DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2020. 02. 012

一类带时滞非自治比率依赖捕食的随机模型分析

李佳季,陈沙沙,廖新元*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:建立了一类非自治时滞比率依赖的捕食随机模型,并分析研究系统的随机动力性。得到了系统正解的存在性条件,然后通过一些假设得到了系统持久性或灭绝性的充分条件,最后采用 Milstein 方法通过数值仿真证实所得结论的正确性。

关键词:比率依赖捕食模型;灭绝;非持久性;弱持久性

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-0062(2020)02-0074-08

Stochastic Analysis of a Non-autonomous Ratio-dependent Predator-prey Model with Delay

LI Jiaji, CHEN Shasha, LIAO Xinyuan*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Persistence and extinction of a stochastic non-autonomous ratio-dependent predator-prey model with delay is proposed and studied. The results show that there exists a unique positive solution to the system for any positive initial value. Moreover, sufficient conditions for extinction, non-persistence in the mean and weak persistence are established under some simple assumptions. Finally, numerical simulations are illustrated to confirm our main results by the Milstein method.

key words: equations stochastic ratio-dependent predator-prey model; extinction; non-persistence in the mean; weak persistence

0　引　言

近年来,比率依赖的捕食系统模型已成为数学生态学中的焦点,被广泛研究(见参考文献[1-3])。下面是具有离散时滞的 Michaelis-Menten 类型比率依赖捕食食饵确定性模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-bx)-\dfrac{cxy}{x+my},\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(-d+\dfrac{gx(t-\tau)}{x(t-\tau)+my(t-\tau)}\right),\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期:2019-12-14

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(2016JJ2104)

作者简介:李佳季(1995-),男,硕士研究生,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:418151852@ qq. com。*通信作者:廖新元(1965-),男,教授,博士,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:lxy98@ hotmail. com

其中,$x(t)$,$y(t)$分别表示食饵和捕食者的种群密度;b 是食饵的种群内部竞争率;$d>0$ 是捕食者的死亡率,而 a,c,m 和 g 是代表食饵固有生长率,捕获率,半捕获饱和常数和转化率,且均为正常数。式(1)中的延迟 τ 可以看作是捕食者 y 的妊娠期或反应时间。系统(1)的初始条件为:

$$x(\vartheta)=\phi_1(\vartheta),y(\vartheta)=\phi_2(\vartheta),$$
$$\phi=(\phi_1(\vartheta),\phi_2(\vartheta))^{\mathrm{T}}\in C([-\tau,0],R_+^2)\tag{2}$$

在自然界中的种群动态不可避免地会受到生态系统中环境噪声的影响[4-7]。由于环境白噪声,种群系统中的出生率应该是随机的[8-9],将随机扰动引入确定性模型中,揭示环境变异性对数学生态学中种群动态的影响。

基于模型(1),假设 $a\to a+\sigma_1x^\theta B_1(t)$,$-d\to -d+\sigma_2y^\theta B_2(t)$,并考虑捕食者内部竞争率 h,提出下列随机模型:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=x[a-bx-\dfrac{cy}{x+my}]\mathrm{d}t+\sigma_1x^{\theta+1}\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}y=y[-d-hy+\dfrac{gx(t-\tau)}{x(t-\tau)+my(t-\tau)}]\mathrm{d}t+\\ \quad\sigma_2y^{\theta+1}\mathrm{d}B_2(t),\end{cases}\tag{3}$$

系统(3)中,假设增长率 a,内部竞争率 h,死亡率 d 与时间 t 无关。事实上,由于季节性变化,种群的自然生长都是随时间 t 的变化而变化。为此提出以下非自治时滞比率依赖捕食系统的随机模型:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=x(t)[a(t)-b(t)x(t)-\\ \quad\dfrac{c(t)y(t)}{x(t)+my(t)}]\mathrm{d}t+\\ \quad\sigma_1(t)x(t)^{\theta+1}\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}y(t)=y(t)[-d(t)-h(t)y(t)+\\ \quad\dfrac{g(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau)+my(t-\tau)}]\mathrm{d}t+\\ \quad\sigma_2(t)y(t)^{\theta+1}\mathrm{d}B_2(t),\end{cases}\tag{4}$$

其中:$\theta\in(0,1)$;$a(t)$,$b(t)$,$d(t)$,$c(t)$,$h(t)$和 $g(t)$是 R_+ 和$\min_{t\in R_+}b(t)>0$,$\min_{t\in R_+}h(t)>0$ 上的连续有界函数。

为方便给出下列定义。

定义:

(1)如果对于任何给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,存在正常数 H_1 和 H_2 使得:

$$\liminf_{t\to+\infty}p\{x(t)\geqslant H_1\}\geqslant 1-\varepsilon,$$
$$\limsup_{t\to+\infty}p\{x(t)\leqslant H_2\}\geqslant 1-\varepsilon。$$

成立,则称物种 $x(t)$是随机持久的。

(2)如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$,则物种 $x(t)$ 被称作趋近于灭绝。

(3)如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\langle x(t)\rangle=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=0$,则称物种 $x(t)$ 是均值非持久性的。

(4)如果 $x^*=\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)>0$,则称物种 $x(t)$ 是弱持久性的。

定义以下符号:

$$\langle f(t)\rangle=\frac{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}{t},f^*=\limsup_{t\to+\infty}f(t),$$
$$f_*=\liminf_{t\to+\infty}f(t)$$
$$\breve{v}=\inf_{t\in R_+}v(t),\hat{v}=\sup_{t\in R_+}v(t),$$
$$F(x,y)=\frac{c(t)y}{x+my},$$
$$G(x,y)=\frac{g(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau)+my(t-\tau)}$$

本文的其余部分安排如下,在第 1 节中,将研究系统(4)解的唯一性,均值的非持久性、弱持久性和灭绝条件;在第 2 节中,将通过数值模拟来验证主要结论。

1　种群的持久性与灭绝

定理 1　设系统(4)的初始值为(2),当 $t\geqslant 0$ 时系统有唯一解$(x(t),y(t))$,并且解将以 1 的概率保留在 R_+^2 中。

证明:由$(x,y)\in R_+^2$,于是得到

$$0\leqslant F(x,y)\leqslant\frac{c(t)}{m}\leqslant\frac{\hat{c}}{m},$$
$$0\leqslant G(x,y)\leqslant g(t)\leqslant\hat{g}\tag{5}$$

当 $t\geqslant 0$,并且具有给定的初始值 $u(0)=\ln x_0$,$v(0)=\ln y_0$,将考虑以下系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}u=\Big[a(t)-b(t)\mathrm{e}^u-\dfrac{c(t)\mathrm{e}^v}{\mathrm{e}^u+m\mathrm{e}^v}-\\ \quad 0.5\sigma_1^2(t)\mathrm{e}^{2\theta u}\Big]\mathrm{d}t+\sigma_1(t)\mathrm{e}^{\theta u}\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}v=\Big[-d(t)-h(t)\mathrm{e}^v+\dfrac{g(t)\mathrm{e}^{u(t-\tau)}}{\mathrm{e}^{u(t-\tau)}+m\mathrm{e}^{v(t-\tau)}}-\\ \quad 0.5\sigma_2^2(t)\mathrm{e}^{2\theta v}\Big]\mathrm{d}t+\sigma_2(t)\mathrm{e}^{\theta v}\mathrm{d}B_1(t)。\end{cases}\tag{6}$$

通过式(5)可以确定系统(6)的系数是局部 Lipschitz 连续的,并在 $t\in[0,\tau_e]$上存在唯一的最大局部解$(u(t),v(t))$(见参考文献[10])。根据

Itô's 公式,可以得出 $x(t)=e^{u(t)}$,$y(t)=e^{v(t)}$ 是系统(4)的解,那么对于系统(4),初始值为(2)有唯一的最大局部解($x(t)$,$y(t)$,$t\in[0,\tau_e]$,其中 τ_e 是爆破时间。现在,只需要证明 $\tau_e=\infty$ 即可。

令 $n_0>0$ 足够大,使得 x_0 和 y_0 都位于区间 $\left[\frac{1}{n_0},n_0\right]$ 内。对于每个 $n>n_0$ 的整数,定义停止时间

$$\tau_n=\inf\{t\in[0,\tau_e]:x(t)\notin(\frac{1}{n},n)\ \text{or}\ y(t)\notin(\frac{1}{n},n)\}。$$

通过上式可以知道,τ_n 会随着 $n\to\infty$ 的增加而增加。因此当 $\tau_\infty\leqslant\tau_e$ 时,让 $\tau_\infty=\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_n$。只需证明 $\tau_\infty=\infty$。

反证法,若上述为假,则存在一对常数 $T>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$,使得 $P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\varepsilon$。因此,存在一个整数 $n_1\geqslant n_0$,使得

$$P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\varepsilon,n>n_1 \tag{7}$$

定义 C^2 函数 $V:R_+^2\to R_+$,有

$$V(x,y)=(\sqrt{x}-1-0.5\ln x)+(\sqrt{y}-1-0.5\ln y)。$$

当 $u>0$ 时,有 $u-1-\ln u\geqslant0$,可得到该函数的非负性。如果 $(x(t),y(t))\in R_+^2$,应用 Itô's 公式,可以得到

$$\begin{aligned}
dV(x)={}&V_x dx+0.5V_{xx}(dx)^2+V_y dy+0.5V_{yy}(dy)^2=\\
&0.5(x^{0.5}-1)[a(t)-b(t)x(t)-c(t)F(x,y)]dt+\frac{\sigma_1^2(-\sqrt{x}+2)}{8}x^{2\theta}dt+\\
&0.5(x^{0.5}-1)\sigma_1(t)x^{\theta}(t)dB_1(t)+0.5(y^{0.5}-1)[-d(t)-h(t)y(t)+g(t)G(x,y)]dt+\\
&\frac{\sigma_2^2(-\sqrt{y}+2)}{8}y^{2\theta}dt+0.5(y^{0.5}-1)\sigma_2(t)\cdot y^{\theta}(t)dB_2(t)\leqslant0.5[a(t)x^{0.5}+b(t)x(t)+\\
&c(t)F(x,y)]dt+0.125\sigma_1^2(-x^{2\theta+0.5}+2x^{2\theta})dt+0.5(x^{\theta+0.5}-x^{\theta})\sigma_1(t)dB_1(t)+\\
&0.5[g(t)y^{0.5}G(x,y)+d(t)+h(t)y(t)]dt+0.125\sigma_2^2(-y^{2\theta+0.5}+2y^{2\theta})dt+0.5(y^{\theta+0.5}-\\
&y^{\theta})\sigma_2(t)dB_2(t)=0.5[a(t)x^{0.5}+b(t)x(t)+c(t)F(x,y)-0.25\sigma_1^2x^{2\theta+0.5}+0.5x^{2\theta}]dt+\\
&0.5(x^{\theta+0.5}-x^{\theta})\sigma_1(t)dB_1(t)+0.5[g(t)y^{0.5}\cdot G(x,y)+d(t)+h(t)y(t)-\\
&0.25\sigma_2^2y^{2\theta+0.5}+0.5y^{2\theta}]dt+0.5(y^{\theta+0.5}-y^{\theta})\sigma_2(t)dB_2(t)\leqslant0.5[-0.25\breve{\sigma}_1^2x^{2\theta+0.5}+\\
&0.5x^{2\theta}+\hat{b}x+\hat{a}x^{0.5}+\frac{\hat{c}^2}{m}]dt+0.5(x^{\theta+0.5}-x^{\theta})\sigma_1(t)dB_1(t)+0.5[-0.25\breve{\sigma}_2^2y^{2\theta+0.5}+\\
&0.5y^{2\theta}+\hat{h}y+\hat{d}+\hat{g}^2y^{0.5}]dt+0.5(y^{\theta+0.5}-y^{\theta})\sigma_2(t)dB_2(t)\leqslant(K_1+K_2)dt+0.5(x^{\theta+0.5}-\\
&x^{\theta})\sigma_1(t)dB_1(t)+0.5(y^{\theta+0.5}-y^{\theta})\sigma_2(t)dB_2(t)
\end{aligned}$$

其中 K_1,K_2 都是常数。

对上式的两边从 0 到 $\tau_n\wedge T$ 积分,并取期望值,得到

$$EV(x(\tau_n\wedge T),y(\tau_n\wedge T))\leqslant V(x_0,y_0)+(K_1+K_2)T。 \tag{8}$$

设 $\Omega_n=\{\tau_n\leqslant T\}$,则通过(7),有 $P(\Omega_n)\geqslant\varepsilon$。那么对于每个 $\omega\in\Omega_n$,都存在 i,使得 $x_i(\tau_n,\omega)(i=1,2)$ 等于 n 或 $1/n$,因此 $V(x(\tau_n,\omega),y(\tau_n,\omega))$ 不小于 $\min\{(\sqrt{n}-1-0.5\ln n),(\frac{1}{\sqrt{n}}-1+0.5\ln n)\}$。

从式(8)可以得出

$$\begin{aligned}
&V(x_0,y_0)+(K_1+K_2)T\geqslant\\
&E[1_{\Omega_n}(\omega)V(x(\tau_n),y(\tau_n))]\geqslant\\
&\varepsilon\min\{(\sqrt{n}-1-0.5\ln n),\\
&(\frac{1}{\sqrt{n}}-1+0.5\ln n)\},
\end{aligned}$$

其中 1_{Ω_n} 是 Ω_n 的指标函数,让 $n\to\infty$,得到下列矛盾

$$\infty>V(x_0,y_0)+(K_1+K_2)T=\infty。$$

证毕。

定理 2 如果 $\langle a(t)\rangle^*<0$ 且 $\langle g(t)\rangle^*<\langle d(t)\rangle_*$,则系统(4)中的物种 $x(t)$ 和 $y(t)$ 将趋近于灭绝。

证明 将 Itô's 公式应用于式(4),有

$$\begin{aligned}
d\ln x={}&\frac{dx}{x}-\frac{(dx)^2}{2x^2}=[a(t)-b(t)x(t)-\\
&\frac{c(t)y(t)}{x(t)+my(t)}-0.5\sigma_1^2(t)x^{2\theta}(t)]dt+\\
&\sigma_1(t)x^{\theta}(t)dB_1(t),\\
d\ln y={}&\frac{dy}{y}-\frac{(dy)^2}{2y^2}=[-d(t)-h(t)y(t)+\\
&\frac{g(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau)+my(t-\tau)}-0.5\sigma_2^2(t)\cdot\\
&y^{2\theta}(t)]dt+\sigma_2(t)y^{\theta}(t)dB_2(t)。
\end{aligned}$$

将上式两边从 0 到 t 积分,得到

$$\ln x(t)-\ln x(0)=\int_0^t(a(s)-b(s)x(s)-$$

$$\frac{c(s)y(s)}{x(s)+my(s)}-0.5\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s))\mathrm{d}s+M_1(t),\tag{9}$$

$$\ln y(t)-\ln y(0)=\int_0^t(-d(s)-h(s)y(s)+\frac{g(s)x(s-\tau)}{x(s-\tau)+my(s-\tau)}-0.5\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s))\mathrm{d}s+M_2(t)\tag{10}$$

其中 $M_1(t)=\int_0^t\sigma_1(s)x^\theta(s)\mathrm{d}B_1(s)$,

$$M_2(t)=\int_0^t\sigma_2(s)y^\theta(s)\mathrm{d}B_2(s)$$

是局部鞅。其二次方差是

$$\langle M_1(t),M_1(t)\rangle=\int_0^t\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\langle M_2(t),M_2(t)\rangle=\int_0^t\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)\mathrm{d}s。$$

通过应用指数鞅不等式,得到对于任意正常数 T,α 和 β,有

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[M(t)-\frac{\alpha}{2}\langle M(t),M(t)\rangle]>\beta,$$

$$其中\beta\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha\beta}\tag{11}$$

取 $T=n,\alpha=1,\beta=2\ln n$,然后得出

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant n}[M_i(t)-\frac{1}{2}\langle M_i(t),M_i(t)\rangle]>2\ln n\}\leqslant\frac{1}{n^2},(i=1,2)。$$

采用 Borel-Cantalli 引理,对于所有 $\omega\in\Omega$,都有一个随机整数 $n_0=n_0(\omega)$ 使得 $n\geqslant n_0$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant n}[M_i(t)-\frac{1}{2}\langle M_i(t),M_i(t)\rangle]\leqslant 2\ln n,(i=1,2)。$$

即

$$M_i(t)\leqslant 2\ln n+\frac{1}{2}\langle M_i(t),M_i(t)\rangle,(i=1,2),$$

对于所有 $0\leqslant t\leqslant n$,有 $n\geqslant n_0$。可以得出

$$M_1(t)\leqslant 2\ln n+\frac{1}{2}\langle M_1(t),M_1(t)\rangle=2\ln n+0.5\int_0^t\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)\mathrm{d}s,$$

$$M_2(t)\leqslant 2\ln n+\frac{1}{2}\langle M_2(t),M_2(t)\rangle=2\ln n+0.5\int_0^t\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)\mathrm{d}s,$$

对于所有 $0\leqslant t\leqslant n$,有 $n\geqslant n_0$,将上述不等式代入式(9),式(10),可以得出

$$\ln x(t)-\ln x(0)\leqslant\int_0^t a(s)\mathrm{d}s-\int_0^t b(s)x(s)\mathrm{d}s-\int_0^t\frac{c(s)y(s)}{x(s)+my(s)}\mathrm{d}s+2\ln n\leqslant\int_0^t a(s)\mathrm{d}s+2\ln n\tag{12}$$

$$\ln y(t)-\ln y(0)\leqslant-\int_0^t d(s)\mathrm{d}s-\int_0^t h(s)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{g(s)x(s-\tau)}{x(s-\tau)+my(s-\tau)}\mathrm{d}s+2\ln n\leqslant-\int_0^t d(s)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}s+2\ln n\tag{13}$$

对于所有 $0\leqslant t\leqslant n$,有 $n\geqslant n_0$。则对于 $0<n-1\leqslant t\leqslant n$,有

$$\frac{\ln x(t)-\ln x_0}{t}\leqslant\langle a(t)\rangle+\frac{2\ln n}{n-1},$$

$$\frac{\ln y(t)-\ln y_0}{t}\leqslant-\langle d(t)\rangle+\langle g(t)\rangle+\frac{2\ln n}{n-1},$$

因此,得出

$$\left[\frac{\ln x(t)}{t}\right]^*\leqslant\langle a\rangle^*<0,$$

$$\left[\frac{\ln y(t)}{t}\right]^*\leqslant\langle g\rangle^*-\langle d\rangle_*<0。$$

也就是说,如果 $\langle a\rangle^*<0$ 且 $\langle g\rangle^*-\langle d\rangle_*<0$,可以得到

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0,\lim_{t\to\infty}y(t)=0。$$

证毕。

定理 3 如果 $\langle a(t)\rangle^*=0$ 且 $\langle g(t)\rangle^*=\langle d(t)\rangle_*$,则系统(4)中物种 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是非持久性的。

证明 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在一个 T_1 使得 $\dfrac{\int_0^t a(s)\mathrm{d}s}{t}\leqslant\langle a\rangle^*+\dfrac{\varepsilon}{2}=\dfrac{\varepsilon}{2},t\geqslant T_1$,将这个不等式代入(12),

$$\ln x(t)-\ln x(0)\leqslant\int_0^t a(s)\mathrm{d}s-\int_0^t b(s)x(s)\mathrm{d}s+2\ln n\leqslant\frac{\varepsilon t}{2}-\breve{b}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s+2\ln n,$$

对于所有 $T_1\leqslant t\leqslant n$,有 $n\geqslant n_0$。存在一个 $T>T_1$,使得对于所有当 $T_1\leqslant T\leqslant n-1\leqslant t\leqslant n$ 且 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\dfrac{\ln n}{t}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4}$。那么可以得到

$$\ln x(t)-\ln x(0)\leqslant\varepsilon t-\breve{b}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s。$$

令 $u(t)=\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$,有

$$\ln\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)<\varepsilon t-\breve{b}u(t)+\ln x(0),t>T,$$

同理有

$$e^{\breve{b}u(t)}\mathrm{d}u(t) < x(0)e^{\varepsilon t}\mathrm{d}t, t > T。$$

将上述不等式从 T 到 t 积分,有

$$\frac{1}{\breve{b}}[e^{\breve{b}u(t)} - e^{\breve{b}u(T)}] < \frac{x(0)}{\varepsilon}[e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon T}]。$$

将不等式进行变换,可以得到

$$e^{\breve{b}u(t)} < e^{\breve{b}u(T)} + \frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon t} - \frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon T}$$

将两边同时取对数,可以得到

$$u(t) < \frac{1}{\breve{b}}\ln[e^{\breve{b}u(T)} + \frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon t} - \frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon T}]。$$

已经证明

$$\left[\frac{\int_0^t x(s)\mathrm{d}s}{t}\right]^* \leqslant \frac{1}{\breve{b}}\left\{\ln\left[e^{\breve{b}u(T)} + \frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon t} - \frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon T}\right]\right\}^*。$$

应用 L'Hopital 法则,可以得到

$$\langle x\rangle^* \leqslant \frac{1}{\breve{b}}\left[\frac{\ln(\frac{x(0)\breve{b}}{\varepsilon}e^{\varepsilon t})}{t}\right]^* = \frac{\varepsilon}{\breve{b}}。$$

由于 ε 是任意的,则$\langle x\rangle^* \leqslant 0$,可以得到物种 $x(t)$ 的均值是非持久性的。对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个 T_2,有 $\frac{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}{t} - \frac{\int_0^t d(s)\mathrm{d}s}{t} \leqslant \langle g\rangle^* - \langle d\rangle_* + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}, t \geqslant T_2$, 代入这个不等式到方程(13),得到不等式如下

$$\ln y(t) - \ln y(0) \leqslant -\int_0^t d(s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s - \int_0^t h(s)y(s)\mathrm{d}s + 2\ln n \leqslant \frac{\varepsilon t}{2} - \breve{h}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s + 2\ln n,$$

对于所有 $T_2 \leqslant t \leqslant n$,有 $n \geqslant n_0$。存在当 $T>T_2$,对于所有 $T_2 \leqslant T \leqslant n-1 \leqslant t \leqslant n$ 且 $n \geqslant n_0$ 时,有$\frac{\ln n}{t} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$。可以得到

$$\ln y(t) - \ln y(0) \leqslant \varepsilon t - \breve{h}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s。$$

令 $v(t) = \int_0^t y(s)\mathrm{d}s$, 通过与上述类似的方法,得到

$$v(t) < \frac{1}{\breve{b}}\ln\left[e^{\breve{h}u(T)} + \frac{y(0)\breve{h}}{\varepsilon}e^{\varepsilon t} - \frac{y(0)\breve{h}}{\varepsilon}e^{\varepsilon T}\right]。$$

应用 L'Hopital 法则,可以得到

$$\langle y\rangle^* \leqslant \frac{1}{\breve{b}}\left[\frac{\ln(\frac{y(0)\breve{h}}{\varepsilon}e^{\varepsilon t})}{t}\right]^* = \frac{\varepsilon}{\breve{b}}。$$

由于 ε 是任意的,则$\langle y\rangle^* \leqslant 0$,可以得到物种 $y(t)$ 的均值是非持久性的。

证毕。

定理 4 如果$\langle a(t)\rangle^* > \langle c(t)\rangle_*$且$\langle d(t)\rangle_* < 0$,则系统(4)的物种 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都为弱持久性的。

证明 首先,证明

$$\left[\frac{\ln x(t)}{t}\right]^* \leqslant 0, \left[\frac{\ln y(t)}{t}\right]^* \leqslant 0。$$

将 Itô's 公式应用于(4),其结果为

$$\mathrm{d}(e^t\ln x) = e^t\ln x\mathrm{d}t + e^t\mathrm{d}\ln x = e^t[\ln x + a(t) - b(t)x - \frac{c(t)y(t)}{x(t) + my(t)} - 0.5\sigma_1^2(t)x^{2\theta}]\mathrm{d}t + e^t\sigma_1(t)x^\theta\mathrm{d}B_1(t),$$

$$\mathrm{d}(e^t\ln y) = e^t\ln y\mathrm{d}t + e^t\mathrm{d}\ln y = e^t[\ln y - d(t) - h(t)y + \frac{g(t)x(t-\tau)}{x(t-\tau) + my(t-\tau)} - 0.5\sigma_2^2(t)y^{2\theta}]\mathrm{d}t + e^t\sigma_2(t)y^\theta\mathrm{d}B_2(t).$$

将上式两边从 0 到 t 积分,得到

$$e^t\ln x(t) - \ln x(0) = \int_0^t e^s[\ln x(s) + a(s) - b(s)x(s) - \frac{c(s)y(s)}{x(s) + my(s)} - 0.5\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)]\mathrm{d}s + N_1(t), \tag{14}$$

$$e^t\ln y(t) - \ln y(0) = \int_0^t e^s[\ln y(s) - d(s) - h(s)y(s) + \frac{g(s)x(s-\tau)}{x(s-\tau) + my(s-\tau)} - 0.5\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)]\mathrm{d}s + N_2(t), \tag{15}$$

其中 $N_1(t) = \int_0^t e^s\sigma_1(s)x^\theta(s)\mathrm{d}B_1(s)$,

$$N_2(t) = \int_0^t e^s\sigma_2(s)y^\theta(s)\mathrm{d}B_2(s)$$

是局部鞅,其二次方差是

$$\langle N_1(t), N_1(t)\rangle = \int_0^t e^{2s}\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\langle N_2(t), N_2(t)\rangle = \int_0^t e^{2s}\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)\mathrm{d}s。$$

根据指数鞅不等式(11),令 $T=\gamma k, \alpha=e^{-\gamma k}$ 和 $\beta=\xi e^{\gamma k}\ln k$,使得

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant\gamma k}[N_i(t) - 0.5e^{-\gamma k}\langle N_i(t), N_i(t)\rangle] >$$

$$\xi e^{\gamma k}\ln k\} \leqslant k^{-\xi},(i=1,2),$$

其中 $\xi>1$ 且 $\gamma>1$。借助 Borel-Cantelli 引理,对于所有 $\omega\in\Omega$ 都存在 $k_0(\omega)$,使得对于每一个 $k>k_0(\omega)$,都有

$$N_i(t) \leqslant 0.5e^{-\gamma k}\langle N_i(t),N_i(t)\rangle + \xi e^{\gamma k}\ln k,\quad 0\leqslant t\leqslant \gamma k(i=1,2)。$$

即

$$N_1(t) \leqslant 0.5e^{-\gamma k}\int_0^t e^{2s}\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)\mathrm{d}s + \xi e^{\gamma k}\ln k,$$

$$N_2(t) \leqslant 0.5e^{-\gamma k}\int_0^t e^{2s}\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)\mathrm{d}s + \xi e^{\gamma k}\ln k。$$

将上述不等式代入(14)和(15),得出

$$\begin{aligned}e^t\ln x(t) - \ln x(0) \leqslant& \int_0^t e^s[\ln x(s) + a(s) - b(s)x(s) - 0.5\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)]\mathrm{d}s + \\ &0.5e^{-\gamma k}\int_0^t e^{2s}\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)\mathrm{d}s + \xi e^{\gamma k}\ln k = \\ &\int_0^t e^s[\ln x(s) + a(s) - b(s)x(s) - 0.5\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(s)(1-e^{s-\gamma k})]\mathrm{d}s + \xi e^{\gamma k}\ln k\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}e^t\ln y(t) - \ln y(0) \leqslant& \int_0^t e^s[\ln y(s) - d(s) + g(s) - h(s)y(s) - 0.5\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)]\mathrm{d}s + \\ &0.5e^{-\gamma k}\int_0^t e^{2s}\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)\mathrm{d}s + \xi e^{\gamma k}\ln k = \\ &\int_0^t e^s[\ln y(s) - d(s) + g(s) - h(s)y(s) - 0.5\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(s)(1-e^{s-\gamma k})]\mathrm{d}s + \xi e^{\gamma k}\ln k。\end{aligned} \tag{17}$$

对于$0\leqslant s\leqslant \gamma k$且$x>0,y>0$,由于$\min_{t\in R_+}b(t)>0,\min_{t\in R_+}h(t)>0$,存在独立于$k$的常数$C_1$和$C_2$使得

$$\ln x + a(s) - b(s)x(s) - 0.5\sigma_1^2(s)x^{2\theta}(1-e^{s-\gamma k}) \leqslant C_1,$$

$$\ln y - d(s) + g(s) - h(s)y(s) - 0.5\sigma_2^2(s)y^{2\theta}(1-e^{s-\gamma k}) \leqslant C_2。$$

也就是说,对于任意 $0\leqslant t\leqslant \gamma k$,根据(16)和(17),有

$$e^t\ln x(t) - \ln x(0) \leqslant C_1(e^t-1) + \xi e^{\gamma k}\ln k,$$

$$e^t\ln y(t) - \ln y(0) \leqslant C_2(e^t-1) + \xi e^{\gamma k}\ln k。$$

即

$$\ln x(t) \leqslant e^{-t}\ln x(0) + C_1(1-e^{-t}) + \xi e^{-t}e^{\gamma k}\ln k,$$

$$\ln y(t) \leqslant e^{-t}\ln y(0) + C_2(1-e^{-t}) + \xi e^{-t}e^{\gamma k}\ln k。$$

如果 $\gamma(k-1)\leqslant t\leqslant \gamma k$ 且 $k\geqslant k_0(\omega)$,则

$$\frac{\ln x(t)}{t} \leqslant \frac{e^{-t}\ln x(0)}{t} + \frac{C_1(1-e^{-t})}{t} + \frac{\xi e^{-r(k-1)}e^{\gamma k}\ln k}{t},$$

$$\frac{\ln y(t)}{t} \leqslant \frac{e^{-t}\ln y(0)}{t} + \frac{C_2(1-e^{-t})}{t} + \frac{\xi e^{-r(k-1)}e^{\gamma k}\ln k}{t}。$$

令 $t\to+\infty$,可以得到

$$\left[\frac{\ln x(t)}{t}\right]^* \leqslant 0, \tag{18}$$

$$\left[\frac{\ln y(t)}{t}\right]^* \leqslant 0, \tag{19}$$

假设$\langle a\rangle^*-\langle c(t)\rangle_*>0$,证明 $x^*>0$。如果此断言不成立,则令 S 为集合 $S=\{x^*=0\}$,那么 $P(S)>0$。由式(9)得

$$\frac{\ln x(t) - \ln x(0)}{t} \geqslant \langle a(t)\rangle - \langle b(t)x(t)\rangle - \langle c(t)\rangle - 0.5\langle \sigma_1^2(t)x^{2\theta}(t)\rangle + \frac{M_1(t)}{t}。$$

一方面,对于所有 $\omega\in S$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t,\omega)=0$,然后通过局部鞅的大数定律,得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{M_1(t)}{t}=0$。代入上述不等式有

$$\left[\frac{\ln x(t,\omega)}{t}\right]^* \geqslant \langle a(t)\rangle^* - \langle c(t)\rangle_* > 0。$$

可得 $P\left(\left[\dfrac{\ln x(t)}{t}\right]^* > 0\right) > 0$, 这与式(18)相矛盾。

同样, 假设 $-\langle d(t)\rangle_* > 0$,证明 $y^* > 0$。如果此断言不成立,则令 S 为集合 $H=\{y^*=0\}$,则 $P(H) > 0$。 从式(10)得出

$$\frac{\ln y(t) - \ln y(0)}{t} \geqslant -\langle d(t)\rangle - h(t)\langle y(t)\rangle - 0.5\langle \sigma_2^2(t)y^{2\theta}(t)\rangle + \frac{M_2(t)}{t}。$$

另一方面,对于所有 $\omega\in H$,有 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t,\omega)=0$,然后通过局部鞅的大数定律,得到 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{M_2(t)}{t}=0$。代入上述不等式有

$$\left[\frac{\ln y(t,\omega)}{t}\right]^* \geqslant -\langle d(t)\rangle_* > 0。$$

可得 $P\left(\left[\dfrac{\ln y(t)}{t}\right]^* >0\right)>0$, 这与(19)相矛盾。

证毕。

2 数值模拟

使用 Milstein 方法(见参考文献[11-13]),来验证主要结论。系统(4)的离散方程如下:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = {} & x_k + x_k[a(k\Delta t) - b(k\Delta t)x_k - \\ & c(k\Delta t)y_k/(x_k + my_k)]\Delta t + \\ & \sigma_1(k\Delta t)x_k^{1+\theta}\sqrt{\Delta t}\xi_k + \\ & 0.5\sigma_1^2(k\Delta t)x_k^{2+2\theta}(\xi_k^2 - 1)\Delta t, \\ y_{k+1} = {} & y_k + y_k[-d(k\Delta t) - h(k\Delta t)y_k + \\ & g(k\Delta t)x_{k-\tau}/(x_{k-\tau} + my_{k-\tau})]\Delta t + \\ & \sigma_2(k\Delta t)y_k^{1+\theta}\sqrt{\Delta t}\xi_k + 0.5\sigma_2^2(k\Delta t)y_k^{2+2\theta}\cdot \\ & (\xi_k^2 - 1)\Delta t, \end{aligned}$$

其中 $\xi_k, k=1,2,\cdots,n$ 是高斯随机变量。

令 $\theta = 0.8, b(t) = 0.2, h(t) = 0.1, m = 1, \sigma_1(t) = 0.7$ 和 $\sigma_2(t) = 0.8$,步长 $\Delta t = 0.001$。

在图 1 中,令

$$c(t) = 0.2, d(t) = 0.1 - 0.3\sin t,$$
$$a(t) = -0.02 + 0.3\sin t,$$
$$g(t) = -0.03 + 0.4\sin t,$$

得出 $\langle a(t)\rangle^* = 0$ 和 $\langle g(t)\rangle^* < \langle d(t)\rangle_*$。根据定理 2,$x(t)$ 和 $y(t)$ 趋近于灭绝(见图 1)。

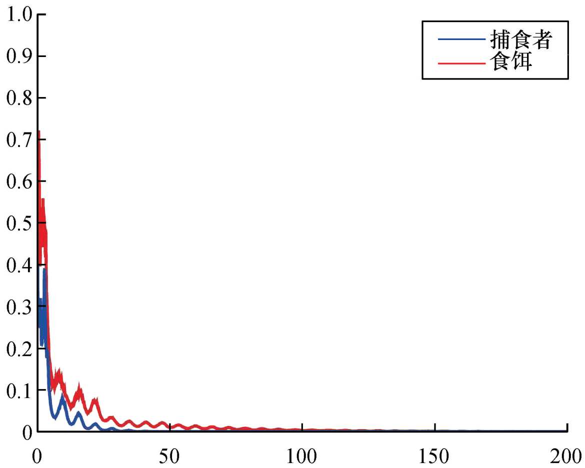

图 1 捕食者和食饵趋近于灭绝

Fig. 1 Predator and prey go to extinction

在图 2 中,令

$$a(t) = 0.3\sin t,$$
$$g(t) = -0.03 + 0.5\sin t = d(t),$$
$$c(t) = 0.2。$$

得出 $\langle a(t)\rangle^* = 0$ 和 $\langle g(t)\rangle^* = \langle d(t)\rangle_*$,从定理 3 可以得出,$x(t)$ 和 $y(t)$ 在均值上非持久性的(见图 2)。

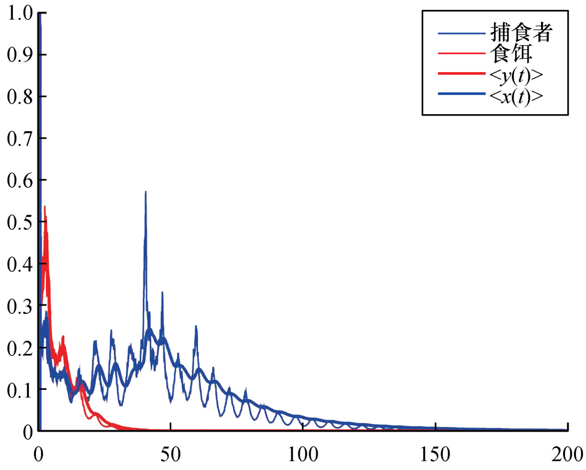

图 2 捕食者和食饵都是非持久性的

Fig. 2 Predator and prey are nonpersistent in the mean

在图 3 中,令

$$a(t) = 0.001 + 0.2\sin t,$$
$$c(t) = -0.01 + 0.3\sin t,$$
$$d(t) = -0.03 + 0.2\sin t, g(t) = 0.02。$$

然后得出 $\langle a(t)\rangle^* > \langle c(t)\rangle_*$ 和 $\langle d(t)\rangle_* < 0$。根据定理 4,得出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是弱持久性的(见图 3)。

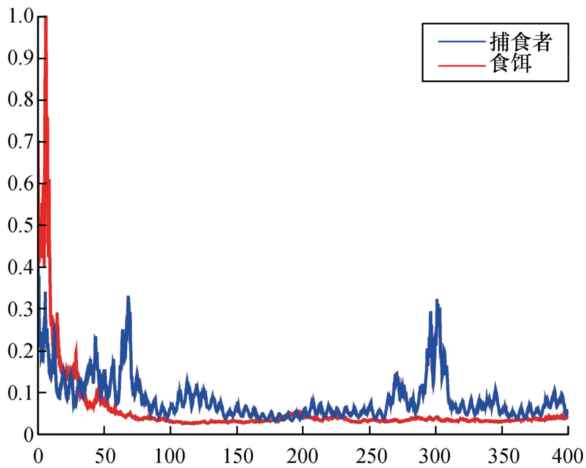

图 3 捕食者和食饵都是弱持久性地

Fig. 3 Predator and prey are weakly persistent

3 结论与展望

通过前文建立了一类 Michaelis-Menten 型比率依赖函数的时滞捕食-食饵模型,并分析研究系统的随机动力性。得到了系统正解的存在性条件,然后通过一些假设得到了系统持久性或灭绝性的充分条件并验证了其结论。该模型拥有很好的性质,有着较大的发展空间,在此文的基础上,

建立一类 Michaelis-Menten 型时滞比率依赖的食物链模型等等,这是未来研究的方向。

参考文献:

[1] MAITIL A,JANA M,SAMANT G P. Deterministic and stochastic analysis of a ratio-dependent predator-prey system with delay[J]. Nonlinear analysis:Modelling and control,2007,12(3):383-398.

[2] HSU S B,HWANG T W,KUANG Y. Global analysis of the Michaelis-Menten-type ratio-dependent predator-prey system[J]. Mathematical biology,2001,42(6):489-506.

[3] XIAO D,RUAN S. Global dynamics of a ratio-dependent predator-prey system[J]. Mathematical biology,2001,43(3):268-290.

[4] XING Z,PENG J. Boundedness persistence and extinction of a stochastic non-autonomous logistic system with time delays[J]. Applied mathematical modelling,2012,36(8):3379-3386.

[5] LIU M,WANG K. A note on delay Lotka-Volterra competitive system with random perturbations[J]. Applied mathematics letters,2013,26(6):589-594.

[6] JIANG D,JI C,LI X,et al. Analysis of autonomous Lotka-Volterra competition systems with random perturbation[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2012,390(2):582-595.

[7] LIU M,QIU H,WANG K. A remark on a stochastic predator-prey system with time delays[J]. Applied mathematics letters,2013,26(3):318-323.

[8] LI X,JIANG D,MAO X. Population dynamical behavior of Lotka-Volterra system under regime switching[J]. Journal of computational and applied mathematics,2009,232(2):427-448.

[9] QIU H,LIU M,WANG K,et al. Dynamics of a stochastic predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. Applied mathematics and computation,2012,219(4):2303-2312.

[10] MAO X. Stochastic differential equations and application[M]. Chichester:Horwood Publishing,1997.

[11] Higham D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Review,2001,43(3):525-546.

[12] SUN Z R,LV J L. Dynamical analysis on two stochastic single-species models[J]. Applied mathematics letters,2020,99:37-45.

[13] WANG Y S,WU H,WAN S K. Persistence of pollination mutualisms under pesticides[J]. Applied mathematical modelling,2020(77):861-880.

(责任编辑:周泉)

(上接第 73 页)

参考文献:

[1] 王涛. 基于 ANSYS Workbench 的输液管道振动特性分析和振动控制的研究[D]. 石家庄:河北科技大学,2011.

[2] ASHLEY H,HAVILAND G. Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid[J]. Journal of applied mechanics,1950,72:229-232.

[3] 郭长青. 输流管道与轴向流中板状结构的流致振动与稳定性[D]. 北京:清华大学,2010.

[4] 刘凤友. 输流曲管的振动稳定性分析[J]. 强度与环境,1991(1):9-17.

[5] 李艳华. 考虑流固耦合的管路系统振动噪声及特性研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2011.

[6] 喻萌. Analysis on Charicterastics of Fluid-structure Interaction for Fluid Conveying Pipes by ANSYS[J]. Chinese Journal of Ship Research,2007.

[7] 李帅军. 管路系统流固耦合动力学计算及特性分析[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2015.

[8] 赵宁. 基于 Workbench 的流固耦合作用下弯管的振动分析[J]. 辽宁化工,2017,46(8):795-796;799.

[9] 俞树荣,马璐,余龙. 弯曲输流管道流固耦合动力特性分析[J]. 噪声与振动控制,2015,35(4):43-47.

[10] TIJSSELING A S. Fluid-structure interaction in liquid-filled pipe systems:a review[J]. Journal of fluids & structures,1996,10(2):109-146.

[11] 窦益华,于凯强,杨向同,等. 输流弯管流固耦合振动有限元分析[J]. 机械设计与制造工程,2017,46(2):18-21.

[12] CHEN S S. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid[J]. The journal of the acoustical society of America,1972,51(1B):223-232.

[11] 于瀛. 基于 ANSYS Workbench 的管道系统流固耦合振动特性分析[D]. 沈阳:东北大学,2017.

[14] 叶红玲. 输流弯管的流固耦合模态分析及参数影响研究[C]//中国力学学会计算力学专业委员会. 中国计算力学大会 2014 暨第三届钱令希计算力学奖颁奖大会论文集. 中国力学学会计算力学专业委员会:中国力学学会,2014:579-583.

[15] 夏永胜,张成龙. 基于 ANSYS Workbench 的液压管道流固耦合振动分析[J]. 流体传动与控制,2017(3):38-41;57.

(责任编辑:扶文静)