(t). \end{cases}$$

从而得到系统(2)的等价形式为

$$\begin{cases} D^q u_1(t) = -\alpha_1 u_1(t) + m_{21} f_1(u_2(t - \tau)) + \\ \quad m_{31} f_1(u_3(t - \tau)) + m_{41} f_1(u_4(t - \tau)) + \\ \quad m_{51} f_1(u_5(t - \tau)), \\ D^q u_2(t) = -\alpha_2 u_2(t) + m_{12} f_2(u_1(t)), \\ D^q u_3(t) = -\alpha_3 u_3(t) + m_{13} f_3(u_1(t)), \\ D^q u_4(t) = -\alpha_4 u_4(t) + m_{14} f_4(u_1(t)), \\ D^q u_5(t) = -\alpha_5 u_5(t) + m_{15} f_5(u_1(t)). \end{cases} \quad (3)$$

由(H1)可知,系统(3)的零点是其平衡点。
且求得系统(3)的线性化形式如下

$$\begin{cases} D^q u_1(t) = -\alpha_1 u_1(t) + a_{21} u_2(t - \tau) + \\ \quad a_{31} u_3(t - \tau) + a_{41} u_4(t - \tau) + \\ \quad a_{51} u_5(t - \tau), \\ D^q u_2(t) = -\alpha_2 u_2(t) + a_{12} u_1(t), \\ D^q u_3(t) = -\alpha_3 u_3(t) + a_{13} u_1(t), \\ D^q u_4(t) = -\alpha_4 u_4(t) + a_{14} u_1(t), \\ D^q u_5(t) = -\alpha_5 u_5(t) + a_{15} u_1(t), \end{cases} \quad (4)$$

式中 $a_{il} = m_{il} f'_i(0)$, $a_{lj} = m_{lj} f'_j(0)$, $i, j = 2, 3, 4, 5$ 。

分数阶系统(4)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda^q + \alpha_1 & -a_{21}e^{-\lambda\tau} & -a_{31}e^{-\lambda\tau} & -a_{41}e^{-\lambda\tau} & -a_{51}e^{-\lambda\tau} \\ -a_{12} & \lambda^q + \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{13} & 0 & \lambda^q + \alpha_3 & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & \lambda^q + \alpha_4 & 0 \\ -a_{15} & 0 & 0 & 0 & \lambda^q + \alpha_5 \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^{5q} + c_4 \lambda^{4q} + c_3 \lambda^{3q} + c_2 \lambda^{2q} + c_1 \lambda^q + c_0 + (d_3 \lambda^{3q} + d_2 \lambda^{2q} + d_1 \lambda^q + d_0) e^{-\lambda\tau} = 0, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} c_4 &= \sum_{i=1}^5 \alpha_i, \\ c_3 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^5 \alpha_i \alpha_j, \\ c_2 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^5 \sum_{\substack{k=1 \\ k>j}}^5 \alpha_i \alpha_j \alpha_k, \\ c_1 &= \sum_{i=1}^5 \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^5 \sum_{\substack{k=1 \\ k>j}}^5 \sum_{\substack{l=1 \\ l>k}}^5 \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l, \\ c_0 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5, \\ d_3 &= -\sum_{i=2}^5 a_{i1} a_{1i}, \\ d_2 &= -\sum_{i=2}^5 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^5 a_{i1} a_{1i} \alpha_j, \\ d_1 &= -\sum_{i=2}^5 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^5 \sum_{\substack{k=2 \\ k>j}}^5 a_{i1} a_{1i} \alpha_j \alpha_k, \\ d_0 &= -\sum_{i=2}^5 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^5 \sum_{\substack{k=2 \\ k>j}}^5 \sum_{\substack{l=2 \\ l>k}}^5 a_{i1} a_{1i} \alpha_j \alpha_k \alpha_l. \end{aligned}$$

1.1 平衡点的稳定性

下面讨论分数阶系统(3)在平衡点处的稳定性。为后续工作进行顺利,给出如下假设:

$$(H2) \begin{cases} k_0 = c_4 > 0, \\ k_1 = c_0 + d_0 > 0, \\ k_2 = c_4(c_3 + d_3) - (c_2 + d_2) > 0, \\ k_3 = c_4((c_0 + d_0) - c_4(c_1 + d_1)) + \\ \quad (c_2 + d_2)(c_4(c_3 + d_3) - (c_2 + d_2)) > 0, \\ k_4 = ((c_1 + d_1)(c_2 + d_2) - (c_0 + d_0) \times \\ \quad (c_3 + d_3))(c_4(c_3 + d_3) - (c_2 + d_2)) - \\ \quad ((c_0 + d_0) - c_4(c_1 + d_1))^2 > 0. \end{cases}$$

当 $\tau=0$ 时,方程(5)变为

$$\lambda^{5q} + c_4 \lambda^{4q} + (c_3 + d_3) \lambda^{3q} + (c_2 + d_2) \lambda^{2q} + (c_1 + d_1) \lambda^q + (c_0 + d_0) = 0. \quad (6)$$

取 $s = \lambda^q$, 则方程(6)变为关于 s 的一元五次方程,即

$$s^5 + c_4 s^4 + (c_3 + d_3) s^3 + (c_2 + d_2) s^2 + (c_1 + d_1) s + (c_0 + d_0) = 0. \quad (7)$$

因为

$$\Delta_1 = c_4 = k_0 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_4 & 1 \\ c_2 + d_2 & c_3 + d_3 \end{vmatrix} = k_2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_4 & 1 & 0 \\ c_2 + d_2 & c_3 + d_3 & c_4 \\ c_0 + d_0 & c_1 + d_1 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} = k_3 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} c_4 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 + d_2 & c_3 + d_3 & c_4 & 1 \\ c_0 + d_0 & c_1 + d_1 + e_1 & c_2 + d_2 & c_3 + d_3 \\ 0 & 0 & c_0 + d_0 & c_1 + d_1 \end{vmatrix} = k_4 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} c_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 + d_2 & c_3 + d_3 & c_4 & 1 & 0 \\ c_0 + d_0 & c_1 + d_1 & c_2 + d_2 & c_3 + d_3 & c_4 \\ 0 & 0 & c_0 + d_0 & c_1 + d_1 & c_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 + d_0 \end{vmatrix} = k_1 \Delta_4 > 0.$$

由Routh-Hurwitz 准则知方程(7)的所有根均具有严格负实部。则由 $s = \lambda^q$ 可知 $|\arg \lambda| =$

$|\arg(s^{\frac{1}{q}})| > \frac{\pi}{2q} > \frac{\pi}{2} (q \in (0, 1))$ 。即特征方程(6)

的所有根的实部均小于零,由引理1知,系统(3)的零平衡点是渐进稳定的。

1.2 模型 Hopf 分支的存在性

接下来研究当时滞 $\tau > 0$ 时对分数阶系统(3)

零平衡点的稳定性与周期解存在性的影响。

为后续工作顺利进行,现给出如下假设

(H3) 方程(14)至少存在一个正实数根。

引理2 若假设(H3)成立,则特征方程(5)至少存在一对纯虚根。

证明:若方程(5)存在纯虚根,不妨将 $\lambda = iw$ 代入式中,则有

$$\begin{aligned} & w^{5q} \left(\cos \frac{5q\pi}{2} + i \sin \frac{5q\pi}{2} \right) + c_4 w^{4q} (\cos 2q\pi + \\ & i \sin 2q\pi) + c_3 w^{3q} \cos \frac{3q\pi}{2} + i c_3 w^{3q} \sin \frac{3q\pi}{2} + \\ & c_2 w^{2q} (\cos q\pi + i \sin q\pi) + c_1 w^q \left(\cos \frac{q\pi}{2} + \right. \\ & \left. i \sin \frac{q\pi}{2} \right) + c_0 + \left(d_3 w^{3q} \left(\cos \frac{3q\pi}{2} + i \sin \frac{3q\pi}{2} \right) + \right. \\ & \left. d_2 w^{2q} (\cos q\pi + i \sin q\pi) + d_1 w^q \left(\cos \frac{q\pi}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. i \sin \frac{q\pi}{2} \right) + d_0 \right) (\cos w\tau - i \sin w\tau) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

将式(8)实部与虚部分离,则可得如下方程

$$E_1 \cos w\tau - E_2 \sin w\tau = -E_3, \quad (9)$$

$$E_1 \sin w\tau + E_2 \cos w\tau = -E_4, \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 &= d_3 w^{3q} \sin \frac{3q\pi}{2} + d_2 w^{2q} \sin q\pi + d_1 w^q \sin \frac{q\pi}{2}, \\ E_2 &= d_3 w^{3q} \cos \frac{3q\pi}{2} + d_2 w^{2q} \cos q\pi + d_1 w^q \cos \frac{q\pi}{2} + d_0, \\ E_3 &= w^{5q} \sin \frac{5q\pi}{2} + c_4 w^{4q} \sin 2q\pi + c_3 w^{3q} \sin \frac{3q\pi}{2} + \\ & c_2 w^{2q} \sin q\pi + c_1 w^q \sin \frac{q\pi}{2}, \\ E_4 &= w^{5q} \cos \frac{5q\pi}{2} + c_4 w^{4q} \cos 2q\pi + c_3 w^{3q} \cos \frac{3q\pi}{2} + \\ & c_2 w^{2q} \cos q\pi + c_1 w^q \cos \frac{q\pi}{2} + c_0. \end{aligned}$$

由方程(9)和方程(10)计算得到

$$\cos w\tau = \frac{-E_1 E_3 - E_2 E_4}{E_1^2 + E_2^2}, \quad (11)$$

$$\sin w\tau = \frac{E_2 E_3 - E_1 E_4}{E_1^2 + E_2^2}, \quad (12)$$

且将方程(9)与方程(10)两边同时平方再相加求得

$$E_1^2 + E_2^2 - E_3^2 - E_4^2 = 0. \quad (13)$$

则可以得到关于 w 的方程如下

$$\begin{aligned} & \lambda^{10q} + e_9 \lambda^{9q} + e_8 \lambda^{8q} + e_7 \lambda^{7q} + e_6 \lambda^{6q} + e_5 \lambda^{5q} + \\ & e_4 \lambda^{4q} + e_3 \lambda^{3q} + e_2 \lambda^{2q} + e_1 \lambda^q + e_0 = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} e_9 &= 2c_4 \cos \frac{q\pi}{2}, \\ e_8 &= c_4^2 + 2c_3 \cos q\pi, \\ e_7 &= 2c_2 \cos \frac{3q\pi}{2} + 2c_3 c_4 \cos \frac{q\pi}{2}, \\ e_6 &= c_3^2 - d_3^2 + 2c_2 c_4 \cos \frac{q\pi}{2} + 2c_1 \cos 2q\pi, \\ e_5 &= 2c_0 \cos \frac{5q\pi}{2} + 2c_1 c_4 \cos \frac{3q\pi}{2} + 2c_2 c_3 \cos \frac{q\pi}{2} - \\ & 2d_2 d_3 \cos \frac{q\pi}{2}, \\ e_4 &= c_2^2 - d_2^2 + 2c_0 c_4 \cos 2q\pi + 2c_1 c_3 \cos q\pi - \\ & 2d_1 d_3 \cos q\pi, \\ e_3 &= 2c_0 c_3 \cos \frac{3q\pi}{2} - 2d_0 d_3 \cos \frac{3q\pi}{2} + 2c_1 c_2 \cos \frac{q\pi}{2} - \\ & 2d_1 d_2 \cos \frac{q\pi}{2}, \\ e_2 &= c_1^2 - d_1^2 + 2c_0 c_2 \cos q\pi - 2d_0 d_2 \cos q\pi, \\ e_1 &= 2c_0 c_1 \cos \frac{q\pi}{2} - 2d_0 d_1 \cos \frac{q\pi}{2}, \\ e_0 &= c_0^2 - d_0^2. \end{aligned}$$

则由(H3)知,方程(14)存在有正实数根。不妨设方程(14)有 N 个实根并记为 $w_k, k=1, 2, \dots, N$ 。将 w_k 代入方程(11)中,则有

$$\begin{aligned} \tau_k^{(j)} &= \frac{1}{w_k} \arccos \left(\frac{-E_1 E_3 - E_2 E_4}{E_1^2 + E_2^2} + 2j\pi \right), \\ & (k=1, 2, \dots, N; j=0, 1, 2, \dots). \quad (15) \end{aligned}$$

此时 $\pm w_k$ 是方程(5)的一对纯虚根。即特征方程(5)至少存在一对纯虚根。证毕。

现定义 $\tau_0 = \min_{k=1, 2, \dots, N} \tau_k^{(0)}$, 且 w_0 为方程(5)对应 τ_0 的根。并对方程(17)中 K_1, K_2, L_1, L_2 作如下假设

$$(H4) \quad \frac{K_1 L_1 + K_2 L_2}{L_1^2 + L_2^2} \neq 0.$$

引理3 若假设(H4)成立,则系统(3)横截性条件满足。

证明:设 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + iw(\tau)$ 是方程(5)在 $\tau = \tau_0$ 附近使得 $\alpha(\tau_0) = 0, w(\tau_0) = w_0$ 的根,下面求横截性条件。对方程(5)关于 τ 求导,可得

$$\begin{aligned} & (5q\lambda^{5q-1} + 4qc_4\lambda^{4q-1} + 3qc_3\lambda^{3q-1} + 2qc_2\lambda^{2q-1} + \\ & qc_1\lambda^{q-1}) \frac{d\lambda}{d\tau} + (3qd_3\lambda^{3q-1} + 2qd_2\lambda^{2q-1} + \\ & qd_1\lambda^{q-1}) e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} - (d_3\lambda^{3q} + d_2\lambda^{2q} + d_1\lambda^q + d_0) \times \\ & \left(\tau e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda e^{-\lambda\tau} \right) = 0, \quad (16) \end{aligned}$$

即
$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{K(\lambda)}{L(\lambda)},$$

其中

$$K(\lambda) = (5q - 2\tau)e^{\lambda\tau}\lambda^{5q-1} + (4qc_4 - 2\tau c_4)e^{\lambda\tau}\lambda^{4q-1} + ((3qc_3 - 2\tau c_3)e^{\lambda\tau} + (3qd_3 + d_3\tau))\lambda^{3q-1} + ((2qc_2 - 2\tau c_2)e^{\lambda\tau} + (2qd_2 + d_2\tau))\lambda^{2q-1} + ((qc_1 - 2\tau c_1)e^{\lambda\tau} + (qd_1 + d_1\tau))\lambda^{q-1} + (d_0\tau - 2\tau c_0)e^{\lambda\tau},$$

$$L(\lambda) = (d_3\lambda^{3q} + d_2\lambda^{2q} + d_1\lambda^q + d_0)\lambda.$$

现定义实数 K_1, K_2, L_1 与 L_2 如下

$$\begin{aligned} K(iw) &= K_1 + iK_2, \\ L(iw) &= L_1 + iL_2, \end{aligned} \quad (17)$$

即 K_1, L_1 与 K_2, L_2 分别表示 $K(\lambda)$ 与 $L(\lambda)$ 在 $\tau = \tau_0$ (此时 $\lambda = iw_0$) 处的实部与虚部。

则由假设(H4)可得到

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\bigg|_{\tau=\tau_0} = \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{L_1^2 + L_2^2} \neq 0. \quad (18)$$

即横截性条件满足。证毕。

由1.1节及引理2与引理3可以得到如下定理。

定理1 若假设(H1)~(H4)成立,则当 $\tau \in (0, \tau_0]$ 时,分数阶系统(3)的零平衡点是局部渐近稳定的,且在 $\tau = \tau_0$ 时丧失稳定性并产生 Hopf 分支。

2 数值模拟

给出一个数值算例来支持理论分析。

考虑如下系统

$$\begin{cases} D^{0.8}y_1(t) = -1.3y_1(t) + 2\tanh(y_2(t - \tau_2)) + 2\tanh(y_3(t - \tau_2)) - \tanh(y_4(t - \tau_2)) + 3\tanh(y_5(t - \tau_2)), \\ D^{0.8}y_2(t) = -1.2y_2(t) - 3\tanh(y_1(t - \tau_1)), \\ D^{0.8}y_3(t) = -y_3(t) - 2\tanh(y_1(t - \tau_1)), \\ D^{0.8}y_4(t) = -0.5y_4(t) + 3\tanh(y_1(t - \tau_1)), \\ D^{0.8}y_5(t) = -0.5y_5(t) + 2\tanh(y_1(t - \tau_1)). \end{cases} \quad (19)$$

显然系统(19)存在平衡点 $(0, 0, 0, 0, 0)$ 。通过数值计算求得 $k_0 = 4.500 > 0, k_1 = 0.390 > 0, k_2 = 47.450 > 0, k_3 = 685.252 > 0, k_4 = 7437.429 > 0$, 且方程(16)存在两个正实根, 且有 $w_0 = 2.269, \tau_0 = 0.710, \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{L_1^2 + L_2^2} = -0.132 \neq 0$, 故假设(H1)~(H4)均成立。选取 $\tau_1 = 0.4, \tau_2 = 0.25$,

即 $\tau = 0.65 < 0.710$ 时, 由图1可知系统(19)的零平衡点是局部渐近稳定的。而选取 $\tau_1 = 0.5, \tau_2 = 0.3$, 即 $\tau = 0.8 > 0.710$ 时, 由图2可以看出系统(19)的零平衡点丧失稳定性, 并产生 Hopf 分支。

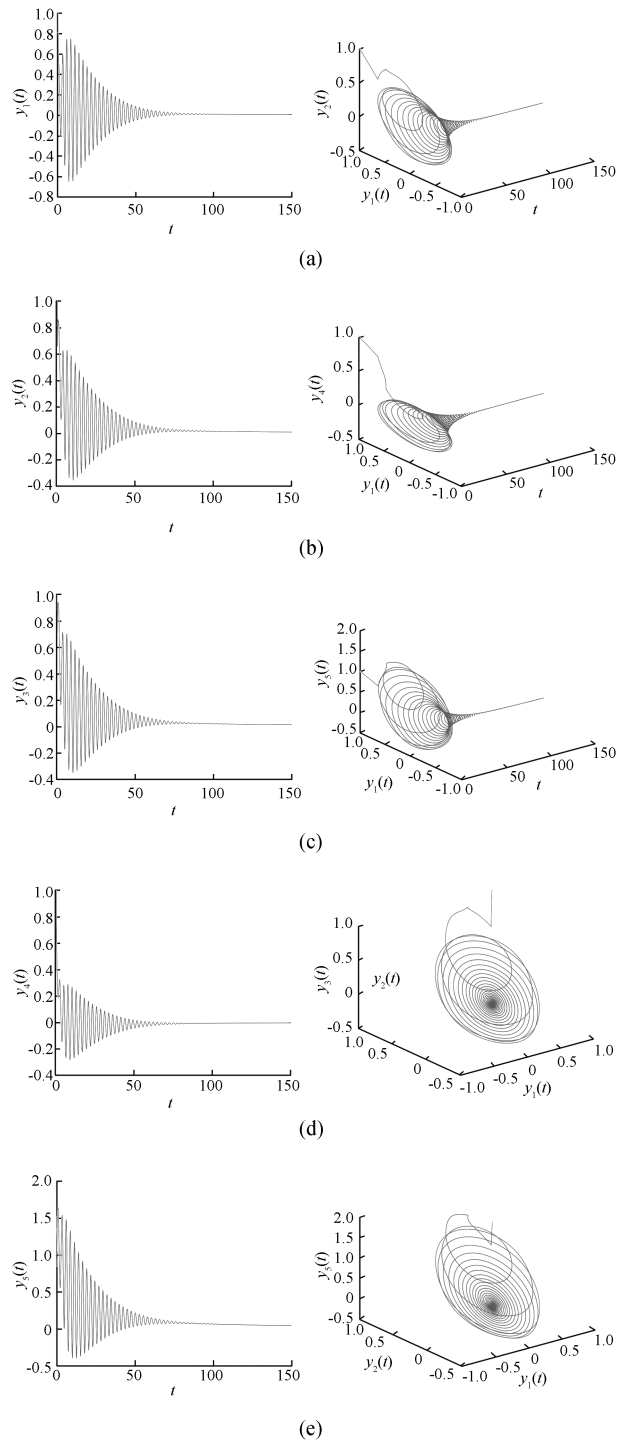


图1 系统(19)的零平衡点渐近稳定 ($\tau = 0.65 < \tau_0$)

Fig. 1 The zero equilibrium point of the system (19) is asymptotically stable ($\tau = 0.65 < \tau_0$)

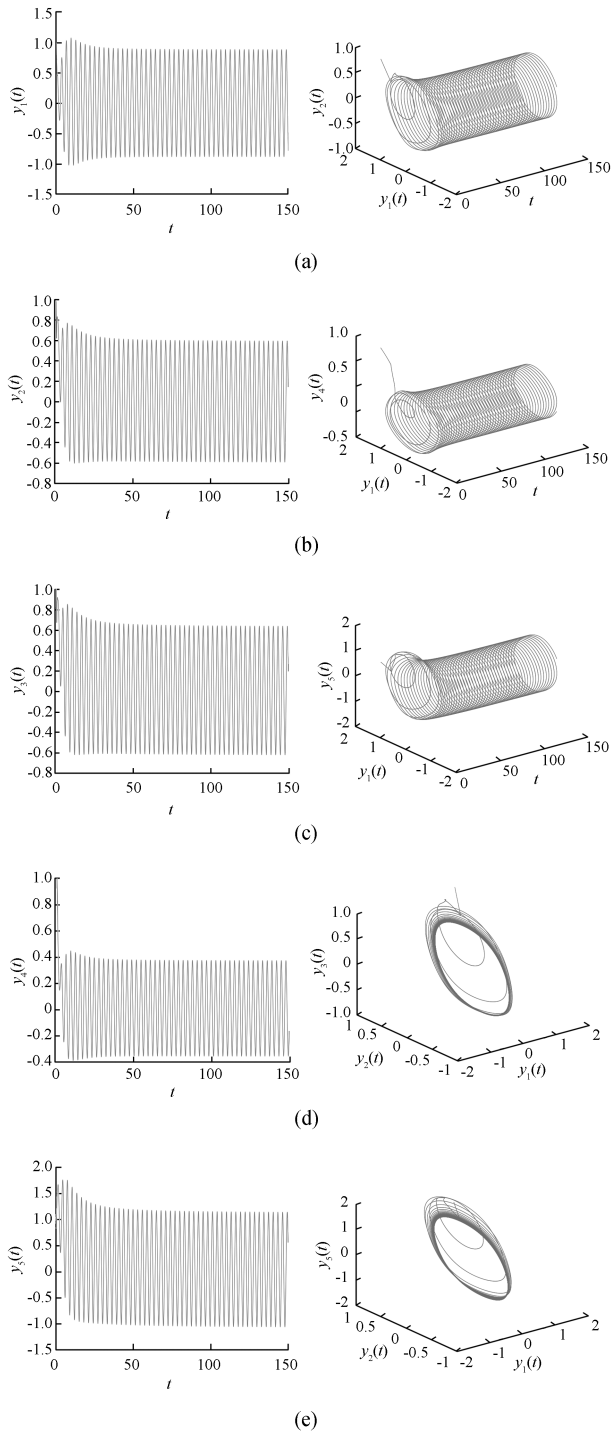


图2 系统(19)的零平衡点失去稳定性
并产生 Hopf 分支 ($\tau=0.8>\tau_0$)

Fig. 2 The zero equilibrium point of system (19) loses stability and produces Hopf bifurcation ($\tau=0.8>\tau_0$)

图3给出了系统(19)产生 Hopf 分支的临界值随分数阶的阶数变化的情况, $q=1$ 时系统(19)为整数阶系统。

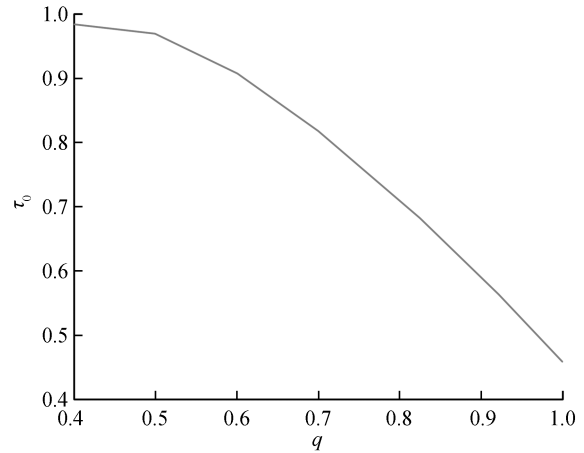


图3 当分数阶的阶数发生变化时,系统(19)产生 Hopf 分支的临界值的变化情况

Fig. 3 System (19) produces cases where the critical value of Hopf bifurcation varies with the order of the fractional order

3 结 论

时滞神经网络具有十分丰富的动力学行为,其在全局优化、信号处理和人工智能等问题都有重要应用。因此研究此类系统的动力学行为在解决理论和实际问题过程中都是十分有效且适用的。本文研究了一类具有双时滞的分数阶简化 BAM 神经网络的动力学行为,通过将两个时滞之和 $\tau=\tau_1+\tau_2$ 看作分支参数,研究了该系统的动力学特性,并建立了 Hopf 分支发生的一些充分条件。通过分析发现时滞会影响分数阶系统的稳定性,当 τ 超过临界值 τ_0 时,非线性时滞系统的零解会失去稳定性,出现 Hopf 分支。并通过仿真算例说明了本文主要结果的有效性和可行性。并且通过仿真发现,分数阶的阶数也会对系统产生 Hopf 分支的临界值有一定的影响,当选取较大的分数阶阶次时,会使得分数阶系统产生 Hopf 分支的时间点提前。

参考文献:

- [1] HOPFIELD J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons[J]. Proceedings of the national academy of sciences of the United States of America, 1984, 81(10): 3088-3092.
- [2] MARCUS C M, WESTERVELT R M. Stability of analog neural networks with delay[J]. Physical review A, 1989, 39(1): 347-359.

- [3] AOUITI C, GHARBIA I B, CAO J D, et al. Existence and global exponential stability of pseudo almost periodic solution for neutral delay BAM neural networks with time-varying delay in leakage terms [J]. *Chaos, solitons and fractals*, 2018, 107: 111-127.
- [4] XU C J, LIAO M X, LI P L, et al. New results on pseudo almost periodic solutions of quaternion-valued fuzzy cellular neural networks with delays [J]. *Fuzzy sets and systems*, 2021, 411: 25-47.
- [5] XU C J, TANG X H, LIAO M X. Stability and bifurcation analysis of a six-neuron BAM neural network model with discrete delays [J]. *Neurocomputing*, 2011, 74(5): 689-707.
- [6] HUANG C D, CAO J D, ALOFI A, et al. Dynamics and control in an $(n+2)$ -neuron BAM network with multiple delays [J]. *Nonlinear dynamics*, 2017, 87(1): 313-336.
- [7] SYED ALI M, NARAYANAN G, SHEKHER V, et al. Global Mittag-Leffler stability analysis of impulsive fractional-order complex-valued BAM neural networks with time varying delays [J]. *Communications in nonlinear science and numerical*, 2020, 83: 105088.
- [8] XU C J, LIAO M X, LI P L, et al. Bifurcation analysis for simplified five-neuron bidirectional associative memory neural networks with four delays [J]. *Neural processing letters*, 2019, 50(3): 2219-2245.
- [9] YANG Y, YE J. Stability and bifurcation in a simplified five-neuron BAM neural network with delays [J]. *Chaos, solitons and fractals*, 2009, 42(4): 2357-2363.
- [10] XU C J, LIUZ X, YAO L Y, et al. Further exploration on bifurcation of fractional-order six-neuron bi-directional associative memory neural networks with multi-delays [J]. *Applied mathematics and computation*, 2021, 410: 126458.
- [11] XU C J, LIAO M X, LI P L, et al. Impact of leakage delay on bifurcation in fractional-order complexvalued neural networks [J]. *Chaos, solitons and fractals*, 2021, 142: 110535.
- [12] XU C J, LIAO M X, LI P L, et al. Influence of multiple time delays on bifurcation of fractional-order neural networks [J]. *Applied mathematics and computation*, 2019, 361: 565-582.
- [13] XU C J, LIU Z X, LIAO M X, et al. Fractional-order bi-directional associate memory (BAM) neural networks with multiple delays; The case of Hopf bifurcation [J]. *Mathematics and computers in simulation*, 2021, 182: 471-494.
- [14] XU C J, LIAO M X, LI P L, et al. Bifurcation properties for fractional order delayed BAM neural networks [J]. *Cognitive computation*, 2021, 13(2): 322-356.
- [15] HUANG C D, ZHAO X, WANG X H, et al. Disparate delays-induced bifurcations in a fractional-order neural network [J]. *Journal of the franklin institute*, 2019, 356(5): 2825-2846.
- [16] HUANG C D, CAO J D. Bifurcation mechanisation of a fractional-order neural network with unequal delays [J]. *Neural processing letters*, 2020, 52(2): 1171-1187.
- [17] PODLUBNY I. *Fractional differential equations* [M]. New York: Academic Press, 1999: 78-86.
- [18] DENG W H, LI C P, LU J H. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays [J]. *Nonlinear dynamics*, 2007, 48(4): 409-416.