

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2020.01.015

## 含有四极矩的后牛顿引力场中试验粒子的运动

葛记涛,李杰,林文斌\*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

**摘要:**为了研究试验粒子在含有四极矩的后牛顿引力场中的运动规律,采用龙格-库塔法进行数值模拟,同时利用速度因子修正法以保持动力系统数值解的积分守恒,借助快速李雅普诺夫指标来判断试验粒子运动状态演化的混沌性。数值模拟显示:引力源的四极矩会导致试验粒子的运动产生混沌现象。

**关键词:**四极矩;后牛顿引力场;快速李雅普诺夫指标;混沌

**中图分类号:**TL501 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-0062(2020)01-0093-04

## The Motion of a Test Particle in the Post-Newtonian Gravitational Field with Quadrupole Moment

GE Jitao, LI Jie, LIN Wenbin\*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

**Abstract:** The motion of a test particle in the gravitational field with quadrupole moment is studied. The study employs the Runge-Kutta method to solve the equations-of-motion, and apply the velocity correction method to keep the integral conservation of the numerical solution of the dynamic system. The chaos of motion is checked with the fast Lyapunov indicator. Numerical simulations shows the motion of the test particle does exhibit chaos in this kind of system.

**key words:** quadrupole moment; post-Newtonian gravitational field; fast Lyapunov indicator; chaos

### 0 引言

混沌现象是非线性系统所特有一种特殊的运动现象,它具有不可预测性,对初始条件极其敏感

等特点。1963年,E. N. Lorenz 在研究气象演变时发现了混沌运动<sup>[1]</sup>。1964年,M. Henon 和 C. Heiles 在研究恒星轨道时发现了一些对初始条件敏感且非常混乱的混沌轨道<sup>[2]</sup>。1975年,chaos(混沌)一

收稿日期:2019-10-30

作者简介:葛记涛(1993-),男,硕士研究生,主要从事天体物理方面的研究。E-mail:911895172@qq.com。\*通信作者:林文斌(1970-),男,教授,主要从事理论物理、数据挖掘等方面的研究。E-mail:lwb@usc.edu.cn

词在“Period Three Implies Chaos”一文中正式被 T. Y. Li 和 J. A. Yorke 提出<sup>[3]</sup>。自此,混沌的研究慢慢开始发展起来。如今,随着数学、天体力学、化学以及计算机等领域的飞速发展,混沌已经成为一门具有重要科学价值的前沿科学。

在一些天体物理研究中,需要考虑相对论的效应。比如最近观测到的致密星 S2 绕银河中心可能存在的超大质量黑洞(Sgr A\*)运动<sup>[4]</sup>,牛顿引力理论无法准确描述该致密天体的运动规律,需要应用后牛顿近似理论来进行研究。本文中研究含有四极矩的后牛顿引力场中试验粒子运动的混沌性。

本文将采用龙格-库塔法<sup>[5]</sup>来求解试验粒子的后牛顿动力学方程,并应用伍等人给出的速度因子修正法以保持动力系统数值解的积分守恒<sup>[6]</sup>,最后借助快速李雅普诺夫指标法(fast Lyapunov indicator, FLI)<sup>[7-10]</sup>对粒子的运动状态演化的混沌性进行判断。

## 1 物理模型

带四极矩的后牛顿引力场可以由 Richter 等人给出的度规来描述<sup>[11]</sup>:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} \left( 1 - \frac{JR^2(3\cos^2\theta - 1)}{2r^2} \right) - \frac{2M^2}{r^2},$$

$$g_{0i} = 0,$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right).$$

其中  $M, R, J$  分别为引力源质量、引力源半径、四极矩参数,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  是试验粒子离引力源中心的距离。为了简便,我们令引力常数  $G$  为 1, 同时选取自然单位制。

根据这个度规,可以推导出试验粒子在带有四极矩的后牛顿引力场中的动力学方程:

$$\frac{dv}{dt} = \left( -\frac{M}{r^3} + \frac{3JMR^2 \left( \frac{5z^2}{r^2} - 1 \right)}{2r^5} - \frac{Mv^2}{r^3} + \frac{4M^2}{r^4} \right) r + \frac{4M(r \cdot v)}{r^3} v - \frac{3JMR^2 z}{r^5} \delta_{ij}.$$

这里  $v$  是试验粒子的三维速度。

## 2 混沌判断方法

选用快速李雅普诺夫指标法对试验粒子运动

的混沌性进行判断。伍歆等人给出了快速李雅普诺夫指标<sup>[7-10]</sup>:

$$FLI = \log_{10} \frac{d(t)}{d(0)}.$$

式中  $d(t)$  为具有初始距离  $d(0)$  的两临近轨道的间距。随着时间的增加,两临近轨距离会随之扩张达到饱和,导致计算不易成功,所以需要对快速李雅普诺夫指标进行重整化。令  $d(0) = 10^{-9}$ , 当  $d(t) = 0.1$  时轨道达到饱和,所以可以选取重整化的临界值  $d(t) = 0.1$ 。重整化后的 FLI 的表达式为:

$$FLI_k = -k(1 + \log_{10} d(0)) + \log_{10} \frac{d(t)}{d(0)},$$

其中  $k(k=0, 1, 2, \dots)$  表示重整化次数,  $d(0) \leq d(t) \leq 0.1$ 。当快速李雅普诺夫指标呈线性或非指数增长时,粒子的运动是非混沌的,当快速李雅普诺夫指标呈指数增长时,表明粒子的运动是混沌的。

## 3 数值模拟

为了简便,取  $M=1$ 。考虑试验粒子离引力源中心的距离大约为 1 000。为了显示四极矩的效应,分别研究了不含四极矩的后牛顿引力场和含有四极矩的后牛顿引力场中试验粒子的运动情况。

选取的试验粒子的初始条件如下:

(a)  $x=500, y=10, z=850, \dot{x}=0, \dot{y}=0.001, \dot{z}=0.018\ 257\ 473$ ;

(b)  $x=700, y=10, z=700, \dot{x}=0, \dot{y}=0.001, \dot{z}=0.012\ 665\ 111$ ;

(c)  $x=850, y=10, z=500, \dot{x}=0, \dot{y}=0.001, \dot{z}=0.009\ 742\ 335\ 5$ ;

应用五阶龙格-库塔方法进行数值求解运动方程,在求解过程中,还采用速度因子修正法<sup>[6]</sup>以保持数值解的积分守恒。通过数值模拟,给出四极矩参数  $J=0$  (不含四极矩的后牛顿引力场), 引力源半径  $R=10$  时粒子运动情况如图 1 所示, 和四极矩参数  $J=10$  (含有四极矩的后牛顿引力场), 引力源半径  $R=10$  时粒子运动情况如图 2 所示。注意到图 2 中显示的(a), (b), (c)三种情况分别对应于上面给出的 3 个初始条件。

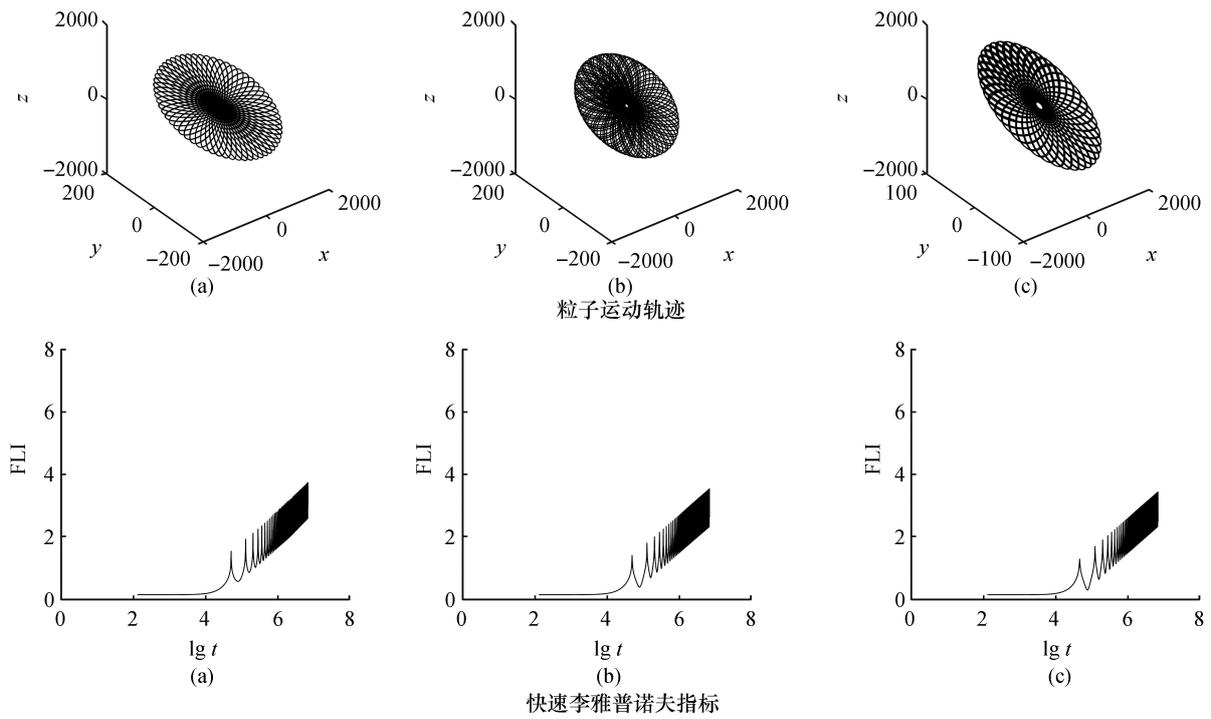


图 1 不含四极矩的后牛顿引力场下粒子的运动情况

Fig. 1 Particle's motion in a post-Newtonian gravitational field without quadrupole moment

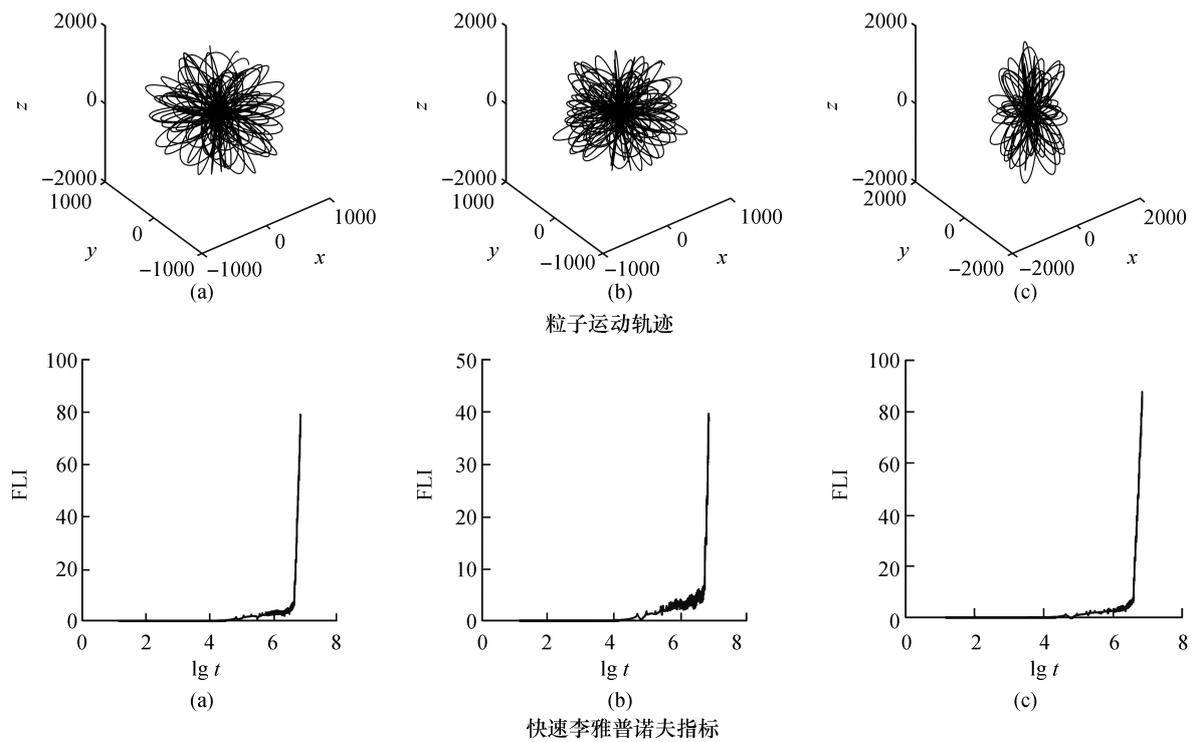


图 2 含有四极矩的后牛顿引力场下粒子的运动情况

Fig. 2 Particle's motion in a post-Newtonian gravitational field with quadrupole moment

### 4 讨论

本文通过数值模拟研究了含有四极矩的后牛

顿引力场中粒子运动演化的混沌性。图 1 显示在没有四极矩的后牛顿引力场中,各个轨迹图只中的试验粒子运动轨道是有规律的,并且分析对应

的快速李雅普诺夫指标,发现其呈线性增长,可以判断出试验粒子的运动是非混沌的。图2显示在含有后牛顿四极矩引力场中,各个轨迹图中的试验粒子运动的轨迹是非常复杂混乱的,极有可能是混沌现象,通过分析对应的快速李雅普诺夫指标,发现其呈指数增长,我们可以判断出试验粒子运动是混沌的。我们的结果显示,在含有四极矩的后牛顿引力场中运动的试验粒子,引力源的四极矩会导致它的运动产生混沌现象。

#### 参考文献:

- [1] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of the atmospheric sciences*,1963,20(2):130-141.
- [2] HENON M, HEILES C. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments [J]. *The astronomical journal*,1964,69(7):66-73.
- [3] LI T Y, YORKE J A. Period three implies chaos [J]. *The american mathematical monthly*,1975,82(10):985-992.
- [4] ABUTER R, AMORIM A, ANUGU N, et al. (GRAVITY Collaboration) Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole [J]. *Astronomy & astrophysics*,2018,615(7):15-25.
- [5] 邓建中,刘之行. 计算方法[M]. 2版. 西安:西安交通大学出版社,2001:121-143.
- [6] 马大柱. 太阳系 n 体模拟的流形改正方法及其应用 [D]. 南昌:南昌大学,2008:1-76.
- [7] 伍歆,黄天衣. 判定轨道混沌的几个指标 [J]. *天文学进展*,2005,23(4):318-330.
- [8] WU X, HUANG T Y, ZHANG H. Lyapunov indices with two nearby trajectories in a curved spacetime [J]. *Physical review d*,2006,74(8):83-91.
- [9] 韩文标. 相对论自旋动力学系统的数值研究 [D]. 上海:中国科学院上海天文台,2009:1-116.
- [10] 王守成. 流形改正算法在非保守和耗散限制性三体问题中的应用 [D]. 南昌:南昌大学,2017:1-54.
- [11] RICHTER G W, MATZNER R A. Second-order contributions to gravitational deflection of light in the parametrized post-Newtonian formalism [J]. *Physical review d*,1982,26(6):1219-1224.

(责任编辑:扶文静)