DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2022. 06. 009

具斥力函数的奇异 Cucker-Smale 模型的渐近免碰撞集群

徐兴海,刘宏亮*,欧阳自根,肖其珍

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:针对一个改进的 Cucker-Samle 模型的免碰撞问题,利用奇异权函数与排斥力结合的方法,证明了当排斥力函数中的幂指数 $m \in [1,2)$ 时只要系统中的粒子在初始时刻不发生碰撞,系统的集群会无条件发生且粒子不会发生碰撞. 最后数值模拟进一步验证理论结论正确性

关键词:避免碰撞;能量函数;Cucker-Smale 模型;集群

中图分类号:TP13　**文献标志码**:A

文章编号:1673-0062(2022)06-0051-07

Asymptotic Collision-avoidance Flocking of Singular Cucker-Smale Models with Repulsion Functions

XU Xinghai, LIU Hongliang*, OUYANG Zigen, XIAO Qizhen

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract:This paper considers, we consider the method of combining singular weight function with repulsive force for an improved Cucker-Samle model's collision-avoidance problem, and prove that when the power of the repulsive force function $m \in [1,2)$, as long as the particles in the system do not collide at the initial moment, the flocking of the system will occur unconditionally and the particles will not collide. Finally, numerical simulation further verifies the correctness of the theoretical conclusion.

key words:collision-avoidance;energy function;Cuker-Samle model;flocking

0　引　言

在自然界中,大量的生物体在成群结队运动时往往会形成稳定且规律的运动状态,如成群结队南飞的雁群、结伴捕猎的狼群以及草原迁移的野牛。这些群体现象表现出来的自发、稳定、协助

收稿日期:2022-06-30

基金项目:湖南省自然科学基金项目(2020JJ6003;2021JJ30567);湖南省教育厅重点项目(20A425)

作者简介:徐兴海(1998—),男,硕士研究生,主要从事多智能体集群理论及应用方面的研究。E-mail:mathg_xinghaixu@163. com。*通信作者:刘宏亮(1981—),男,讲师,博士,主要从事多智能体系统的集群理论及应用方面的研究。E-mail:math_lhliang@163. com

一致的特征引起了生物、数学、控制等方面学者的广泛关注。如 1986 年,C. W. Reynolds[1] 给出集群的三个核心要点:体积排斥、速度对齐和聚集倾向。1995 年,T. Vicsek[2] 从统计学的角度建立了后被称为 Vicsek 来刻画粒子集群行为。2007 年,F. Cucker 与 S. Smale 利用通信函数描绘个体间的相互作用,建立 Cucker-Samle[3](以下简称 C-S)模型,从数学方面阐述集群问题,其模型如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=v_i(t),i=1,2,3,\cdots,N,\\ \dfrac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{K_1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\varphi(\|x_i(t)-x_j(t)\|)(v_j-v_i),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x_i\in R^d,v_i\in R^d,(i=1,2,3,\cdots,N)$ 分别表示第 i 个智能体在 t 时刻的位置和速度,$\varphi(r)=1/(1+r^2)^{\beta}$ 为通信权函数,K_1 是耦合强度。此后,该模型引起了许多学者广泛的关注,如 R. Mauro[4] 考虑了智能体间信息交互的延时性,并得到系统能够形成集群的充分条件。Y. Z. Sun[5] 等人考虑了随机噪声干扰的情况,得出当通信函数存在正下界且噪声在某个可控范围时,集群仍然会发生的结论。J. H. Shen[6] 提出具有等级制度下的集群模型后,并证明了在连续的情况下只要 $\beta\leqslant1/2$,系统就会发生无条件渐进集群。后来 C. H. Li[7] 离散系统的角度,照样获取了同样的结论。H. L. Liu[8-10] 探究了有限时间集群,通过引用符号函数破坏系统的 Lipschitz 连续性来保证系统的有限时间集群性。S. Y. Ha[11-12] 引入粒子间排斥力,证明了当系统的初始值限定在一定范围内,系统中的粒子就不会发生碰撞。F. Cucker 与 J. G. Dong[13-15] 等引入合力函数和利用能量函数方法证明了当 $\beta<1$ 时,系统达到无条件且免碰撞的渐进集群。$\beta>1$ 时,系统的初始值要满足一定的条件时才能到达免碰撞集群。特别地,J. A. Carrillo[16-17] 使用奇异的通信函数 $\varphi(r)=1/r^{\alpha}$ 来避免碰撞,得到当 $\alpha\leqslant2$ 时会形成无条件免碰撞集群。

本文受参考文献[8,16]的启发,建立以下模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=v_i(t),i=1,2,3,\cdots,N,\\ \dfrac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{K_1}{N}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}\varphi(r_{ij})(v_j-v_i)+\\ \qquad\dfrac{K_2}{N}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}f(r_{ij})(x_j-x_i),\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$f(r_{ij})=\frac{\|x_i-x_j\|^m-R}{\|x_i-x_j\|^{2-m}},i\neq j,i,j\in 1,2,3,\cdots,N,$$

且初值记为

$$(x_i(0),v_i(0))=(x_{i0},v_{i0}),\tag{3}$$

$\|\cdot\|$ 是欧式范数,R 是智能体控制预设距离,K_1,K_2 是耦合强度皆为正常数。

为了叙述上的方便,首先给出必要的假设以及集群的定义。

假设　对于 $\delta>0,\varphi(\cdot)$ 在$[\delta,+\infty)$关于常数 $L(\delta)$ 李普希兹连续的非增非负函数,且 $\int_0^{\delta}\varphi(s)\mathrm{d}s=+\infty$。

定义　设$\{x_i(t),v_i(t)\}_{i=1}^{N}$ 是系统(2)~系统(3)的解,当且仅当其同时满足以下条件

$$\lim_{t\to+\infty}\|v_i(t)-v_j(t)\|=0,$$
$$\sup_{0\leqslant t<+\infty}\|x_i(t)-x_j(t)\|<+\infty,$$
$$\inf_{0\leqslant t<+\infty,i\neq j}\|x_i(t)-x_j(t)\|>0,\tag{4}$$

则称系统(2)~系统(3)形成免碰撞的渐进集群。

1　解的全局存在唯一性

为了说明系统(2)~系统(3)全局解的存在性,先给出位移差与速度的一致有界性引理。

引理 1　设$\{x_i(t),v_i(t)\}_{i=1}^{N}$ 是系统(2)~系统(3)在区间$[0,T)$的一个解$(0<T\leqslant\infty)$,那么对于任意的 $t\in[0,T)$,都存在正常数 C 和 x_C 使得

$$\sup_{0\leqslant t<+\infty}\|v_i(t)\|\leqslant C$$

和

$$\sup_{0\leqslant t<+\infty}\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant x_c。$$

证明:设能量函数

$$E(x,v)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\|v_i(t)\|^2+\frac{K_2}{N}\frac{1}{4m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}(\|x_i(t)-x_j(t)\|^m-R)^2。\tag{5}$$

沿着系统(2)对 $E(x,v)$ 求关于 t 的全导数得

$$\frac{\mathrm{d}E(x,v)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N}\langle v_i(t),\dot v_i(t)\rangle+\frac{K_2}{N}\times\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{\|x_i(t)-x_j(t)\|^m-R}{\|x_i(t)-x_j(t)\|^{1-m}}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x_i(t)-x_j(t)\|=\sum_{i=1}^{N}\langle v_i(t),\varphi(r_{ij})(v_j-v_i)+\frac{K_2}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}^{N}f(r_{ij})(x_j-x_i)\rangle+\frac{1}{2}\frac{K_2}{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\frac{\|x_i(t)-x_j(t)\|^m-R}{\|x_i(t)-x_j(t)\|^{2-m}}\times$$

$$\langle v_i(t)-v_j(t),(x_i-x_j)= -\frac{1}{2}\frac{K_1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(r_{ij})\|v_i(t)-v_j(t)\|^2\leqslant 0。\tag{6}$$

记

$$E(0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\|v_i(0)\|^2+\frac{1}{4m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}(\|x_i(0)-x_j(0)\|^m-R)^2。$$

又因为 $E(x,v)$ 在 $t\in[0,T)$ 上非增非负,有 $E(x,v)\leqslant E(0)$。显然

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\|v_i(t)\|^2+\frac{K_2}{N}\frac{1}{4m}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}(\|x_i(t)-x_j(t)\|^m-R)^2\leqslant E(0),$$

那么一定存在正常数 C 使得 $\sup\limits_{0\leqslant t<+\infty}\|v_i(t)\|\leqslant C$。同理 $\sup\limits_{0\leqslant t<+\infty}\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant x_c$。证毕。

定理 1　设 $\{x_i(t),v_i(t)\}_{i=1}^{N}$, $i=1,2,3,\cdots,N$ 是系统(2)~系统(3)的解。通信函数 $\varphi(\cdot)$ 满足假设,斥力函数 $f(r_{ij})$ 的指数 $m\in[1,2)$,若初值不相等即任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant N$ 都有 $x_{i0}=x_{j0}$,那么系统(2)~系统(3)存在全局唯一光滑解,且对任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant N$ 都有 $x_i(t)=x_j(t)$ 即任意两个粒子不发生碰撞。

证明:设 $T>0$。需要证明系统(2)在 $[0,T]$ 上存在唯一解。然而,由于在 $t=0$ 时粒子有不同的位置,且权函数仅在 $r=0$ 处奇异,因此局部唯一光滑解是存在的。那么就有两种可能性:在区间 $[0,T]$ 粒子不发生碰撞,解可以延拓到 $[0,T]$。或者存在 $t_0\in(0,T]$ 第一次发生碰撞,那么解唯一存在且光滑的区间为 $[0,t_0)$,假设这样的 t_0 存在,然后根据它的定义,存在一个粒子 $S=1,2,3,\cdots,N$ 使得第 S 个粒子与其他一些粒子发生碰撞,用集合 S 表示这些碰撞粒子的集合,即有

$$S:=\{i\in\{1,2,3,\cdots,N\}\mid\lim_{t\to t_0^-}\|x_i(t)-x_j(t)\|=0\},$$

其中,集合 S 中的元素个数 $|S|>1$。同时设

$$\|X(t)\|_S=\sqrt{\sum_{i,j\in S}\|x_i(t)-x_j(t)\|^2}$$

和

$$\|V(t)\|_S=\sqrt{\sum_{i,j\in S}\|v_i(t)-v_j(t)\|^2}$$

由引理 1 可得 $\|V(t)\|_S^2\leqslant 2|S|x_c^2$,有 $\|X(t)\|_S^2\leqslant 2|S|^2C^2$。由 Cachy-Schwarz 不等式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X(t)\|_S^2=\sum_{i,j\in S}\langle x_i(t)-x_j(t),v_i(t)-v_j(t)\rangle\leqslant 2\sqrt{\sum_{i,j\in S}\|x_i(t)-x_j(t)\|}\times\sqrt{\sum_{i,j\in S}\|v_i(t)-v_j(t)\|}=2\|X(t)\|_S\|V(t)\|_S。$$

从而

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X(t)\|_S\right|\leqslant\|V(t)\|_S。\tag{7}$$

另外

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|V(t)\|_S^2&=\sum_{i,j\in S}\langle v_i(t)-v_j(t),\dot v_i(t)-\dot v_j(t)\rangle=2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j,k\in S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_k(t)-v_i(t))-\\&\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t))\rangle+2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_k(t)-v_i(t))-\\&\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t))\rangle+2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S,k\in S}\langle v_i(t)-v_j(t),f(r_{ki})(x_k(t)-x_i(t))-\\&f(r_{kj})(x_k(t)-x_j(t))\rangle+2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),f(r_{ki})(x_k(t)-x_i(t))-\\&f(r_{kj})(x_k(t)-x_j(t))\rangle:=J_1+J_2+J_3+J_4\end{aligned}\tag{8}$$

首先,对 J_1 做估计。由于对称性,交换累加顺序易得

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k\in S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_k(t)-v_i(t))\rangle=\sum_{i,j,k\in S}\langle v_k(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_i(t)-v_k(t))\rangle=\\&\frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j,k\in S}^{N}\langle v_k(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_i(t)-v_k(t))\rangle+\sum_{i,j,k\in S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_k(t)-v_i(t))\rangle\Big)=\\&\sum_{i,j,k\in S}\varphi(r_{ki})(v_i(t)-v_k(t))(v_k(t)-v_i(t))=-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k\in S}\varphi(r_{ki})(v_i(t)-v_k(t))^2。\end{aligned}\tag{9}$$

同理

$$-\sum_{i,j,k\in S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t))\rangle=$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j,k\in S}\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t))^2 \tag{10}$$

根据式(9)和式(10),计算得

$$J_1=-2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j,k\in S}\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t))^2 \tag{11}$$

此外,注意到对任意 $i,j\in S$,有

$$\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant\|X(t)\|_S,$$

且 $\varphi(\cdot)$ 非增,于是

$$J_1\leqslant-2|S|\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S}\varphi(\|X(t)\|_S)(v_i(t)-v_j(t))^2=$$

$$-2|S|\frac{K_1}{N}\varphi(\|X(t)\|_S)\|V(t)\|_S^2=$$

$$-2C_{J_1}\varphi(\|X(t)\|_S)\|V(t)\|_S^2, \tag{12}$$

其中 $C_{J_1}=|S|\frac{K_1}{N}$。

紧接着对 J_2 进行分析。由 $\varphi(\cdot)$ 满足假设和 $L(\delta)$ 是 Lipschitz 常数,有

$$J_2=2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{ki})(v_k(t)-v_i(t))-\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t))\rangle+$$

$$2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),\varphi(r_{kj}(v_k(t)-v_j(t)))\rangle+2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),$$

$$-\varphi(r_{kj}(v_k(t)-v_j(t)))\rangle=2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),(\varphi(r_{ki})-\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t)))\rangle-$$

$$\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\varphi(r_{kj})(v_i(t)-v_j(t)))^2\leqslant$$

$$2\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),(\varphi(r_{ki})-\varphi(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t)))\rangle。 \tag{13}$$

注意到在引理 1 中 $\|v_k(t)-v_j(t)\|\leqslant 2C$,所以由 Cachy-Schwarz 不等式可得

$$J_2\leqslant 4CL(\delta)\frac{K_1}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\|v_i(t)-v_j(t)\|\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant 4CL(\delta)(N-|S|)\frac{K_1}{N}\times$$

$$\sqrt{\sum_{i,j\in S}\|x_i(t)-x_j(t)\|}\sqrt{\sum_{i,j\in S}\|v_i(t)-v_j(t)\|}=$$

$$4CL(\delta)(N-|S|)\frac{K_1}{N}\|X(t)\|_S\|V(t)\|_S=$$

$$4C_{J_2}\|X(t)\|_S\|V(t)\|_S, \tag{14}$$

其中 $C_{J_2}=CL(\delta)(N-|S|)\frac{K_1}{N}$。

类似 J_1 的方法,下面对 J_3 进行估计

$$J_3=2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j,k\in S}\langle v_k(t)-v_i(t),f(r_{ki})(x_k(t)-x_i(t))\rangle\leqslant 2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j,k\in S}\|v_k(t)-v_i(t)\|\times$$

$$\|f(r_{ki})(x_k(t)-x_i(t))\|\leqslant$$

$$2\frac{K_2}{N}\sum_{i,k\in S}\left|\frac{\|x_k(t)-x_i(t)\|^m-R}{\|x_k(t)-x_i(t)\|^{2-m}}\right|\|x_k(t)-x_i(t)\|\|v_k(t)-v_i(t)\|\leqslant 2\frac{K_2}{N}\sum_{i,k\in S}|\|x_k(t)-$$

$$x_i(t)\|^m-R|\times\|x_k(t)-x_i(t)\|^{m-1}\|v_k(t)-v_i(t)\|\leqslant 2(x_c^m+R)x_c^{m-1}\frac{K_2}{N}\sum_{i,k\in S}\|v_k(t)-$$

$$v_i(t)\|\leqslant 2C_{J_3}\|V(t)\|_S, \tag{15}$$

其中 $C_{J_3}=(x_c^m+R)x_c^{m-1}\frac{K_2}{N}$。

为了更好的对 J_4 进行估计,先对 $f(r_{ij}(t))$ 进行讨论,当 $i,j\in S,k\notin S$ 时,有 $\|x_i(t)-x_k(t)\|\in[\delta,x_c]$,此时 $f(r_{ij}(t))$ 是闭区间上的连续函数,那么一定存在常数 C_1,C_2 有

$$\|f(r_{ki})-f(r_{kj})\|\leqslant C_1\|r_{ki}-r_{kj}\|,$$

$$\|f(r_{ij}(t))\|\leqslant C_2。$$

于是可得

$$J_4=2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),(f(r_{ki})-f(r_{kj})(v_k(t)-v_j(t)))\rangle+2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\langle v_i(t)-v_j(t),f(r_{kj})(x_j(t)-x_i(t))\rangle\leqslant$$

$$2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\|v_i(t)-v_j(t)\|\|f(r_{kj})(x_j(t)-x_i(t))\|+2\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S,k\notin S}\|v_i(t)-v_j(t)\|\times$$

$$\|(f(r_{ki})-f(r_{kj}))(x_k(t)-x_j(t))\|\leqslant$$

$$4x_cC_2(N-|S|)\frac{K_2}{N}\sum_{i,j\in S}\|v_i(t)-v_j(t)\|\times$$

$$\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant 2C_{J_4}\|X(t)\|_S\|V(t)\|_S, \tag{16}$$

其中 $C_{J_4}=24x_cC_2(N-|S|)\frac{K_2}{N}$。

联立式(12)~式(16),则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|V(t)\|_S^2\leqslant-2C_{J_1}\varphi(\|X(t)\|_S)\|V(t)\|_S^2+$$

$$4C_{J_2}\|X(t)\|_S\|V(t)\|_S+2C_{J_3}\|V(t)\|_S+$$

$$2C_{J_4}\|X(t)\|_S\|V(t)\|_S。\tag{17}$$

因 $\|V(0)\|_S\neq 0$,故 $\|V(t)\|_S\neq 0$,将式(17)左右两边同时约去 $2\|V(t)\|_S$,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|V(t)\|_S\leqslant -C_{J_1}\varphi(\|X(t)\|_S)\|V(t)\|_S+2C_{J_2}\|X(t)\|_S+C_{J_3}+C_{J_4}\|X(t)\|_S。\tag{18}$$

根据式(7),式(18)可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|V(t)\|_S\leqslant -C_{J_1}\varphi(\|X(t)\|_S)\|V(t)\|_S+2C_{J_2}\|X(t)\|_S+C_{J_3}+C_{J_4}\|X(t)\|_S。\tag{19}$$

将式(19)左右两边从 0 到 $t(t\in[0,t_0))$ 积分,

$$\|V(t)\|_S-\|V(0)\|_S\leqslant C_{J_1}\int_{\|X(0)\|_S}^{\|X(t)\|_S}\varphi(r)\mathrm{d}rC+(2C_{J_2}+C_{J_4})\int_0^t\|X(r)\|_S\mathrm{d}r+\int_0^t C_{J_3}\mathrm{d}r,$$

即

$$-C_{J_1}\int_{\|X(0)\|_S}^{\|X(t)\|_S}\varphi(r)\mathrm{d}r\leqslant \|V(0)\|_S-\|V(t)\|_S+(2C_{J_2}+C_{J_4})\int_0^t\|X(r)\|_S\mathrm{d}r+\int_0^t C_{J_3}\mathrm{d}r。\tag{20}$$

显然,式(20)的右边有界,而左边

$$\lim_{t\to t_0^-}-C_{J_1}\int_{\|X(0)\|_S}^{\|X(t)\|_S}\varphi(r)\mathrm{d}r=-C_{J_1}\int_{\|X(0)\|_S}^{0}\varphi(r)\mathrm{d}r=+\infty。$$

这显然矛盾。因此解在 $[0,T]$ 上存在且唯一。又由 T 是任意性,解最终可以延拓到无穷。也即 $t_0\to+\infty$,都有 $\|x_i(t)-x_j(t)\|\neq 0,i,j\in 1,2,3,\cdots,N,i\neq j$。证毕。

2　集群的充分条件

定理 2　设定理 2 成立,那么系统(2)~系统(3)会形成免碰撞渐近集群。

证明:由定理 2 可知,系统(2)~系统(3)存在一个全局光滑解。无妨记为 $\{x_i(t),v_i(t)\}_{i=1}^N$,引理 1 已经证明了 $\sup\limits_{0\leqslant t<+\infty}\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant x_c$。接下来只需要证明

$$\lim_{t\to+\infty}\|v_i(t)-v_j(t)\|=0,i,j\in 1,2,3,\cdots,N。$$

首先证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{K_1}{N}\sum\limits_{i=1,j=1}^N\|v_i(s)-v_j(s)\|^2\mathrm{d}s$,极限存在且有界。引理 1 的能量函数可得

$$-\frac{1}{2}\frac{K_1}{N}\int_0^t\sum_{i=1,j=1}^N\varphi(r_{ij})\|v_i(s)-v_j(s)\|^2\leqslant E(t)-E(0)\tag{21}$$

注意到在假设中,φ 非增非负。又由式(21)可推出

$$\frac{1}{2}\frac{K_1}{N}\int_0^t\sum_{i=1,j=1}^N\varphi(x_c)\|v_i(s)-v_j(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant E(0)-E(t)\leqslant E(0)\tag{22}$$

从而,进一步得到

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\sum_{i=1,j=1}^N\|v_i(s)-v_j(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{2E(0)}{\varphi(x_c)}。$$

接下来证明 $\sum\limits_{i=1,j=1}^N\|v_i(t)-v_j(t)\|^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。类似定理 1,定义

$$\|V(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1,j=1}^N\|v_i(t)-v_j(t)\|^2}$$

和 $$\|X(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1,j=1}^N\|x_i(t)-x_j(t)\|^2}$$

对 $\|V(t)\|^2$ 求关于 t 的导数得到

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|V(t)\|^2\right\|&=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1,j=1}^N\|v_i(t)-v_j(t)\|^2\right\|=\left\|2\sum_{i=1,j=1}^N\langle v_i(t)-v_j(t),\dot v_i(t)-\dot v_j(t)\rangle\right\|\leqslant\left\|-2K_1\sum_{i=1,j=1}^N\varphi(r_{ij})\times(v_i(t)-v_j(t))^2\right\|\times\\&\left\|2\frac{K_2}{N}\sum_{i=1,j=1,k=1}^N\langle v_k(t)-v_j(t)),f(r_{ki})(x_k(t)-x_j(t)))\rangle\right\|\leqslant 2N\varphi(x_c)\|V(t)\|^2+2C_2N\|V(t)\|\|X(t)\|。\end{aligned}\tag{23}$$

由引理 1 可知 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum\limits_{i=1,j=1}^N\|v_i(t)-v_j(t)\|^2$ 有界,这就意味着 $\sum\limits_{i=1,j=1}^N\|v_i(t)-v_j(t)\|^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续。由 I. Barbalat 引理[18]可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|v_i(t)-v_j(t)\|=0,i,j\in\{1,2,3,\cdots,N\}$。证毕。

3　仿真实验结果与分析

为了展现第三节的理论成果,在下面两个粒子中都考虑具有 8 个粒子的多智能体系统。设 $R=2$,关联函数 $\varphi(s)=\frac{1}{s^\beta}$,$\beta=1$,空间维数 $d=2$。

例 1　设 $m=1.2$,初始位移 v_0 位于区间 $[-5,5]$ 且不相同的随机数,初始速度 v_0 位于区间 $[-5,5]$ 的随机数。通过使用 Python 数值模拟,得到图 1~图 4。由图 1,图 2 可得,粒子相对位移不变,粒子的速度趋于一致,即粒子形成了渐进集群。在图 3,图 4 中可以看出粒子最大位移差一致有界,期间最小位移差恒大于 0。那么无碰撞渐进集群是可达的,从而展现了第三节结果是合理的。

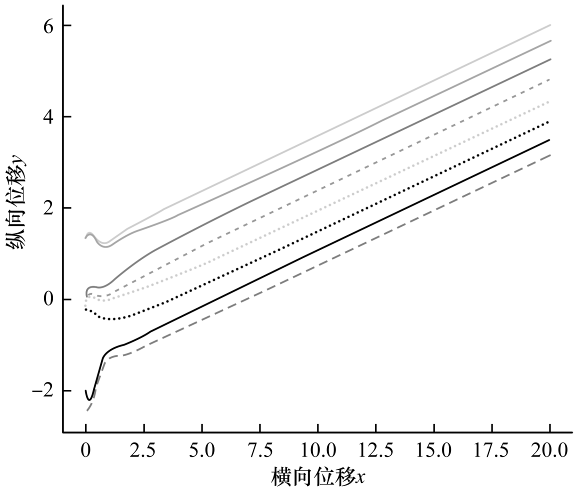

图 1　粒子的位移

Fig. 1　Displacement of particles

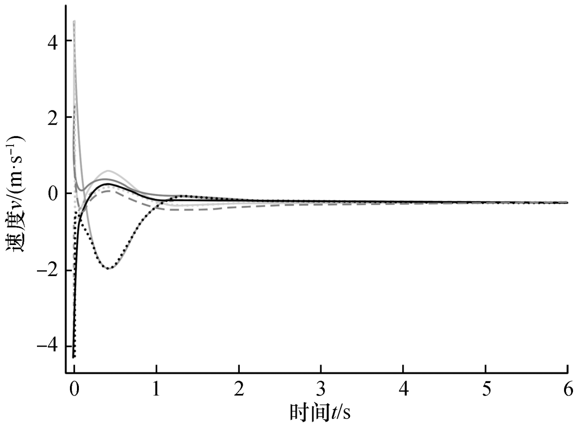

图 2　粒子的速度

Fig. 2　Speed of the particles

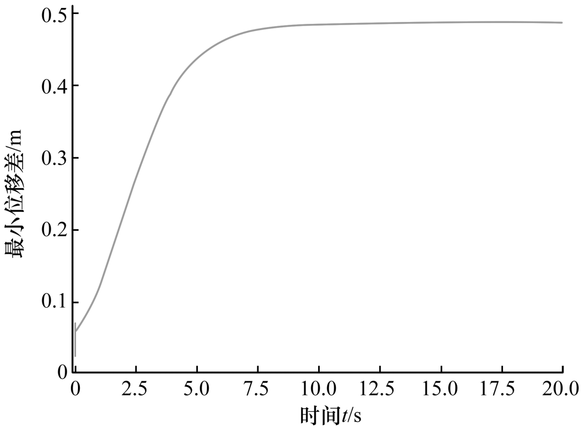

图 3　粒子的最小位移差

Fig. 3　Minimum displacement difference of particles

例 2　设 $m = 1.8$,初始位移 v_0 位于区间[−5, 5]且不相同的随机数,初始速度 v_0 位于区间[−5, 5]的随机数。如图 5 ~ 图 8 所示,粒子经过一段时间后速度趋于一致,相对位移不变,粒子间最大位移差一致有界,全局过程中粒子间最小位移差恒大于 0。那么无碰撞的渐进集群是可实现的。

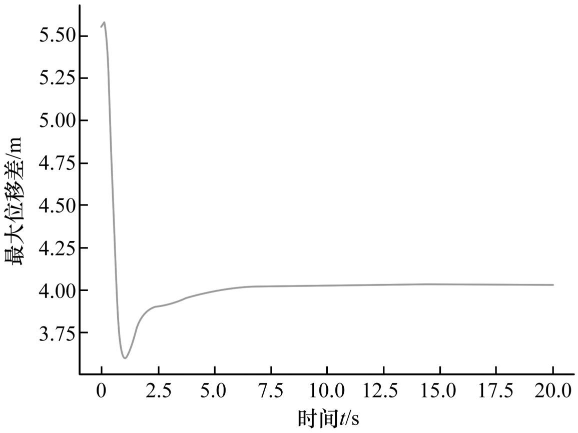

图 4　粒子的最大位移差

Fig. 4　Maximum displacement difference of particles

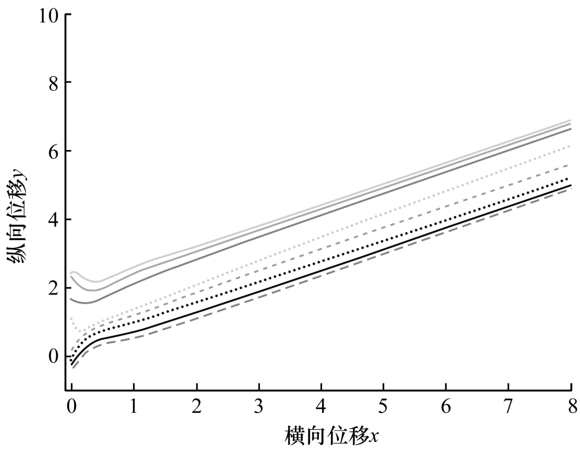

图 5　粒子的位移

Fig. 5　Displacement of particles

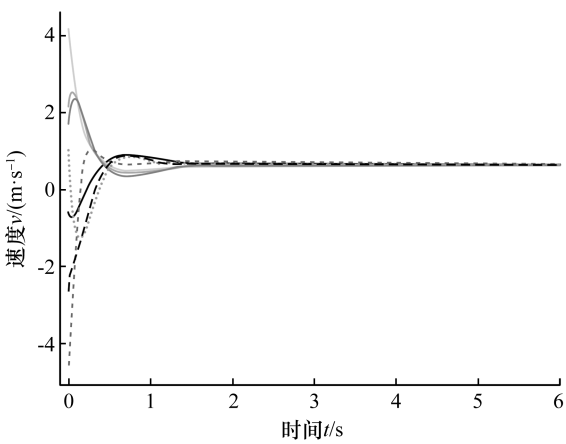

图 6　粒子的速度

Fig. 6　Speed of the particles

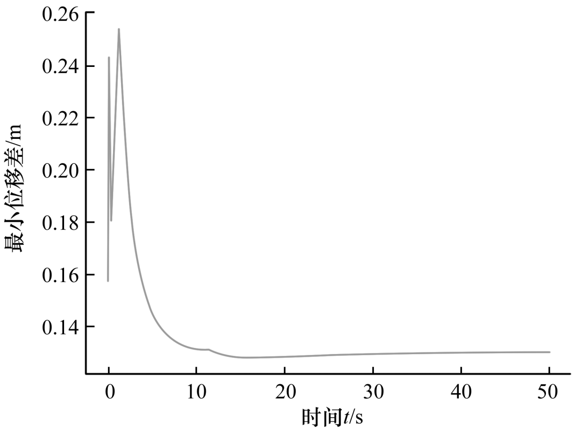

图7　粒子的最小位移差

Fig. 7　Minimum displacement difference of particles

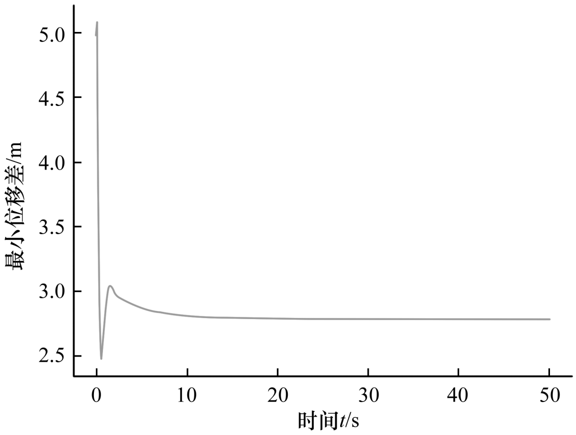

图8　粒子的最大位移差

Fig. 8　Maximum displacement difference of particles

4　结　论

本文对多智能体系统免碰撞集群做出了研究,通过排斥力与奇异值函数结合的方法来避免智能体集群的碰撞,将可能发生的碰撞问题转化为微分方程解的存在性问题,利用能量函数证明位移差的一致有界性与速度的一致有界性,在初值不发生碰撞的情况下,多智能体系统会形成渐进免碰撞集群。解决了多智能体系统的防碰撞问题,在无人机飞行应用中有重要实际意义。

参考文献:

[1] REYNOLDS C W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model[C]//Proceedings of the 14th annual conference on computer graphics and interactive techniques. NewYork, United States: Association for Computing Machinery, 1987: 25-37.

[2] VICSEK T, CZIRÓK A, BEN J E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. Physical review letters, 1995, 75(6): 12-26.

[3] CUCKER F, SMALE S. Emergent behavior in flocks[J]. IEEE transactions on automatic control, 2007, 52(5): 852-862.

[4] MAURO R. Cucker-Smale model with time delay[J]. Discrete & continuous dynamical systems, 2022, 42(5): 2409-2432.

[5] ERBAN R, HASKOVEC J, SUN Y Z. A Cucker-Smale model with noise and delay[J]. SIAM journal on applied mathematics, 2016, 76(4): 1535-1557.

[6] SHEN J H. Cucker-Smale flocking under hierarchical leadership[J]. SIAM journal on applied mathematics, 2007, 68(3): 694-719.

[7] LI C H, YANG S Y. A new discrete Cucker-Smale flocking model under hierarchical leadership[J]. Discrete & continuous dynamical systems B, 2016, 21(8): 2587-2599.

[8] LIU H L, WANG X, LIU Y C, et al. On non-collision flocking and line-shaped spatial configuration for a modified singular Cucker-Smale model[J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2019, 75: 280-301.

[9] LIU H L, WANG X, LI X, et al. Finite-time flocking and collision avoidance for second-order multi-agent systems [J]. International journal of systems science, 2020, 51(1): 102-115.

[10] XIAO Q Z, LIU H L, XU Z H, et al. On collision avoiding fixed-time flocking with measurable diameter to a Cucker-Smale-Type self-propelled particle model[J]. Complexity, 2020, 2020(11): 1-12.

[11] AHN S M, CHOI H, HA S Y, et al. On collision-avoiding initial configurations to cucker-smale type flocking models[J]. Communications in mathematical sciences, 2012, 10(2): 625-643.

[12] PARK J, KIM H J, HA S Y. Cucker-Smale flocking with inter-particle bonding forces[J]. IEEE transactions on automatic control, 2010, 55(11): 2617-2623.

[13] CUCKER F, HUEPE C. Flocking with informed agents [J]. Mathematics in action, 2008, 1(1): 1-25.

[14] CUCKER F, DONG J G. Avoiding collisions in flocks [J]. IEEE transactions on automatic control, 2010, 55(5): 1238-1243.

[15] CUCKER F, DONG J G. A general collision-avoiding flocking framework[J]. IEEE transactions on automatic control, 2011, 56(5): 1124-1129.

[16] CARRILLO J A, CHOI Y P, MUCHA P B, et al. Sharp conditions to avoid collisions in singular Cucker-Smale interactions[J]. Nonlinear analysis: Real world applications, 2017, 37: 317-328.

[17] CARRILLO J A, CHOI Y P, SERGIO P P. A review on attractive-repulsive hydrodynamics for consensus in collective behavior[J]. Analysis of pdes, 2017, 1: 259-298.

[18] BARBALAT I. Systems equations differentielles oscioscillations nonlinéairesl[J]. Revue roumaine de mathématique pures et appliquées, 1959, 4(2): 267-270.