DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2022. 06. 001

分布随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的稳定性分析

漆发辉,王天林,郭长青*

(南华大学 土木工程学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:对在流动流体和分布随从力共同作用下的黏弹性输流管道,以 Kelvin 黏弹性模型和 Euler 梁模型为基础建立输流管道的运动微分方程,然后采用 Galerkin 方法对其离散化。通过特征值分析,研究分布随从力、质量比、黏弹性系数对系统失稳临界流速的影响。运用复频率随流速变化的曲线,分析不同的参数作用下系统的振动特性和稳定性。结果表明:分布随从力越大,系统失稳的临界流速越小;随着质量比的增大,临界流速会增大;黏弹性系数增大时,临界流速也会略微增大;悬臂输流管道的失稳方式主要为颤振失稳。

关键词:流固耦合;分布随从力;黏弹性输流管道;稳定性

中图分类号:TE832　　**文献标志码**:A

文章编号:1673-0062(2022)06-0001-07　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Stability Analysis of Viscoelastic Cantilever Pipeline Conveying Fluid under Distributed Follow-up Force

QI Fahui, WANG Tianlin, GUO Changqing*

(School of Civil Engineering, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract:For a viscoelastic pipe conveying fluid under the combined action of flowing fluid and distributed follower force, the differential equation of motion of the pipe conveying fluid is established based on Kelvin viscoelastic model and Euler beam model, and then discretized by Galerkin method. Through eigenvalue analysis, the influences of distributed follower force, mass ratio and viscoelastic coefficient on the critical velocity of system instability are studied. The vibration characteristics and stability of the system under different parameters are analyzed by using the curves of complex frequencies changing with flow velocity. The results show that the larger the distributed follower force, the

收稿日期:2022-07-16

基金项目:国家自然科学基金项目(51678286)

作者简介:漆发辉(1996—),男,硕士研究生,主要从事流固耦合力学等方面的研究。E-mail:878366042@ qq. com。

*通信作者:郭长青(1965—),男,教授,主要从事流固耦合力学方面的研究。E-mail:GuoCQ@ hotmail. com

lower the critical flow velocity for instability of the system; with the increase of mass ratio, the critical velocity will increase. When the viscoelastic coefficient increases, the critical flow velocity will also increase slightly. The predominant mode of instability for cantilever flow pipelines is flutter.

key words: fluid-structure interaction; distributed follower force; viscoelastic pipeline; stability

0 引 言

在流固耦合研究领域中,输流管道的振动与稳定性是一个经典问题,在水利、海洋、核能、航空航天和石油运输等实际领域都有着广泛的应用。由于其展现出来的丰富的动力学特性,越来越多的学者注意到了这个问题,并对其进行了研究[1-4]。

输流管道的黏弹性作为影响输流管道稳定性的内在因素之一吸引了许多学者的目光,使得他们对其展开了研究。王忠民等[5]对非守恒黏弹性输流管道系统的动力特性和稳定性进行了分析,并得到了松弛时间对黏弹性输流管道的稳定性有显著影响的结论。张战午[6]对黏弹性输流管道的动力稳定性进行了研究。赵凤群等[7]对简支黏弹性输流管道受分布随从力作用下的动力特性进行了分析。B. A. Khudayarov 等[8]通过建立数学模型来研究黏弹性输流管道的非线性振动问题,并利用 Bubnov-Galerkin 方法,将该数学模型简化为一个以时间作自变量的常积分微分方程组的研究。最后的结果表明,管道的黏弹性会使其振动的频率和振幅均降低。Q. X. Huang 等[9]研究了黏弹性输流管道在正弦流作用下的动力学特性,旨在改善此类流体相互作用系统的性能。刘颖[10]分析了黏弹性悬臂输流管道的稳定性。A. R. Askarian 等[11]对具有 Zener 分数阶本构关系的黏弹性输流管道在不同边界条件下的稳定性进行了分析。

在实际的工程应用中,由于各种原因,输流管道的约束条件也会大不相同。输流管道在不同的约束条件下就会表现出各异的动力学特性。金基铎等[12]用实验研究的方法分析了两端固定的输流管道在脉动流作用下的参数共振问题。包日东等[13]研究了端部约束悬臂输流管道的分岔与混沌响应。J. D. Jin 等[14]通过使用 Galerkin 方法离散运动微分方程,研究了支撑管道输送流体的稳定性。颜雄等[15]对两端弹性支承条件下的输流管道进行了研究,着重分析了非对称弹性支承下系统的固有特性。分析的结果表明,对称支承的刚度越大,系统的一阶固有频率下降越快;对于非对称弹簧支承的系统而言,流体流速越大,其对系统固有频率的影响越显著。

输流管道的稳定性除了受内在因素的影响之外,还与输流管道受到的外在因素的影响有关。分布随从力便是影响输流管道稳定性的外部因素之一,其可能来源于管道外流的黏滞力。

郭长青等[16]分析了分布随从力作用下的简支输流管道的稳定性。许锋等[17]研究了含裂纹输流管道在分布随从力作用下的振动与稳定性。J. H. Huang 等[18]通过推导双参数地基上受分布随从力作用的输流管道的运动微分方程,研究了基础衬板刚度对固有频率和速度的影响。

本文在文献[10,16]的研究基础上综合考虑了输流管道的黏弹性和分布随从力两个因素,研究了黏弹性悬臂输流管道在分布随从力作用下的稳定性。分析了管道黏弹性系数、分布随从力大小以及输流管道和流体的质量比变化对输流管道振动特性和稳定性的影响。

1 运动方程

1.1 模型及运动微分方程建立

受分布随从力作用的黏弹性悬臂输流管道模型如图 1 所示,输流管道内流体的流速恒定,分布随从力与输流管道挠曲线始终保持相切。

管道采用 Kelvin 黏弹性模型和 Euler 梁模型,位置 x 处任意时刻 t 的挠度记为 $w(x,t)$。运动微分方程为:

$$E^{*}I\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+MU^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2MU\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}+q(L-X)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(M+m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

式中:E^{*} 为黏弹性系数,Pa · s;E 为管道弹性模

量,N/m^2;I 为管道截面惯性矩,m^4;w 为管道横向位移,m;L 为管道长度,m;q 为沿管道切线方向的分布随从力,N/m;M 和 m 分别为流体和管道的单位长度质量,kg/m;U 为管道内流体的运动速度,m/s。

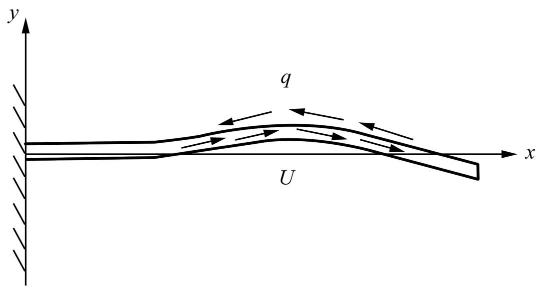

图 1　受分布随从力作用的黏弹性悬臂管道

Fig. 1　Viscoelastic cantilever pipe subject to distributed follower force

1.2　运动微分方程无量纲化

在式(1)中引入以下无量纲参数:

$$\eta=\frac{w}{L},\xi=\frac{X}{L},\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{(M+m)}},$$

$$\gamma=\frac{qL^3}{EI},\mu=UL\sqrt{\frac{M}{EI}},\beta=\frac{M}{M+m},$$

$$\alpha=\frac{E^*}{L^2}\sqrt{\frac{I}{E(M+m)}} \tag{2}$$

将式(1)无量纲化为:

$$\alpha\frac{\partial^5\eta}{\partial\xi^4\partial\tau}+\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^4}+2\mu\sqrt{\beta}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\tau}+[\mu^2+\gamma(1-\xi)]\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}=0。 \tag{3}$$

2　数值求解方法

运用 Galerkin 方法求解无量纲化运动微分方程式(3)。令:

$$\eta(\xi,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\xi)T_i(\tau) \tag{4}$$

其中 $\phi_i(\xi)$ 为梁的第 i 阶振型函数。

悬臂管道的振型函数为:

$$\phi_i(x)=\cosh\lambda_i x-\cos\lambda_i x-c_i(\sinh\lambda_i-\sin\lambda_i x) \tag{5}$$

其中 λ_i 满足特征方程:

$$\cosh\lambda_i\cos\lambda_i=-1 \tag{6}$$

系数 c_i 由式(7)给出:

$$c_i=\frac{\cosh\lambda_i+\cos\lambda_i}{\sinh\lambda_i+\sin\lambda_i}=\frac{\sinh\lambda_i-\sin\lambda_i}{\cosh\lambda_i+\cos\lambda_i} \tag{7}$$

将式(4)代入式(3),同时在方程左右两边乘以 $\phi_j(\xi)$,然后在[0,1]区间对 ξ 积分,并利用振型函数的正交性可得:

$$\alpha\lambda_j^4\dot{T}_j+\lambda_j^4T_j+(\mu^2+\gamma)\sum_{i=1}^{N}T_i\int_0^1\ddot{\phi}_i\phi_j\mathrm{d}\xi-\gamma\sum_{i=1}^{N}T_i\int_0^1\xi\ddot{\phi}_i\phi_j\mathrm{d}\xi+2\mu\sqrt{\beta}\sum_{i=1}^{N}\dot{T}_i\int_0^1\dot{\phi}_i\phi_j\mathrm{d}\xi+\ddot{T}_j=0$$

$$(j=1,2,\cdots,N) \tag{8}$$

为了求解方便,令

$$z=[z_1\ \cdots\ z_N\ z_{N+1}\ \cdots\ z_{2N}]^{\mathrm{T}}=[T_1\ \cdots\ T_N\ \dot{T}_1\ \cdots\ \dot{T}_N]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

将二阶线性微分方程组式(9)化为一阶线性微分方程组:

$$\dot{z}=Bz \tag{10}$$

其中系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中的非零元素为:

$$a_{j,N+j}=1$$

$$a_{N+j,i}=-\delta_{ij}\lambda_i^4-(\mu^2+\gamma)\int_0^1\ddot{\phi}_i\phi_j\mathrm{d}\xi+\gamma\int_0^1\xi\ddot{\phi}_i\phi_j\mathrm{d}\xi$$

$$a_{N+j,N+i}=-\delta_{ij}\alpha\lambda_i^4-2\mu\sqrt{\beta}\int_0^1\dot{\phi}_i\phi_j\mathrm{d}\xi$$

$$(i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,N)。 \tag{11}$$

3　计算结果与分析

通过采用不同的黏弹性系数 α、分布随从力 γ、流速 μ 和质量比 β,从而可以求出 B 的特征值 D。

特征值 D 可以用无量纲复频率 Ω 来代替表示:

$$\Omega=-\mathrm{i}D=\omega-\alpha\mathrm{i}=\Omega_{\mathrm{R}}+\mathrm{i}\Omega_{\mathrm{I}} \tag{12}$$

当 $q=0$ 时,问题退化为文献[10]的情况,这里取截取项数 $N=10$ 时计算的结果与文献[10]基本吻合,故本文的截取项数取 $N=10$。

3.1　临界流速随质量比、黏弹性系数和分布随从力的变化

图 2 给出了黏弹性系数 $\alpha=0.01$ 时,不同分布随从力 γ 作用下临界流速 μ_c 与质量比 β 的关系。从图 2 可以看出:在分布随从力作用下黏弹性悬臂输流管道的无量纲临界流速 μ_c 大致随分布随从力 γ 的增大而减小。在 $\gamma=50$ 这条曲线上,流速为 0 时已经发生失稳,但当 $\beta>0.59$ 时,系统可以在达到一定流速后再次获得稳定,如果流

速继续增加,则系统又会变为失稳状态(稳定区域的划分:在临界流速曲线以内的为稳定区域,在临界流速曲线以外的为不稳定区域)。

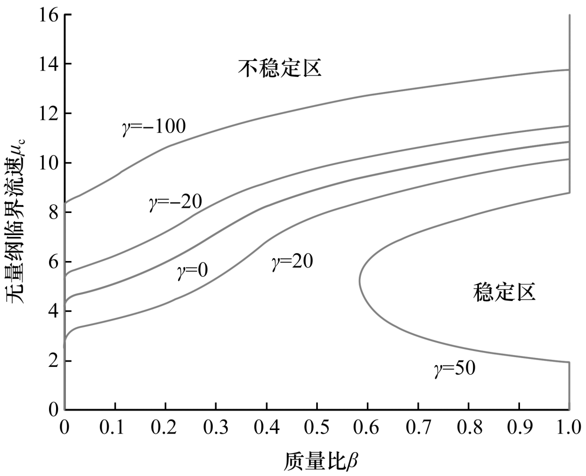

图 2　黏弹性悬臂输流管道临界流速随质量比的变化($\alpha=0.01$)

Fig. 2　Variation of critical velocity with mass ratio in viscoelastic cantilever pipeline($\alpha=0.01$)

图 3 给出了黏弹性系数 $\alpha=0.01$ 时,不同质量比 β 作用下临界流速 μ_c 与分布随从力 γ 的变化关系。从图 3 可以看出:所有的曲线都汇聚相交在横轴上 $\gamma=22.41$ 这个点,也即是分布随从力 γ 独自作用时的失稳临界值;在分布随从力 $\gamma<22.41$ 时,系统存在一个低流速稳定区,而当分布随从力 $\gamma>22.41$ 时,流速为零时就已经发生失稳,但是系统在增大到一定流速后会再次稳定。从图 2 和图 3 中均可以发现:随着质量比 β 的增大,系统的稳定区域也会进一步扩大。

图 4 给出了质量比 $\beta=0.2$ 时,不同黏弹性系数 α 作用下临界流速 μ_c 与分布随从力 γ 的变化关系。从图 4 可以看出:当黏弹性系数 $\alpha=0$,临界流速 μ_c 随分布随从力 γ 单调递减;而当黏弹性系数 $\alpha>0$,分布随从力 γ 大于一定值时,随着流速的增加,系统则会经历失稳、稳定和再失稳三个阶段。说明黏弹性的从无到有使得系统有一个质变的过程。从整个图形来看,分布随从力 $\gamma<-41.71$ 时,系统的稳定区域会随黏弹性系数 α 的增大而减小,此时黏弹性系数 α 不利于系统稳定。当分布随从力 $\gamma>-41.71$ 时,系统的稳定区域会随黏弹性系数 α 的增大而增大,此时黏弹性系数 α 有利于系统稳定。

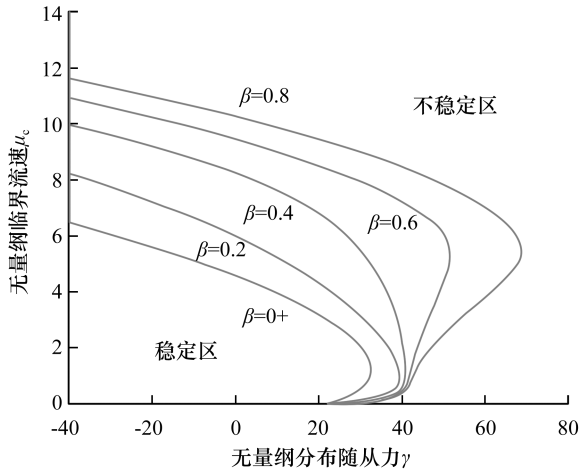

图 3　黏弹性悬臂输流管道临界流速随分布随从力的变化($\alpha=0.01$)

Fig. 3　Variation of critical velocity with distributed dependent force in viscoelastic cantilever pipeline($\alpha=0.01$)

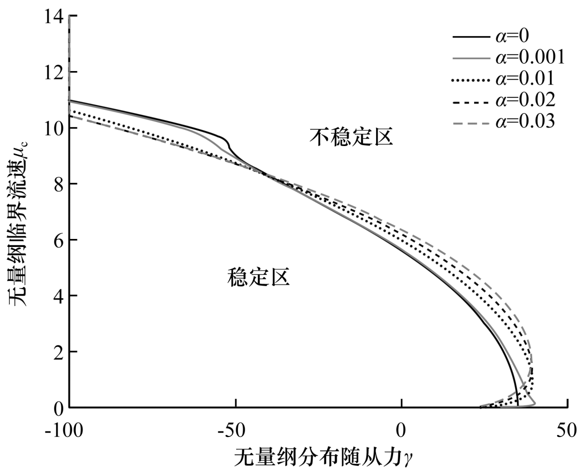

图 4　黏弹性悬臂输流管道临界流速随分布随从力的变化($\beta=0.2$)

Fig. 4　Variation of critical velocity with distribution and follower force in viscoelastic cantilever pipeline($\beta=0.2$)

3.2　复频率随流速的变化

图 5 给出了质量比 $\beta=0.2$,黏弹性系数 $\alpha=0$ 时,悬臂输流管道在不同分布随从力 γ 作用下的一、二阶复频率随流速 μ 的变化情况。从图 5 可以看出:当分布随从力 $\gamma=10$ 时,系统一阶模态的实部在流速 $\mu=5.93$ 的位置等于零,但是此时它虚部的两个分支都为正值,因此一阶模态并不会发生发散失稳。在流速 $\mu=4.68$ 时,二阶模态的虚部由正变为负,且其实部始终为正值,所以二阶

模态发生颤振失稳。分布随从力 γ 取 0 和 5 时的情况与分布随从力 γ 取 10 时的情况基本一致。综合来看,随着分布随从力 γ 的增加,系统二阶模态颤振失稳的临界流速会随之减小。

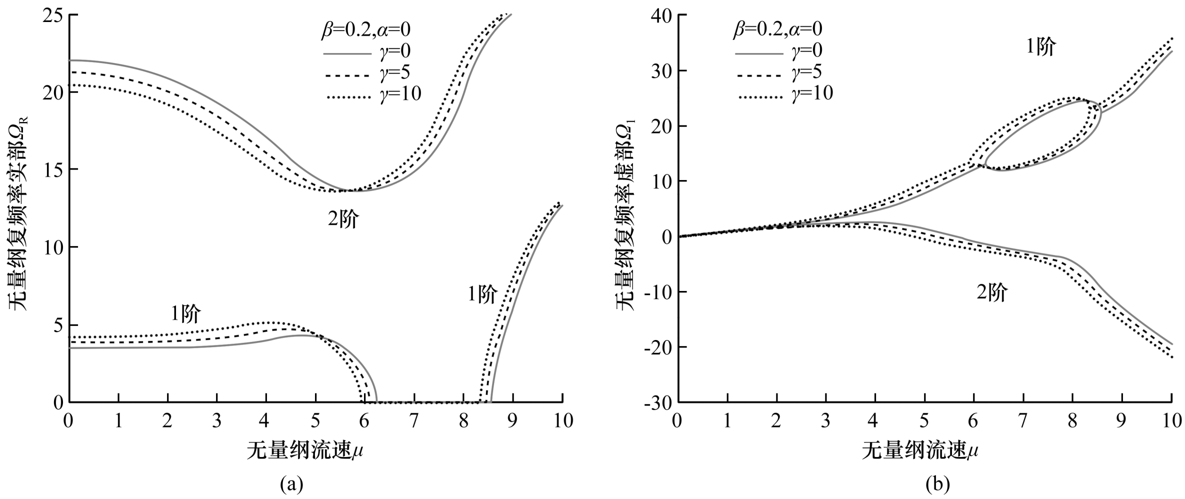

图 5　不同分布随从力下悬臂输流管道前两阶复频率与流速的关系

Fig. 5　Relationship between the first two order complex frequencies and the flow velocity of a cantilever pipeline under different distributed follower force

图 6 给出了质量比 $\beta = 0.2$,黏弹性系数 $\alpha = 0.01$ 时,黏弹性悬臂输流管道在不同分布随从力 γ 作用下的一、二阶复频率随流速的变化情况。从形状上来看,图 6 和图 5 大致是类似的。图 6 的一阶模态同样存在着一个复频率实部为 0 的区间,相应的虚部上也有两个分支,且这两个分支都为正,所以系统的一阶模态仍然是稳定的。系统二阶模态的虚部随着流速的增加由正值变为负值,而其实部一直为正值,所以系统二阶模态也同样会发生颤振失稳。由图 6 和图 5 比较可知,随着分布随从力 γ 的增加,系统的失稳临界流速会跟着减小,但是系统整体的稳定特性不会随之改变。

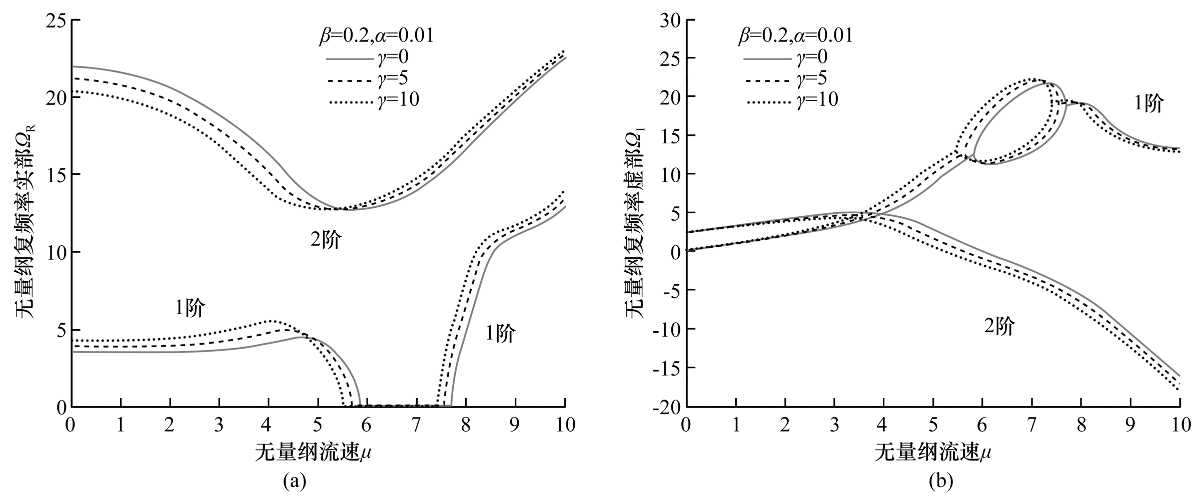

图 6　不同分布随从力下黏弹性悬臂输流管道前两阶复频率与流速的关系

Fig. 6　Relationship between the first two order complex frequencies and the flow velocity of a viscoelastic cantilever pipeline under different distributed follower force

图7给出了黏弹性悬臂输流管道在不同质量比β作用下的一、二阶复频率随流速μ的变化情况。图7相较于图5和图6,出现了两个一阶复频率实部为0的区间。当质量比$\beta=0.6$时,这两个区间分别是流速为$3.24\leqslant\mu\leqslant4.90$和$8.74\leqslant\mu\leqslant10.49$。与之对应的一阶模态的虚部都为正值,所以系统的一阶模态没有发生发散失稳,处于稳定状态。系统的二阶模态虚部在流速$\mu=8.98$时由正值变为负值,且其实部为正值,所以二阶模态此时发生颤振失稳。总的来说,二阶模态颤振失稳的临界流速随质量比β的增大而增大。

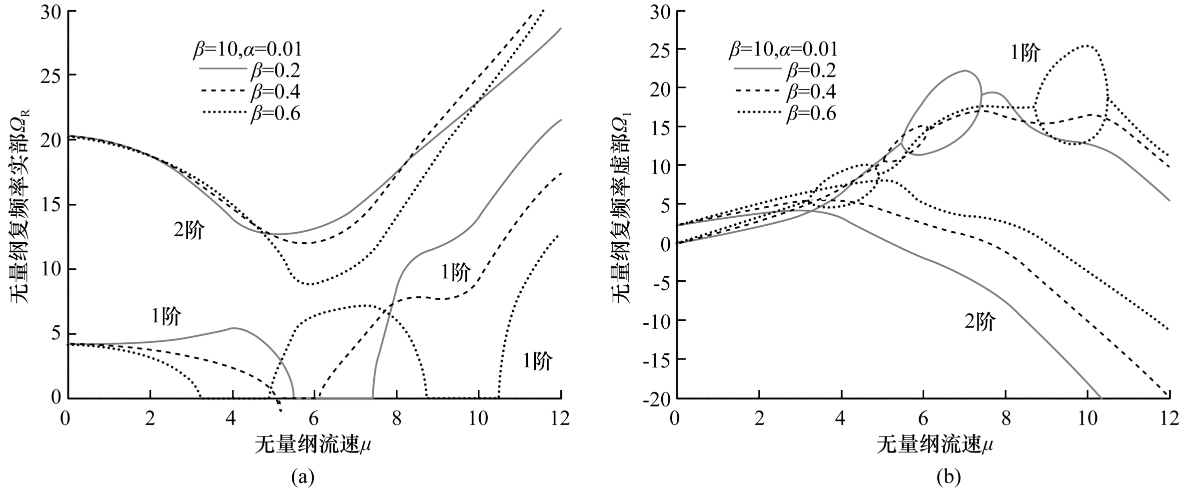

图7　不同质量比下黏弹性悬臂输流管道前两阶复频率与流速的关系

Fig. 7　Relationship between the first two order complex frequencies and the flow velocity of a viscoelastic cantilever pipeline with different mass ratios

图8给出了黏弹性悬臂输流管道在不同黏弹性系数α作用下的一、二阶复频率随流速μ的变化情况。从图8可以看出:当黏弹性系数$\alpha=0.03$时,系统一阶模态实部在流速为$4.88\leqslant\mu\leqslant6.17$的区间内为零,此时一阶模态的虚部为正值,因此系统一阶模态处于稳定状态。系统的二阶模态虚部在流速$\mu=6.05$时由正值变为负值,但其实部为正值,所以二阶模态此时会发生颤振失稳。由图8可以得出,黏弹性系数α取值增大时,系统二阶模态颤振失稳的临界流速也会增大。

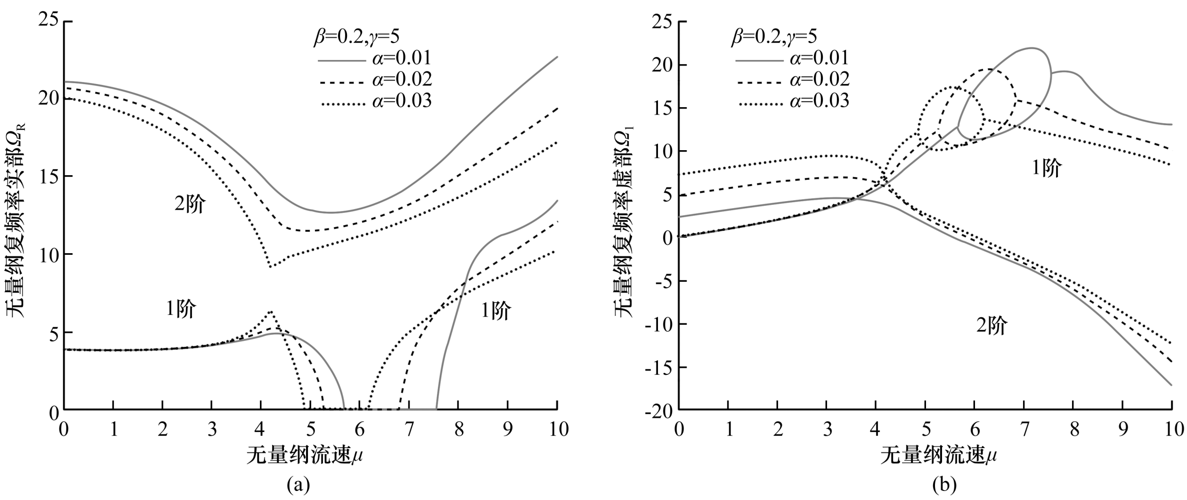

图8　不同黏弹性系数下黏弹性悬臂输流管道前两阶复频率与流速的关系

Fig. 8　Relationship between the first two order complex frequencies and the flow velocity of a viscoelastic cantilever pipeline with different viscoelastic coefficients

4 结　论

1)对于黏弹性悬臂输流管道,随着分布随从力的增加,系统的失稳临界流速会减小。

2)在分布随从力作用下,黏弹性悬臂输流管道失稳的临界流速会随质量比的增大而增大。

3)分布随从力 $\gamma>-41.71$ 时,黏弹性系数增加,黏弹性悬臂输流管道的临界流速会略微增大,影响不明显。

4)分布随从力和黏弹性系数不会改变悬臂输流管道的稳定性,系统的一阶模态是稳定的,而二阶模态会发生颤振失稳。悬臂输流管道的失稳方式主要是颤振失稳,没有发现发散失稳的情况。

参考文献:

[1] PAÏDOUSSIS M P,SEMLER C. Nonlinear dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe with an intermediate spring support[J]. Journal of fluids and structures, 1993,7(3):269-298.

[2] 张立翔,黄文虎,TIJSSELING A S. 输流管道流固耦合振动研究进展[J]. 水动力学研究与进展(A 辑), 2000(3):366-379.

[3] 黄益民,葛森,吴炜,等. 不同支撑刚度对输流管道系统动力学特性完整性影响[J]. 振动与冲击,2013,32(7):165-168.

[4] WANG Y H,CHEN Y M. Shifted legendre polynomials algorithm used for the dynamic analysis of viscoelastic pipes conveying fluid with variable fractional order model [J]. Applied mathematical modelling,2020,81:159-176.

[5] 王忠民,赵凤群,冯振宇,等. 非守恒粘弹性输流管道系统的动力分析[J]. 机械工程学报,2002,38(4): 17-21.

[6] 张战午. 粘弹性输流管道的动力特性和稳定性分析[D]. 西安:西安理工大学,2003:27-38.

[7] 赵凤群,王忠民. 随从力作用下简支 Kelvin 模型粘弹性输流管道的稳定性分析[J]. 机械科学与技术, 2011,30(9):1524-1527;1532.

[8] KHUDAYAROV B A,TURAEV F J. Mathematical simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid[J]. Applied mathematical modelling,2018,66: 662-679.

[9] HUANG Q X,LIN T,SAFARPOUR M. Flow-induced vibration attenuation of a viscoelastic pipe conveying fluid under sinusoidal flow using a nonlinear absorber[J]. Mechanics based design of structures and machines, 2020,50(5):1-31.

[10] 刘颖. 粘弹性输流管道的稳定性和稳态响应分析[D]. 衡阳:南华大学,2021:47-54.

[11] ASKARIAN A R,PERMOON M R,ZAHEDI M,et al. Stability analysis of viscoelastic pipes conveying fluid with different boundary conditions described by fractional Zener model[J]. Applied mathematical modelling,2022, 103:750-763.

[12] 金基铎,梁峰,杨晓东,等. 两端固定输流管道参数共振的实验研究[J]. 振动与冲击,2007,26(11):169-173;177;191.

[13] 包日东,金志浩,闻邦椿. 端部约束悬臂输流管道的分岔与混沌响应[J]. 振动与冲击,2008,27(5):36-39;43;172.

[14] JIN J D,ZHANG Y F,YANG X D. Stability analysis of fluid-conveying pipes with supported ends[J]. Advanced science letters,2012,15(1):133-138.

[15] 颜雄,魏莎,毛晓晔,等. 两端弹性支承输流管道固有特性研究[J]. 力学学报,2022,54(5):1341-1352.

[16] 郭长青,刘红涛,王晓锋,等. 输流管道在分布随从力作用下的振动和稳定性[J]. 工程力学,2010,27(4):190-196.

[17] 许锋,郭长青,黄建红. 分布随从力作用下含裂纹输流管道的稳定性[J]. 油气储运,2013,32(7): 715-720.

[18] HUANG J H,GUO C Q. The mode and nature frequency of pipes conveying fluid with distributed follower force on two-parameter foundation[J]. Advanced materials research,2014,3016(增刊):698-701.