

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2020.06.010

污染环境中带时滞的随机竞争模型生存性分析

陈沙沙,廖新元*,李佳季

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘要:对一类在污染环境下带时滞的随机种群竞争模型进行研究,利用 Itô 公式以及相关理论,得到两种群灭绝、非平均持久、弱平均持久及强平均持久的充分条件,分析灭绝与弱平均持久生存的阈值,并通过 MATLAB 仿真验证主要结果。

关键词:种群竞争时滞模型;污染环境;随机干扰;生存分析

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

文章编号:1673-0062(2020)06-0055-07

Survival Analysis of Stochastic Competition Model with Time Delay in Polluted Environment

CHEN Shasha, LIAO Xinyuan*, LI Jiaji

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper studied a kind of stochastic population competition model with time delay in polluted environment. By using the Itô formula and related theory, it obtained the sufficient conditions of two species extinction, non average persistence, weak average persistence and strong average persistence. Finally, it analyzed the threshold of extinction and weak average persistence, and verified the main results by simulation.

key words: population competition delay model; polluted environment; random interference; survival analysis

0 引言

种群的生存不可避免地受到各种随机干扰的影响,不同环境噪声对其影响不同^[1],因此在多数情况下,随机干扰因素不容忽略,为此,许多学者在确定性模型的基础上引入随机种群模型,已

得到较好的结果^[2-5],例如文献[6]揭示了环境噪声能抑制种群增长。随着社会经济的快速发展,环境污染问题日益突出,环境污染对种群生存影响的研究必不可少。文献[7]对污染环境中随机种群竞争模型生存分析和排斥问题进行了研究。高原鼠兔在藏北草原生态系统中扮演着重要

收稿日期:2020-06-01

作者简介:陈沙沙(1995—),女,硕士研究生,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:1476075481@.com。通信作者:廖新元(1965—),男,教授,博士,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:lx98@hotmail.com

的角色,人类毒杀、草原环境恶化及天敌捕食,导致高原鼠兔的生存受到极大威胁^[8],本文将对其进行生存分析并给出阈值。

1 模型建立

高原鼠兔是藏北草原大面积退化的主要元凶之一,52 只成年鼠兔每日消耗牧草量相当于 1 头绵羊日食量,因此高原鼠兔被认定为是一种与当地家养牲畜争夺食物的有害生物^[9],当地人对其进行了大规模的毒杀,但高原鼠兔是藏北草原唯一建造洞穴的小型哺乳动物^[10],它的洞穴为多种动物提供藏身和繁殖的场所,而且高原鼠兔更是小型哺乳类和猛禽类动物的丰富食物源,尤其冬季几乎是唯一食物源,因此它在多方面对维护藏北草原生态系统功能起着关键作用。面对自然和人为因素^[11-12]的“两面攻势”,鼠兔的生存受到极大影响。

经典二维 Lotka-Volterra 模型^[13]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) [r_{10} - a_{11}x_1(t) - a_{12}x_2(t)] \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t) [r_{20} + a_{21}x_1(t) - a_{22}x_2(t)] \end{cases} \quad (1)$$

$x_i(t) > 0, r_{i0} > 0, a_{ij} > 0, (i = 1, 2; j = 1, 2)$, 其中 $x_1(t)$ 表示 t 时刻食饵种群密度, $x_2(t)$ 表示 t 时刻捕食者种群密度, $r_{i0} (i = 1, 2)$ 表示种群内禀增长率, 对于 $a_{ij}, (i = 1, 2; j = 1, 2)$, 当 $i = j$ 时表示种内竞争系数, 当 $i \neq j$ 时表示种间竞争系数。对于该种群动力系统而言, 捕食者 $x_2(t)$ 的食物源除了 $x_1(t)$ 外, 还有与 $x_1(t)$ 共同竞争的其他食物。

天敌在捕食高原鼠兔后繁衍生息并非瞬间发生, 需要一段时间来消化吸收以达到种群增长的目的, 显然此现象存在消化时滞。一方面由于气候变暖等自然条件, 使藏北草原大量水土流失、不断退化; 另一方面, 人们广泛采取药物灭鼠措施, 虽毒性在不断减弱, 但也不可避免的毒死部分天敌, 如鸟类和兽类, 诸如此类的外部因素给草原物种生存带来不同程度的影响, 以此记 $C_o(t)$ 表示 t 时刻外部因素对个体生物的影响量, $C_e(t)$ 表示 t 时刻外部因素对生境的影响量。假设种群没有迁移且同质并引入随机干扰^[14]; 设白噪声主要影响种群内禀增长率, 即 $r_{i0} \rightarrow r_{i0} + \sigma_i dB_i(t)$ 其中 $dB_i(t)$ 是白噪声, σ_i^2 是 Brown 运动强度。

从式(1), 引入随机种群动力系统如下:

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_1(t) [r_{10} - r_{11}C_o(t) - a_{11}x_1(t)]dt - \\ \quad x_1(t)a_{12}x_2(t) + \sigma_1x_1(t)dB_1(t) \\ dx_2(t) = x_2(t) [r_{20} - r_{21}C_o(t) + a_{21}x_1(t - \tau)]dt - \\ \quad a_{22}x_2(t)x_2(t) + \sigma_2x_2(t)dB_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $x_i(t) > 0, i = 1, 2$ 。 r_{i0} 是物种 i 的内禀增长率, r_{ii} 是影响强度至于外部因素动力系统, 假设:

$$\begin{cases} \frac{dC_o(t)}{dt} = kC_e(t) - (g + m)C_o(t) \\ \frac{dC_e(t)}{dt} = -hC_e(t) + u(t) \end{cases} \quad (3)$$

具有初值 $C_o(0) = C_e(0) = 0$, 其中 k, g, m, h 均为正常数, $kC_e(t) - gC_o(t)$ 表示 t 时刻鼠兔从草原环境中吸收的外部影响量, $mC_o(t)$ 表示 t 时刻鼠兔对外部影响的自我消化量, $-hC_e(t)$ 表示 t 时刻草原环境对外部因素的自我消化量, $u(t)$ 表示外部因素对草原环境的输入率, 关于模型的建立详情可以参考文献[7]。式(2)和式(3)联立将记作模型 M , 本文将对模型 M 进行生存分析。

为了方便, 给出以下记号及定义:

$$R_+ := [0, +\infty);$$

$$R_+^0 := \{a \mid a > 0, a \in R\}$$

$$x^* := \limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t);$$

$$x_* := \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t);$$

$$[x(t)] := \int_0^t x(s) ds / t;$$

$$\Phi_1 := a_{22}r_{11} - a_{12}r_{21};$$

$$\Phi_2 := a_{11}r_{21} + a_{21}r_{11};$$

$$\Delta := a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}$$

$$\delta := r_{11}(r_{20} - \sigma_2^2/2) - r_{21}(r_{10} - \sigma_1^2/2);$$

$$\Delta_1 := a_{22}(r_{10} - \sigma_1^2/2) - a_{12}(r_{20} - \sigma_2^2/2);$$

$$\Delta_2 := a_{11}(r_{20} - \sigma_2^2/2) + a_{21}(r_{10} - \sigma_1^2/2)$$

定义: 1. 称种群 $x(t)$ 灭绝, 若

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{a. s.}$$

2. 称种群 $x(t)$ 非平均持久, 若

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t)] = 0 \quad \text{a. s.}$$

3. 称种群 $x(t)$ 弱平均持久, 若

$$[x(t)]^* > 0 \quad \text{a. s.}$$

4. 称种群 $x(t)$ 强平均持久, 若

$$[x(t)]_* \geq 0 \quad \text{a. s.}$$

2 生存分析

本文有一个基本的假设:

$$r_{10} > \sigma_1^2/2, r_{20} > \sigma_2^2/2, \Delta_1 > 0.$$

引理1 对于模型 M , 有

$$\{\ln x_i(t)/t\}^* \leq 0, (i=1, 2).$$

引理2 设 $\mu(t) \in C[\Omega \times R_+, R_+^0]$,

(i) 若存在正常数 λ_0, T 及 $\lambda \geq 0$ 使得

$$\ln \mu(t) \leq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t \mu(s) ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(t)$$

对 $t \geq T$ 成立, 其中 $\alpha_i (i=1, 2)$ 为常数, 则

$$[\mu(t)]^* \leq \lambda/\lambda_0 \quad \text{a. s.}$$

(ii) 若存在正常数 λ_0, T 及 $\lambda \geq 0$ 使得

$$\ln \mu(t) \geq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t \mu(s) ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(t)$$

对 $t \geq T$ 成立, 其中 $\alpha_i (i=1, 2)$ 为常数, 则

$$[\mu(t)]_* \geq \lambda/\lambda_0 \quad \text{a. s.}$$

证明详情见文献[7]。现在建立阈值定理。

定理1 对模型 M 中的种群 $x_1(t) (x_2(t))$, 若 $[C_0(t)]_* > \varphi(\psi)$, 则 $x_1(t) (x_2(t))$ 将会灭绝。其中

$$\varphi := \begin{cases} (r_{10} - \sigma_1^2/2)/r_{11}, \delta \leq 0 \\ \Delta_1/\Phi_1, \delta > 0 \end{cases}$$

$$\psi := \begin{cases} \Delta_2/\Phi_2, \delta \leq 0 \\ (r_{20} - \sigma_2^2/2)/r_{21}, \delta > 0. \end{cases}$$

证明: 先考虑 $x_1(t)$ 。情形1: 若 $\delta \leq 0$, 则

$$r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} < r_{11} [C_0(t)]_*.$$

对式(2)应用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} &= r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} - r_{11} [C_0(t)] - a_{11} [x_1(t)] - \\ &\quad a_{12} [x_2(t)] + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} &= r_{20} - \frac{\sigma_2^2}{2} - r_{21} [C_0(t)] + \\ &\quad \frac{\int_0^t x_1(s - \tau) ds}{t} - a_{22} [x_2(t)] + \\ &\quad \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} = r_{20} - \frac{\sigma_2^2}{2} - r_{21} [C_0(t)] + \\ &\quad \frac{\int_0^{t-\tau} x_1(s) ds}{t} + a_{21} \frac{\int_{-\tau}^0 x_1(s) ds}{t} - \\ &\quad a_{22} [x_2(t)] + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t} \end{aligned} \quad (5)$$

将 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$ 代入式(4)可以得到

$$\left\{ \ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)} / t \right\}^* \leq r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} - r_{11} [C_0(t)]_* < 0$$

易知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad \text{a. s.}$$

情形2: 若 $\delta > 0$, 那么 $\Phi_1 [C_0(t)]_* > \Delta_1$, 计算(4) $\times a_{22} - (5) \times a_{12}$

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} - a_{12} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} &= \Delta_1 - \Phi_1 [C_0(t)]_* - \\ &\quad \frac{\int_0^{t-\tau} x_1(s) ds}{t} - a_{12} a_{21} \frac{\int_{-\tau}^0 x_1(s) ds}{t} - \\ &\quad a_{11} a_{22} [x_1(t)] + \frac{a_{22} \sigma_1 B_1(t) - a_{12} \sigma_2 B_2(t)}{t} \end{aligned} \quad (6)$$

任意 $t > T > \tau$, 利用引理1 及 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B(t)}{t} = 0$

$$a_{22} \left\{ \ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)} / t \right\}^* \leq \Delta_1 - \Phi_1 [C_0(t)]_* + \varepsilon < 0$$

易知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0 \quad \text{a. s.}$$

当 $[C_0(t)]_* > \psi$ 时, 类似可证种群 $x_2(t)$ 将会灭绝。

定理2 对模型 M 中的种群 $x_1(t) (x_2(t))$, 若 $[C_0(t)]_* = \varphi([C_0(t)]_* = \psi)$, 则 $x_1(t) (x_2(t))$ 将会非平均持久。

证明: 先考虑 $x_1(t)$ 。情形1: 若 $\delta \leq 0$, 那么 $r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} = r_{11} [C_0(t)]_*$ 。对 $\forall \varepsilon > 0, \exists T$ 使得 $[C_0(t)] > [C_0(t)]_* - \varepsilon$ 对 $\forall t \geq T$ 都成立。将其代入式(4)

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} &\leq r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} + r_{11} \varepsilon - r_{11} [C_0(t)]_* - \\ &\quad a_{11} [x_1(t)] + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t}, \end{aligned}$$

因此下列不等式成立

$$\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)} \leq (r_{11} \varepsilon) t - a_{11} \int_0^t x_1(s) ds + \sigma_1 B_1(t),$$

根据引理2 知 $[x_1(t)]^* \leq \frac{r_{11} \varepsilon}{a_{11}}$, 由 ε 任意性

$[x_1(t)]^* \leq 0$ 。同时注意到 $[x_1(t)]^* \geq 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1(t)] = 0$ 。

情形2: 若 $\delta > 0$, 那么 $\Phi_1 [C_0(t)]_* = \Delta_1$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists T > \tau$ 使得, 对 $\forall t \geq T$ 都有

$$\left| a_{12} \ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)} / t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$[C_o(t)] \geq [C_o(t)]_* - \frac{\varepsilon}{2\Phi_1},$$

将其代入式(6)

$$a_{22} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} \leq \varepsilon + \Delta_1 - \Phi_1 [C_o(t)]_* -$$

$$a_{12} a_{21} \frac{\int_0^{t-\tau} x_1(s) ds}{t} - a_{12} a_{21} \frac{\int_{-\tau}^0 x_1(s) ds}{t} -$$

$$a_{11} a_{22} [x_1(t)]_* + \frac{a_{22} \sigma_1 B_1(t) - a_{12} \sigma_2 B_2(t)}{t}$$

因此

$$a_{22} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} \leq \varepsilon - a_{11} a_{22} [x_1(t)]_* +$$

$$\frac{a_{22} \sigma_1 B_1(t) - a_{12} \sigma_2 B_2(t)}{t}.$$

根据引理 2 知 $[x_1(t)]_* \leq \frac{\varepsilon}{a_{11} a_{22}}$, 由 ε 的任意性有 $[x_1(t)]_* \leq 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1(t)] = 0$.

当 $[C_o(t)]_* = \psi$ 时, 类似可证 $x_2(t)$ 将会非平均持久。

定理 3 对于模型 M 中的种群 $x_1(t)(x_2(t))$, 若 $[C_o(t)]_* < \varphi(\psi)$, 则 $x_1(t)(x_2(t))$ 将会弱平均持久。

证明: 首先考虑 $x_1(t)$ 。情形 1: 若 $\delta \leq 0$, 则 $r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} > r_{11} [C_o(t)]_*$ 。引理 1 和式(4)

$$a_{11} [x_1(t)]_* + a_{12} [x_2(t)]_* \geq r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} -$$

$$r_{11} [C_o(t)]_* > 0 \quad (7)$$

因此 $[x_1(t)]_* > 0$ 。

反之, 如果 $\forall \omega \in \{[x_1(t)]_* = 0\}$, 那么 $[x_2(t)]_* > 0$ 。由 $\delta \leq 0$ 可知

$$\frac{r_{11}}{r_{21}} < r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} / r_{20} - \frac{\sigma_2^2}{2}.$$

此外由 $\Delta_1 > 0$ 可以得 $\frac{r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2}}{r_{20} - \frac{\sigma_2^2}{2}} > \frac{a_{12}}{a_{22}}$, 综上可知

$$\frac{r_{11}}{r_{21}} \in (0, +\infty).$$

(i) 若 $\frac{r_{11}}{r_{21}} \in \left(0, \frac{a_{12}}{a_{22}}\right]$, 则 $\Phi_1 \leq 0$ 。根据引理 1

和式(6) 以及 $[x_1(t)]_* = 0$ 知

$$-a_{12} \left\{ \ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)} / t \right\}^* \geq \Delta_1 - \Phi_1 [C_o(t)]_* + \varepsilon > 0,$$

从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$, 矛盾。

(ii) 若 $\frac{r_{11}}{r_{21}} \in \left(\frac{a_{12}}{a_{22}}, +\infty\right)$, 则 $\Phi_1 > 0$ 。计算

$$(5) \times r_{11} - (4) \times r_{21}$$

$$-r_{21} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} + r_{11} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} = \delta + \Phi_2 [x_1(t)] -$$

$$\Phi_1 [x_2(t)] - r_{11} a_{21} \frac{\int_{t-\tau}^t x_1(s) ds}{t} +$$

$$r_{11} a_{21} \frac{\int_{-\tau}^0 x_1(s) ds}{t} + \frac{r_{11} \sigma_2 B_2(t) - r_{21} \sigma_1 B_1(t)}{t} \quad (8)$$

由引理 1 和 $[x_1(t)]_* = 0$

$$r_{11} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} \leq \delta - \Phi_1 [x_2(t)]_* + \varepsilon < 0,$$

从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$, 矛盾。

情形 2: 如果 $\delta = 0$, 那么 $r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} > r_{11} [C_o(t)]_*$,

此时式(7) 依然成立, 故 $[x_1(t)]_* > 0$ 。否则若 $\forall \omega \in \{[x_1(t)]_* = 0\}$, 则 $[x_2(t)]_* > 0$ 。由引理 1, 及式(8)

$$r_{11} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} \leq \delta + \varepsilon - \Phi_1 [x_2(t)]_* +$$

$$\frac{r_{11} \sigma_2 B_2(t) - r_{21} \sigma_1 B_1(t)}{t},$$

根据引理 2 可知, $[x_2(t)]_* \leq \frac{\delta + \varepsilon}{\Phi_1}$, 由 ε 的任意性及 $\delta = 0$ 可见, $[x_2(t)]_* \leq 0$, 矛盾。

情形 3: 若 $\delta > 0$, 又 $\Delta_1 > 0$ 则 $\Phi_1 > 0$, 且

$\varphi = \frac{\Delta_1}{\Phi_1} > 0$, 将 $[C_o(t)]_* < \varphi$ 代入式(7)

$$a_{11} [x_1(t)]_* + a_{12} [x_2(t)]_* \geq \frac{a_{12} \delta}{\Phi_1} > 0.$$

因此 $[x_1(t)]_* > 0$ 。

类似的可证, 当 $[C_o(t)]_* < \psi$ 时, $x_2(t)$ 将弱平均持久。

定理 4 对模型 M , 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]$ 有界, 且

$$\Delta_1 - \Phi_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)] > 0,$$

$$\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)] > 0.$$

则种群 $x_1(t)$ ($x_2(t)$) 将会强平均持久。此外

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1(t)] = (\Delta_1 - \Phi_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_2(t)] = (\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta。$$

证明: 计算(4) $\times a_{21}$ + (5) $\times a_{11}$ 得

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} + a_{21} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} &= \Delta_2 - \Phi_2 [C_o(t)] - \\ &\frac{\int_{t-\tau}^t x_1(s) ds}{t} + a_{11} a_{21} \frac{\int_{-\tau}^0 x_1(s) ds}{t} - \\ &\Delta [x_2(t)] + \frac{a_{11} \sigma_2 B_2(t) + a_{21} \sigma_1 B_1(t)}{t} \end{aligned} \quad (9)$$

对 $\forall \varepsilon, t > T$ 时,

$$\left| a_{21} \ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)} / t \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| a_{11} a_{21} \int_{-\tau}^0 x_1(s) ds / t \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

其代入式(9)得

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} &\leq \Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)] + \varepsilon - \\ &\Delta [x_2(t)] + \frac{a_{11} \sigma_2 B_2(t) + a_{21} \sigma_1 B_1(t)}{t}, \end{aligned}$$

根据引理2及 ε 的任意性

$$[x_2(t)]^* \leq (\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta \quad (10)$$

将式(10)代入式(4)中

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} &\geq r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} - r_{11} \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)] - \\ &a_{11} [x_1(t)] - a_{12} \frac{\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]}{\Delta} + \\ &\frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} &\geq \frac{a_{11} (\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)])}{\Delta} - \\ &a_{11} [x_1(t)] + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t}。 \end{aligned}$$

根据引理2

$$[x_1(t)]^* \geq (\Delta_1 - \Phi_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta \quad (11)$$

对 $\forall t > T > \tau$, 将式(11)代入式(5)中

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} &\geq r_{20} - \frac{\sigma_2^2}{2} - r_{21} \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)] + \\ &\frac{\Delta_1 - \Phi_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]}{a_{21} \Delta} - \\ &a_{22} [x_2(t)] + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t}, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_2(t)}{x_2(0)}}{t} &\geq \frac{a_{22} (\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)])}{\Delta} - \\ &a_{22} [x_2(t)] + \frac{\sigma_2 B_2(t)}{t}, \end{aligned}$$

由引理2

$$[x_2(t)]^* \geq (\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta \quad (12)$$

将式(12)代入式(4)中

$$\begin{aligned} \frac{\ln \frac{x_1(t)}{x_1(0)}}{t} &\leq r_{10} - \frac{\sigma_1^2}{2} - r_{11} \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)] - \\ &a_{11} [x_1(t)] - a_{12} \frac{\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]}{\Delta} + \frac{\sigma_1 B_1(t)}{t} \end{aligned}$$

同理可得

$$[x_1(t)]^* \leq (\Delta_1 - \Phi_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta \quad (13)$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1(t)] &= (\Delta_1 - \Phi_1 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} [x_2(t)] &= (\Delta_2 - \Phi_2 \lim_{t \rightarrow +\infty} [C_o(t)]) / \Delta \end{aligned}$$

证毕。

3 数值模拟

利用 Milstein 数值仿真方法^[15]来说明本文的主要结果。首先考虑模型 M 相对应的离散化系统模型:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + x_k [r_{10} - r_{11} C_o(k\Delta t) - a_{11} x_k] \Delta t - \\ \quad x_k a_{12} y_k \Delta t + \sigma_1 x_k \sqrt{\Delta t} \xi_k + \\ \quad \sigma_1^2 x_k^2 (\xi_k^2 \Delta t - \Delta t) / 2 \\ y_{k+1} = y_k + y_k [r_{20} - r_{21} C_o(k\Delta t) + a_{21} x_{t-\tau}] \Delta t - \\ \quad y_k a_{22} y_k \Delta t + \sigma_2 y_k \sqrt{\Delta t} \zeta_k + \\ \quad \sigma_2^2 y_k^2 (\zeta_k^2 \Delta t - \Delta t) / 2 \end{cases}$$

其中 ξ_k 和 ζ_k ($k=1, 2, \dots, n$) 都是服从 $N(0, 1)$ 的 Gauss 随机变量。利用 Matlab 软件作出数值仿真

模拟图。

令 $a_{11}=0.5, a_{21}=0.4, a_{12}=0.5, a_{22}=0.5, \tau=1, \Delta t=0.1, r_{10}=0.1, r_{20}=0.055, \sigma_1=\sigma_2=0.2, r_{11}=0.61, r_{21}=0.6$, 易知 $\delta < 0$ 。图 1(a), 图 1(b), 图 1(c) 只有外部因 $C_0(t)$ 不同。图 1(a) 中 $C_0(t)=0.2+0.01\sin t$, 则 $\psi < \varphi < [C_0(t)]_*$, 根据定理 1, 高

原鼠兔及其天敌都将会灭绝。在图 1(b) 中 $C_0(t)=0.1+0.01\sin t$, 则 $\psi < [C_0(t)]_* < \varphi$, 根据定理 2, 鼠兔将会非平均持久, 其天敌将会灭绝。在图 1(c) 中 $C_0(t)=0.001+0.001\sin t$, 则有 $[C_0(t)]_* < \psi < \varphi$, 根据定理 3, 高原鼠兔及其天敌都将会弱平均持久。

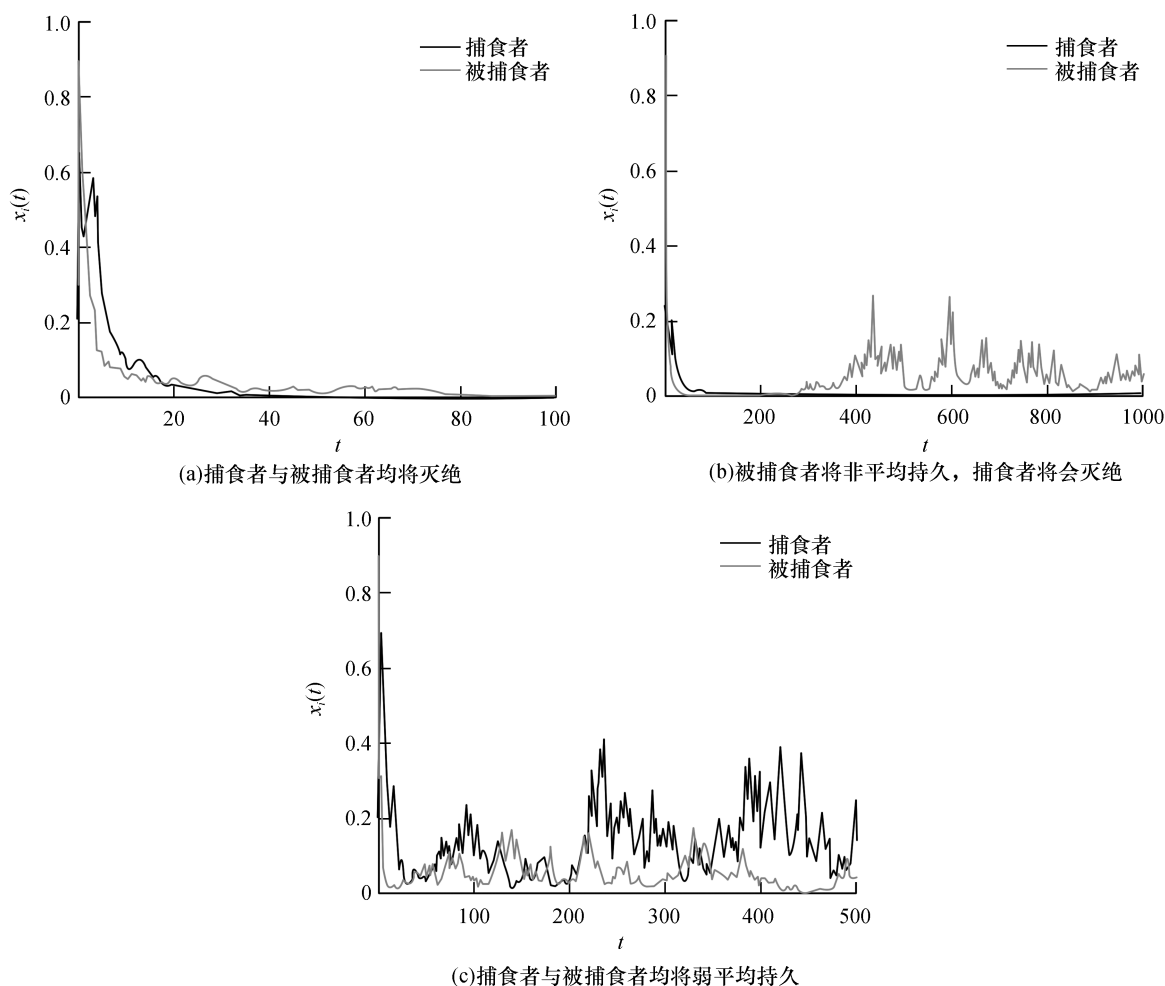


图 1 种群密度与时间关系图

Fig. 1 Plot of population density versus time

令 $a_{11}=0.5, a_{21}=0.4, a_{12}=0.5, a_{22}=0.5, \tau=1, \Delta t=0.1, r_{10}=0.4, r_{20}=0.3, \sigma_1=\sigma_2=0.2, r_{11}=0.2, r_{21}=0.1, C_0(t)=0.005+0.001\sin t$, 根据定理 4, 高原鼠兔及其天敌都将会强平均持久(如图 2 所示)。此外

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_1(t)] = 0.1111$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x_2(t)] = 0.6489$$

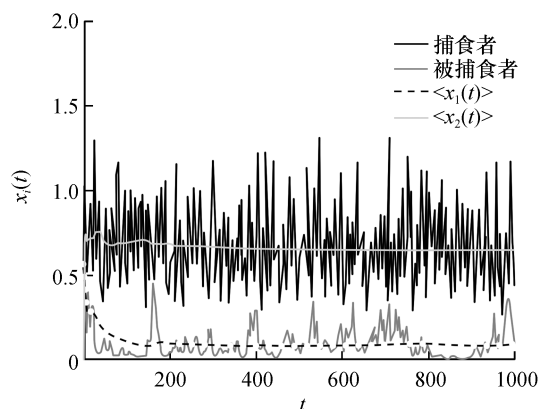


图 2 种群密度与时间关系图

Fig. 2 Plot of population density versus time

4 结 论

不难看出,高原鼠兔及其天敌的生存性依赖于 $[C_0(t)]_*$ 、 φ 和 ψ 三者的值,由定理1至定理3知,其灭绝与弱平均持久生存的阈值是 $[C_0(t)]_* - \varphi$ 及 $[C_0(t)]_* - \psi$, 当 $[C_0(t)]_* - \varphi > 0$ 且 $[C_0(t)]_* - \psi > 0$ 时,鼠兔及其天敌都将灭绝,当 $[C_0(t)]_* - \varphi < 0$ 且 $[C_0(t)]_* - \psi < 0$ 时,鼠兔及其天敌将弱平均持久生存。即是 $\delta < 0$, 则有 $\psi < \varphi$, 倘若 $[C_0(t)]_* > \varphi$, 那么高原鼠兔及其天敌均将会灭绝,倘若 $\psi < [C_0(t)]_* < \varphi$, 那么其天敌将会灭绝而鼠兔将会弱平均持久生存,倘若 $[C_0(t)]_* < \varphi$, 那么鼠兔及其天敌都将会弱平均持久,而定理4中条件 $\lim_{t \rightarrow +\infty} [C_0(t)]$ 不能用 $[C_0(t)]_*$ 代替,比之条件更强,此时鼠兔和天敌的数量将处于一个动平衡状态,这也符合实际草原生态情况。换言之,当外部因素对种群的影响较大时,使之灭绝的不仅有高原鼠兔,食物链中更高一级的肉食性动物也因食物断链而消失,降低了藏北草原生态系统的多样性,生态系统一旦遭到破坏其恢复周期相当长,这也说明比之破坏草原环境 and 对其进行一味的捕杀,我们更需要维护好藏北草原的生态平衡,以推动草原可持续发展。

参考文献:

- [1] MAO X. Delay population dynamics and environmental noise [J]. Stochastics and dynamics, 2005, 5 (2): 149-162.
- [2] EVANS L C. An introduction to stochastic differential equations [J]. American mathematical society, 2013, 82: 978-989.
- [3] MAO X. Stochastic stabilization and destabilization [J]. Systems & control letters, 1994, 23 (4): 279-290.
- [4] BAHAR A, MAO X. Stochastic delay Lotka-Volterra model [J]. Journal of mathematical analysis & applications, 2004, 292(2): 364-380.
- [5] LIAO X Y, CHEN Y M. Stability of a stochastic discrete mutualism system [J]. Advances in difference equations, 2019(1): 111.
- [6] MAO X, MARION G, RENSHAW E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics [J]. Stochastic processes and their applications, 2002, 97 (1): 95-110.
- [7] LIU M, WANG K, WU Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle [J]. Bulletin of mathematical biology, 2011, 73(9): 1969.
- [8] 仓决卓玛, 李建川, 索朗次仁, 等. 高原鼠兔对藏北草原的危害及其主要天敌 [J]. 西藏科技, 2010 (1): 65-67.
- [9] LI X, WANG Z, WANG D, et al. Livestock grazing impacts on plateau pika (*Ochotona curzoniae*) vary by species identity [J]. Agriculture ecosystems & environment, 2019, 275: 23-31.
- [10] TANG Z, ZHANG Y, CONG N, et al. Spatial pattern of pika holes and their effects on vegetation coverage on the Tibetan Plateau: An analysis using unmanned aerial vehicle imagery [J]. Ecological indicators, 2019, 107: 105551.
- [11] 冯云飞, 李猛, 李少伟, 等. 2010—2017 年藏北高寒退化草地禁牧恢复效果评价 [J]. 草业科学, 2019, 36(4): 1148-1162.
- [12] 李波, 桑珠, 许军基, 等. 2 种不育剂和 1 种抗凝血剂对藏北草原高原鼠兔的控制效果 [J]. 植物护, 2015, 41(6): 230-234.
- [13] 王克. 随机生物数学模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2010: 19-22.
- [14] 段彩霞, 廖新元, 吴小花. 一类带时滞的非自治随机竞争模型的持久性分析 [J]. 数学理论与应用, 2014, 34(3): 5-13.
- [15] CALZOLARI A, FLORCHINGER P, NAPPO G. Nonlinear filtering for stochastic systems with fixed delay: Approximation by a modified Milstein scheme [J]. Computers & mathematics with applications, 2011, 61(9): 2498-2509.