DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2020. 05. 014

带环境迁移项的格上 Lotka-Volterra 竞争系统的 Squeezing 定理

李 江[1],王红勇[2*]

(1. 南华大学 人力资源处,湖南 衡阳 421001;2. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:运用最值原理,研究了带环境迁移项的格上 Lotka-Volterra 竞争系统强制波的严格单调性。据此,利用上下解方法及比较原理,证明了 Squeezing 定理。从而能够给出相应柯西问题解的一个估计,并为全局稳定性的分析提供工具。

关键词:Lotka-Volterra 系统;强制波;Squeezing 定理;格;环境迁移;稳定性

中图分类号:O175 **文献标志码**:A

文章编号:1673-0062(2020)05-0093-04 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

Squeezing Theorem of the Lattice Lotka-Volterra Competition System in a Shifting Environment

LI Jiang[1], WANG Hongyong[2*]

(1. Human Resources Department, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China; 2. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The strict monotonicity of the forced waves of a lattice Lotka-Volterra competition system in a shifting environment is investigated by applying the maximum principle. Based on this result, the squeezing theorem is proved by making use of upper-lower solution method and comparison principle. As a result, an estimation can be obtained for the solutions of the corresponding Cauchy problem to provide some insights to the global stability.

key words: Lotka-Volterra system; forced wave; squeezing theorem; lattice; shifting environment; stability

0 引 言

Lotka-Volterra 竞争系统是生物数学中常用来描述相互竞争的两个生物种群的动力行为的经典模型[1-4]。而格上 Lotka-Volterra 竞争系统是其中之一。行波解是数学物理方程当中一类非常特殊

收稿日期:2020-06-16

作者简介:李 江(1983-),女,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:594141939@ qq. com。* 通信作者:王红勇(1982-),男,副教授,博士,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:sysuwhylj@ aliyun. com

的解,其形状不会随着时间的演变而发生改变。近年来,将种群栖息地随着环境变化而变化这一现象融入各类生物模型成为了热点,被广泛研究[5-12]。而伴随产生的行波解被称为强制波(forced wave)。人们常关注于行波解的适定性,稳定性,Squeezing 定理等问题。基于此,本文研究下列格上 Lotka-Volterra 竞争系统

$$\begin{cases} u_j'(t) = d_1 D_2[u_j](t) + u_j(t) \cdot \\ \qquad [r_1(j-ct) - u_j(t) - v_j(t)] \\ v_j'(t) = d_2 D_2[v_j](t) + v_j(t) \cdot \\ \qquad [r_2(j-ct) - v_j(t) - u_j(t)] \end{cases} \tag{1}$$

的 Squeezing 定理。其中,$t \in R^+$,$j \in Z$;$D_2[u_j](t) = u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t)$,是关于空间变量 j 的中心差分算子,$D_2[v_j](t)$ 可类似理解;$u_j(t)$ 与 $v_j(t)$ 分别代表两个不同的种群在格点 j 处,t 时刻的人口或虫口密度;d_1 与 d_2 代表扩散速度;实数 c 代表适合生物种群生长的栖息地的迁移速度;$r_1(z)$ 与 $r_2(z)$ 代表平均生长率,并且满足以下假设条件:

(A1)$r_1(z)$ 在整个实轴上连续,单调递减;$r_2(z)$ 在整个实轴上连续,单调递增。而且在无穷远处满足

$$\lim_{z\to-\infty} r_1(z) = K, \lim_{z\to\infty} r_1(z) = -L;$$
$$\lim_{z\to-\infty} r_2(z) = -L, \lim_{z\to\infty} r_2(z) = K。$$

这里,K 与 L 是两个正常数。

本文中,形如

$$(u_j(t), v_j(t)) = (\tilde{U}(z), \tilde{V}(z)), z = j - ct$$

的解被称为系统(1)的强制行波解(forced traveling wave solution)。值得注意的是,这里的波速 c 就是系统(1)中反应项所含的常数 c。将其代入(1)式,得到以下波系统

$$\begin{cases} d_1 D_2[\tilde{U}](z) + c\tilde{U}' + \tilde{U}[r_1(z) - \tilde{U} - \tilde{V}] = 0 \\ d_2 D_2[\tilde{V}](z) + c\tilde{V}' + \tilde{V}[r_2(z) - \tilde{V} - \tilde{U}] = 0 \end{cases} \tag{2}$$

这里主要研究连接两个平衡点$(K,0)$和$(0,K)$的非单调递减的强制波,即要求满足边界条件

$$\lim_{z\to-\infty}(\tilde{U},\tilde{V})(z) = (K,0),$$
$$\lim_{z\to\infty}(\tilde{U},\tilde{V})(z) = (0,K)。$$

其存在性已经得到证明[11]。事实上,若记

$$\tilde{c}_0 = \min_{\mu>0} \frac{d_2(e^{\mu} + e^{-\mu} - 2) + K}{\mu} > 0,$$
$$\bar{c}_0 = \min_{\mu>0} \frac{d_1(e^{\mu} + e^{-\mu} - 2) + K}{\mu} > 0,$$

则有以下结论。

引理 1 对每一个满足$-\tilde{c}_0 < c < \bar{c}_0$ 的波速 c,系统(2)有解,并且 $\tilde{U}(z)$ 和 $\tilde{V}(z)$ 关于变量 z 在整个实轴上分别是可导的非增和非减函数。

技术上,由于合作系统较之于竞争系统更加方便。为此,做变换

$$U = \tilde{U}, V = 1 - \tilde{V}。$$

将其代入式(2),得

$$\begin{cases} d_1 D_2[U](z) + cU' + U \cdot [r_1(z) - \\ \quad K - U + V] = 0 \\ d_2 D_2[V](z) + cV' + (K - V) \cdot [U - V + \\ \quad K - r_2(z)] = 0 \end{cases} \tag{3}$$

相应地,边界条件变为

$$\lim_{z\to-\infty}(U,V)(z) = (K,K),$$
$$\lim_{z\to\infty}(U,V)(z) = (0,0)。 \tag{4}$$

1 强制波$(U,V)(z)$的严格单调性

容易看出,引理 1 蕴含着 $U'(z) \leqslant 0$,$V'(z) \leqslant 0$。为证明强制波$(U,V)(z)$的严格单调性,还需要第二个假设条件:

(A2)$r_1(z)$ 与 $r_2(z)$ 在整个实轴上可导。

定理 1 若条件(A1)和(A2)成立,则对任意满足$-\tilde{c}_0 < c < \bar{c}_0$ 的波速 c,系统(3)的强制波$(U,V)(z)$是严格单调递减的,即 $U'(z) < 0$,$V'(z) < 0$。

证明 记 $\Phi(z) = U'(z)$,$\Psi(z) = V'(z)$。对系统(3)的两边关于 z 求偏导,有

$$\begin{cases} d_1 D_2[\Phi](z) + c\Phi' + (r_1(z) - K - 2U + \\ \quad V)\Phi + U(\Psi + r_1'(z)) = 0, \\ d_2 D_2[\Psi](z) + c\Psi' - (U - 2V + 2K - \\ \quad r_2(z))\Psi + (K - V)(\Phi - r_2'(z)) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

利用条件(A2),式(5)可被估计为

$$\begin{cases} d_1 D_2[\Phi](z) + c\Phi' + (r_1(z) - K - 2U + \\ \quad V)\Phi + U\Psi \geqslant 0, \\ d_2 D_2[\Psi](z) + c\Psi' - (U - 2V + 2K - \\ \quad r_2(z))\Psi + (K - V)\Phi \geqslant 0。 \end{cases}$$

由引理 1,已经知道 $\Phi(z) \leqslant 0$,$\Psi(z) \leqslant 0$。基于此,由最值原理,可知定理结论成立。

否则,若有点 z_0 使得 $\Phi(z_0) = 0$ 或 $\Psi(z_0) = 0$,根据最值原理,可得 $\Phi(z) = 0$ 和 $\Psi(z) = 0$ 对所有的 $z \in R$ 都成立。从而,$U(z) =$ 常数和 $V(z) =$ 常数,这与边界条件(4)矛盾。定理得证。

2 Squeezing 定理

为简便起见,记

$$f(u,v)=u(r_1(z)-K-u+v)$$
$$g(u,v)=(K-v)(u-v+K-r_2(z))。$$

其雅可比行列式为 $J=(J_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$,其中

$$J_{11}=r_1(z)-K-2u+v, J_{12}=u,$$
$$J_{21}=K-v, J_{22}=r_2(z)-u+2v-2K,$$

特别地,记

$$J_0=\begin{pmatrix}-L-K+2\varepsilon & \varepsilon\\ K & -K+2\varepsilon\end{pmatrix},$$
$$J_1=\begin{pmatrix}-K+2\varepsilon & K\\ \varepsilon & -L-K+2\varepsilon\end{pmatrix}。$$

实际上,J_0 和 J_1 可以理解为 $(0,0)$ 和 (K,K)(分别蕴含 $z\to\infty$ 和 $z\to-\infty$)处的雅可比行列式的小扰动。容易看出,对于充分小的正数 ε,J_0 和 J_1 的特征值均小于零。因此,J_0 和 J_1 的主特征值 λ_0 和 λ_1 也小于零。同时,记其特征向量(注意为正)分别为 $\phi=(\phi_1,\phi_2)^{\mathrm T}$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^{\mathrm T}$, 即有 $J_0\phi=\lambda_0\phi$, $J_1\varphi=\lambda_1\varphi$。接下来,构造一组连接函数 $\rho_1(z)$ 和 $\rho_2(z)$ 使其满足条件:

(i)当 $z\to\infty$ 时,$(\rho_1,\rho_2)^{\mathrm T}\to p(\phi_1,\phi_2)^{\mathrm T}$;当 $z\to-\infty$ 时,$(\rho_1,\rho_2)^{\mathrm T}\to q(\varphi_1,\varphi_2)^{\mathrm T}$,其中,$p,q$ 为两个常数,并且满足 $0<p\phi<q\varphi\leqslant 1$;

(ii)$\rho_1(z)$ 和 $\rho_2(z)$ 是单调递增的连续函数,且有 $0<\rho_i(z)\leqslant 1$, $|\rho_i'(z)|\leqslant 1$, $i=1,2$。

另外,根据边界条件(4)可知,存在常数 R_1 使得当 $z\leqslant -R_1$ 时,$K-\varepsilon<U(z),V(z)<K$;当 $z\geqslant R_1$ 时,$0<U(z),V(z)<\varepsilon$。让 R_1 足够大,由(A1)中 $r_i(z)$, $i=1,2$ 所满足的极限行为可知:当 $z\leqslant -R_1$ 时,$K-\varepsilon<r_1(z)<K$, $-L<r_2(z)<-L+\varepsilon$;当 $z\geqslant R_1$ 时,$-L<r_1(z)<-L+\varepsilon$, $K-\varepsilon<r_2(z)<K$。

最后,为叙述方便,引进以下记号:

$$\delta_0=\min\left\{\frac{\beta\tau}{2d_1+|c|+\beta+2K},\frac{\beta\tau}{2d_2+|c|+\beta+2K}\right\}$$
$$M=\max_{i=1,2}\{2d_i+2K-2\varepsilon,2d_i+L+K-\varepsilon\}$$
$$\mu=\frac{\beta p}{|c|+\beta+M}\min\{\phi_1,\phi_2\}。$$

根据性质(i),(ii)可知,存在依赖于 μ 的常数 R_2 使得

当 $z\leqslant -R_2$ 时,$|\rho_i(z)-p\phi_i|<\mu$;

当 $z\geqslant R_2$ 时,$|\rho_i(z)-q\varphi_i|<\mu$;　　(6)

以及当 $|z|\leqslant R_2$ 时,有

$$|\rho_i'(z)|\leqslant\mu, i=1,2。\tag{7}$$

定理 2　函数组

$$u_j^{\pm}(t)=U(j-ct+\xi^{\pm}\mp\sigma(1-\mathrm e^{-\beta t}))\pm\sigma\delta\rho_1(j-ct+\xi^{\pm})\mathrm e^{-\beta t},$$
$$v_j^{\pm}(t)=V(j-ct+\xi^{\pm}\mp\sigma(1-\mathrm e^{-\beta t}))\pm\sigma\delta\rho_2(j-ct+\xi^{\pm})\mathrm e^{-\beta t},$$

构成系统

$$\begin{cases}d_1D_2[u_j](t)-u_j'(t)+u_j(t)[r_1(j-ct)-K-u_j(t)+v_j(t)]=0\\ d_2D_2[v_j](t)-v_j'(t)+(K-v_j(t))[u_j(t)-v_j(t)+K-r_2(z)]=0\end{cases}\tag{8}$$

的上解和下解。这里 $-\beta=\frac{1}{2}\min\{\lambda_0,\lambda_1\}$, $\delta\in(0,\delta_0)$, $\xi^{\pm}\in R$,而 σ 是一个正数。

更进一步,若式(8)的任意解 $(u_j,v_j)(t)$ 的初值 $(u_j,v_j)(0)$ 满足

$$(u_j^-,v_j^-)(0)\leqslant(u_j,v_j)(0)\leqslant(u_j^+,v_j^+)(0),$$

则有

$$(u_j^-,v_j^-)(t)\leqslant(u_j,v_j)(t)\leqslant(u_j^+,v_j^+)(t)。\tag{9}$$

证明　首先证明 $(u_j^+,v_j^+)(t)$ 是系统(6)的上解。为此,令

$$H_1=d_1D_2[u_j](t)-u_j'(t)+u_j(t)\cdot[r_1(j-ct)-K-u_j(t)+v_j(t)]$$
$$H_2=d_2D_2[v_j](t)-v_j'(t)+(K-v_j(t))\cdot[u_j(t)-v_j(t)+K-r_2(z)]。\tag{10}$$

将 $(u_j^+,v_j^+)(t)$ 代入式(10),可得

$$\sigma^{-1}\mathrm e^{\beta t}H_1=d_1\delta D_2[\rho_1](\eta)+\beta U'+(c\rho_1'+\beta\rho_1)\delta+(r_1(z)-K-2U+V)\delta\rho_1+\delta U\rho_2+o(\delta)$$
$$\sigma^{-1}\mathrm e^{\beta t}H_2=d_2\delta D_2[\rho_2](\eta)+\beta V'+(c\rho_2'+\beta\rho_2)\delta-(U-2V+2K-r_2(z))\delta\rho_2+(K-V)\delta\rho_1+o(\delta)$$

其中,$\eta=j-ct+\xi^+$。

记 $R=\max\{R_1+\sigma,R_2+1\}$。接下来,讨论以下三种情况:

情况一　当 $\eta<-R$ 时,由式(6),式(7),μ 的定义及定理 1,得

$$\sigma^{-1}\mathrm e^{\beta t}H_1\leqslant\delta\{(2d_1+|c|+\beta+2K-2\varepsilon)\mu+\beta p\phi_1+p[(-K+2\varepsilon)\phi_1+K\phi_2]\}\leqslant\delta\{(2d_1+|c|+\beta+2K-2\varepsilon)\mu+(\beta+\lambda_1)p\phi_1\}\leqslant\delta\{(2d_1+|c|+\beta+2K-2\varepsilon)\mu-\beta p\phi_1\}\leqslant 0,$$

及

$\sigma^{-1}e^{\beta t}H_2 \leqslant \delta\{(2d_2 + |c| + \beta + K + L - \varepsilon)\mu + \beta p\phi_2 + p[\varepsilon\phi_1 - (K + L - 2\varepsilon)\phi_2]\} \leqslant \delta\{(2d_2 + |c| + \beta + K + L - \varepsilon)\mu + (\beta + \lambda_1)p\phi_2\} \leqslant \delta\{(2d_2 + |c| + \beta + K + L - \varepsilon)\mu - \beta p\phi_2\} \leqslant 0$。

情况二 当 $\eta > R$ 时,类似地,由式(6),式(7),μ 的定义及定理 1,得

$\sigma^{-1}e^{\beta t}H_1 \leqslant \delta\{(2d_1 + |c| + \beta + L + K - \varepsilon)\mu + \beta q\varphi_1 + q[(-L - K + 2\varepsilon)\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2]\} \leqslant \delta\{(2d_1 + |c| + \beta + L + K - \varepsilon)\mu + (\beta + \lambda_0)q\varphi_1\} \leqslant \delta\{(2d_1 + |c| + \beta + L + K - \varepsilon)\mu - \beta q\varphi_1\} \leqslant 0$,

及

$\sigma^{-1}e^{\beta t}H_2 \leqslant \delta\{(2d_2 + |c| + \beta + 2K - 2\varepsilon)\mu + \beta q\varphi_2 + q[K\varphi_1 + (-K + 2\varepsilon)\varphi_2]\} \leqslant \delta\{(2d_2 + |c| + \beta + 2K - 2\varepsilon)\mu + (\beta + \lambda_0)q\varphi_2\} \leqslant \delta\{(2d_2 + |c| + \beta + 2K - 2\varepsilon)\mu - \beta q\varphi_2\} \leqslant 0$。

情况三 此时,对应着 $-R \leqslant \eta \leqslant R$。由引理 1,可定义常数

$$\tau = \min_{-R \leqslant \eta \leqslant R}\{U', V'\}。$$

且容易看出 $\tau > 0$。经过简单的估计,结合 δ_0 的定义,便可得

$$\sigma^{-1}e^{\beta t}H_1 \leqslant (2d_1 + |c| + \beta + 2K)\delta - \beta\tau \leqslant 0,$$

$$\sigma^{-1}e^{\beta t}H_2 \leqslant (2d_2 + |c| + \beta + 2K)\delta - \beta\tau \leqslant 0。$$

综上可知,对于 $z \in R$,均有 $H_1 \leqslant 0$ 和 $H_2 \leqslant 0$。因此,函数组($u_j^+(t)$,$v_j^+(t)$)是系统(8)的上解。同理可证,函数组($u_j^-(t)$,$v_j^-(t)$)可视为系统(7)的下解。而结论(9)则是比较原理的直接结果。所以,定理得证。

参考文献:

[1] ALFARO M, BERESTYCKI H, RAOUL G. The effect of climate shift on a species submitted to dispersion, evolution, growth, and nonlocal competition[J]. SIAM journal on mathematical analysis, 2017, 49(1): 562-596.

[2] BERESTYCKI H, FANG J. Forced waves of the Fisher-KPP equation in a shifting environment[J]. Journal of differential equations, 2018, 264(3): 2157-2183.

[3] 袁海龙,李艳玲. 一类具有 Lotka-Volterra 竞争模型共存解的存在性与稳定性[J]. 数学物理报, 2017, 37(1): 173-184.

[4] 郭治华,曹华荣. 具有年龄结构的 Lotka-Volterra 竞争系统行波解的稳定性[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(9): 1051-1067.

[5] BOUHOURS J, GILETTI T. Spreading and vanishing for a monostable reaction-diffusion equation with forced speed[J]. Journal of dynamics and differential equations, 2019, 31(1): 247-286.

[6] FANG J, LOU Y, WU J. Can pathogen spread keep pace with its host invasion[J]. SIAM journal on mathematical analysis, 2016, 76(4): 1633-1657.

[7] HU C B, LI B T. Spatial dynamics for lattice differential equations with a shifting habitat[J]. Differential equations, 2015, 259(5): 1967-1989.

[8] LI W T, WANG J B, ZHAO X Q. Spatial dynamics of a nonlocal dispersal population model in a shifting environment[J]. Journal of nonlinear science, 2018, 28(4): 1189-1219.

[9] LI B T, WU J H. Traveling waves in integro-difference equations with a shifting habitat[J]. Journal of differential equations, 2020, 268(7): 4059-4078.

[10] ZHANG G B, ZHAO X Q. Propagation dynamics of a nonlocal dispersal Fisher-KPP equation in a time-periodic shifting habitat[J]. Journal of differential equations, 2020, 268(6): 2852-2885.

[11] WANG H Y, PAN C H, OU C H. Existence of forced waves and gap formations for the lattice Lotka-Volterra competition system in a shifting environment[J]. Applied mathematics letters, 2020 (106): 106349.

[12] YUAN Y D, WANG Y, ZOU X F. Spatial dynamics of a Lotka-Volterra model with a shifting habitat[J]. Discrete and continuous dynamical systems-series B, 2019, 24(10): 5633-5671.