

一类带渐近位势半线性椭圆方程解的多重性研究

杨洁勤, 陈会文, 刘冬元*, 肖可

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘要: 讨论了半线性椭圆方程 $-\Delta u + a(x)u = g(x, u)$ 解的多重性。其中非线性项 g 的原函数是渐近二次增长的, a 可以符号变换。通过使用临界点定理, 选取了一些新的条件来保证上述问题解的存在多重性, 改善了以前的研究结果。

关键词: 半线性椭圆方程; 渐近线性; 临界点理论

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-0062(2019)06-0041-05

Multiple Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Equations with Asymptotical Potentials

YANG Jieqin, CHEN Huiwen, LIU Dongyuan*, XIAO Ke

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Huan 421001, China)

Abstract: The multiplicity solutions for the semilinear elliptic equations $-\Delta u + a(x)u = g(x, u)$ were discussed. The primitive of the nonlinearity g is of asymptotically quadratic growth and the potential a is allowed to be sign-changing. Some new conditions are established by using critical point theory to guarantee multiple solutions of the above problem, which improve research results at present.

key words: semilinear elliptic equations; asymptotically linear; critical point theory

0 引言

这篇文章将研究下面半线性狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = g(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里的 $\Omega \in R^N (N \geq 3)$ 是有界区域, $\partial\Omega$ 是光滑边界, $g \in C(\overline{\Omega} \times R, R)$, 并且 $a \in L^{N/2}(\Omega)$ 。

近年来, 半线性椭圆方程引起了人们极大的兴趣。借助于变分法, 人们广泛地研究了问题非零解的存在性和多重性, 见参考文献[1-8]。大多数文章都是在超二次条件下讨论的, 如参考文献

收稿日期: 2019-07-27

基金项目: 湖南省教育厅基金资助项目(15C1171)

作者简介: 杨洁勤(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事偏微分方面的研究。E-mail: 1536837679@qq.com。* 通信作者刘冬元(1975-), 女, 副教授, 主要从事风险理论与保险精算方面的研究。E-mail: dongyuanliu1122@163.com

[3-4], 极少提到渐近二次的情况。除此之外, g 的选取条件不够优化。

本文将改进参考文献[9]定理 1.7 中 g 的条件, 在渐近线性的情况下得到方程(1)的非零解。

首先, 给出以下假设

(G1) $g(x, u) = V(x)u + f(x, u)$, 其中 $V: x \rightarrow R^{N \times N}$ 是有界函数;

(G2) 对于所有的 $x \in \Omega, u \in R, F(x, 0) = 0$, 并且存在 $m'_1, m'_2 > 0, \max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1+\sigma}\} < v_1 < v_2 < 1$ 使得 $|f(x, u)| \leq m'_1 |u|^{v_1} + m'_2 |u|^{v_2}$, 其中 $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$;

(G3) $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds: \Omega \times R \rightarrow R$, 对于每一个 $x \in \Omega, G(x, u)$ 在 u 中是连续可微的;

(G4) 对于所有的 $x \in \Omega, u \in R, G(x, u) = G(x, -u)$;

(G5) $\lim_{|u| \rightarrow 0} \frac{G(x, u)}{|u|^2} = +\infty$ 在 $x \in \Omega$ 上一致成立;

(G6) 当 $|u| \rightarrow \infty$ 时, $\widehat{G}(x, u) = 2\widehat{G}(x, u) - g(x, u)u \rightarrow +\infty$ 在 $x \in \Omega$ 上一致成立;

(G7) 对任意 $x \in \Omega, u \in R, \widehat{G}(x, u) \geq 0$ 。

定理 1 如果以上条件(G1) ~ (G7)都满足, 那么式子(1)有无数个非零解。

1 预备知识

为了证明主要结论, 首先要给出式(1)的变分背景。

鉴于 $a \in L^{N/2}(\Omega)$, 可知(2)是有界的(见参考文献[10]的命题 VI. 1. 2), 其中式(2)是在 $H_0^1(\Omega)$ 里定义的

$$Q(u, v) = \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + a(x)uv) dx \quad (2)$$

$$\forall (u, v) \in H_0^1(\Omega)$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示在 R^N 里的标准内积。用 $A = -\Delta + a$ 表示在 $L^2 \equiv L^2(\Omega)$ 与领域 $D(A)$ 的相关自共轭算子。通过参考文献[10]中定理 VI. 1. 4, 可知 $D(A)$ 作为 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间是稠密的, 并且 A 的谱是由特征值 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ 构成的, 这些特征值和对应的特征函数 $\{e_n\} (Ae_n = \mu e_n)$ 形成 L^2 里的正交基。在领域 $D(|A|^{1/2})$ 里, 令 $|A|$ 是 A 的特征值, $|A|^{1/2}$ 是 $|A|$ 的二次根, 令 $E = D(|A|^{1/2})$, 并且定义 E 里面内积和范数是

$$(u, v)_0 = (|A|^{1/2}u, |A|^{1/2}v)_2 + (u, v)_2$$

$$\|u\|_0 = (u, u)_0^{1/2}$$

其中 $(\cdot, \cdot)_2$ 表示 L^2 里的一般内积, E 是 Hilbert 空间。

引理 1 $E = H_0^1(\Omega)$, 范数 $\|\cdot\|$ 和在 $H_0^1(\Omega)$ 里的一般 Sobolev 范数 $\|\cdot\|_{1,2}$ 是等价的。证明见参考文献[11]中的引理 2.1。

设

$$n^- = \#\{i \mid \mu_i < 0\},$$

$$n^0 = \#\{i \mid \mu_i = 0\},$$

$$n^+ = n^- + n^0, \quad (3)$$

$$L^2 = L^- \oplus L^0 \oplus L^+ \quad (4)$$

是 L^2 的正交分解, 其中

$$L^- = \text{span}\{e_1, \dots, e_{n^-}\},$$

$$L^0 = \text{span}\{e_{n^-+1}, \dots, e_{n^+}\},$$

$$L^+ = (L^- \oplus L^0)^\perp = \overline{\text{span}\{e_{n^++1}, \dots\}}.$$

在 $E = H_0^1(\Omega)$ 里内积和范数分别是:

$$(u, v) = (|A|^{1/2}u, |A|^{1/2}v)_2 + (u^0, v^0)_2 \quad (5)$$

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}, \quad (6)$$

其中 $u = u^- + u^0 + u^+, v = v^- + v^0 + v^+$, 容易知道范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_0$ 是等价的, 所以选取 $(E, (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ 作为工作空间。

注 1 E 有正交分解 $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$, 其中 $E^- = L^-, E^0 = L^0$ 和 $E^+ = E \cap L^+ = \overline{\text{span}\{e_{n^++1}, \dots\}}$, 上面的正交分解在 L^2 里也是正交的。

引理 2 对于 $1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$, E 在 $L^p \equiv L^p(\Omega)$ 是

紧嵌入的, 在 $L^{\frac{2N}{N-2}} \equiv L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ 是连续嵌入的, 因此对于每一个 $1 \leq p \leq \frac{2N}{N-2}$, 存在 $\tau_p > 0$ 使得

$$|u|_p \leq \tau_p \|u\| \quad \forall u \in E, \quad (7)$$

其中 $|u|_p$ 表示 L^p 里的一般范数。

可知 $A = U|A|$ 是 A 的极分解, 这里 U 是部分等距, 可以和 $A, |A|, |A|^{1/2}$ 交换位置。对于任何 $u \in D(A)$ 和 $v \in E$, 有

$$Q(u, v) = \int_{\Omega} (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + a(x)uv) dx =$$

$$(Au, v)_2 = (|A| Uu, v)_2 =$$

$$(|A|^{1/2} Uu, v)_2 \quad (8)$$

因为 $D(A)$ 在 E 里面稠密, 所以对于所有的 $u, v \in E$, 式(8)成立。并且对于所有的 $u = u^- + u^0 + u^+ \in E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$, 有

$$Q(u, u) = ((p^+ - p^-)u, u) = \|u^+\|^2 - \|u^-\|^2 \quad (9)$$

其中 $p^*: E \rightarrow E^*$ 是对应的正交投影。

引理3 如果条件 (G1) ~ (G3) 成立, 那么对于所有的 $u \in E$, 函数 $\Phi: E \rightarrow R$ 定义为

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2) dx - \Psi(u) = \\ &\frac{1}{2} Q(u, u) - \Psi(u) = \\ &\frac{1}{2} (\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2) - \Psi(u) \quad (10)\end{aligned}$$

其中 $\Psi(u) = \int_{\Omega} G(x, u) dx$, 并且

$$\begin{aligned}\Phi'(u)v &= (u^+, v^+) - (u^-, v^-) - \Psi'(u)v = \\ &(u^+, v^+) - (u^-, v^-) - \int_{\Omega} g(x, u) v dx \\ &\forall u, v \in E \quad (11)\end{aligned}$$

此外, Φ 在 E 里的临界点是系统(1)的解。

证明: 通过使用参考文献[9]中引理 2.6 同样的方法, 很容易得到前面提到的结果, 这里我们省略。

引理4 可知 E 是无限维 Banach 空间, $\Phi \in C^1(E, R)$ 是偶函数, 满足 (PS) 条件, 并且 $\Phi(0) = 0$ 。如果 $X = Y \oplus Z$, 其中 Y 是有限维的, Φ 满足 (F1) 当 Φ 在 Ω 里下有界;

(F2) 对于有限维子空间 $\tilde{E} \in E$, 存在正常数 $\rho = \rho(\tilde{E})$ 和 $\alpha = \alpha(\tilde{E})$ 使得 $\Phi|_{B_{\rho} \cap \tilde{E}} \leq 0$ $\Phi|_{\partial B_{\rho} \cap \tilde{E}} \leq -\alpha$, 其中 $B_{\rho} = \{x \in E: \|x\| \leq \rho\}$ 。那么 Φ 有无数个非平凡临界点。

注2 变形引理可以用 (C) 条件替换 (PS) 条件来证明, 引理 4 在 (C) 条件下仍然成立。当 $m \rightarrow \infty$, 对于所有的 $\{u_m\} \in E$, 如果 $\Phi(u_m)$ 是有界的并且 $(1 + \|u_m\|) \|\Phi'(u_m)\| \rightarrow 0$, $\{u_m\}$ 就存在收敛的子序列。我们就说 Φ 满足 (C) 条件。

2 定理的证明

定义 $E_j = \text{Re}_j$

$$Y_k = \bigoplus_{j=0}^k E_j, Z_k = \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} E_j}, k \in N \quad (12)$$

引理5 对于所有的 $1 < \tau \in \left(\frac{1}{(1+\sigma)}, +\infty\right)$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\beta_k(\tau) = \sup_{u \in z_k, \|u\| = 1} \|u\|_{\tau} \rightarrow 0 \quad (13)$$

证明: 显然 $0 < \beta_{k+1}(\tau) \leq \beta_k(\tau)$, 所以当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\beta_k(\tau) \rightarrow \bar{\beta}(\tau)$ 。对于每一个 $k \geq 0$, 存在 $u_k \in z_k$ 使得 $\|u_k\| = 1$ 和 $\|u_k\| > \frac{\beta_k}{2}$ 。对于任意

的 $v = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{b}_i e_i$, 通过柯西—施瓦茨不等式, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}|(u_k, v)_0| &= \left| \left(u_k, \sum_{i=1}^{\infty} \bar{b}_i e_i \right)_0 \right| = \left| \left(u_k, \sum_{i=k}^{\infty} \bar{b}_i e_i \right)_0 \right| \leq \\ &\|u_k\| \left\| \sum_{i=k}^{\infty} \bar{b}_i e_i \right\| = \sum_{i=k}^{\infty} \|\bar{b}_i e_i\| \rightarrow 0\end{aligned}$$

这意味着 $u_k \rightarrow 0$ 。从引理 2 可知, 在 $L^q(\Omega, R)$ 里 $u_k \rightarrow 0$ 证明 $\bar{\beta}(\tau) = 0$ 。

通过引理 5, 可以选择正整数 $k_0 \geq n^+ + 1$ 使得

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{4m'_0} \|u\|^2 \quad (14)$$

其中 $m'_0 = \max_{x \in \Omega} |V(x)|$ 。

现在给出定理 1 的证明。

证明: 令 $Y = Y_{k_0}, Z = Z_{k_0}$, 显然 $\Phi \in C^1(E, R)$ 是偶函数并且 $\Phi(0) = 0$ 。接下来, 将会验证满足引理 4 的所有条件。

首先, 验证引理 4 中的 (F1), 通过 (G1)、(G2)、式(7)和式(14), 当 $u \rightarrow \infty$ 和 $u \in Z_{k_0}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx = \\ &\frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx \geq \\ &\frac{1}{2} \|u\|^2 - m'_0 \|u\|_2^2 - m'_1 \|u\|_{v_1+1}^{v_1+1} - \\ &m'_2 \|u\|_{v_2+1}^{v_2+1} \geq \\ &\frac{1}{4} \|u\|^2 - m'_1 \tau_{v_1+1}^{v_1+1} \|u\|_{v_1+1}^{v_1+1} - \\ &m'_2 \tau_{v_2+1}^{v_2+1} \|u\|_{v_2+1}^{v_2+1} \rightarrow \infty \quad (15)\end{aligned}$$

设 $\tilde{E} \in E$ 是任何有限维子空间。那么存在 $T > 0$ 使得

$$\|u\|^2 \leq T \|u\|_2^2 \quad \forall u \in \tilde{E} \quad (16)$$

凭借 (G5) 和上面给出的 T , 存在一个正常数 $\delta > 0$, 使得

$$G(x, u) \geq T |u|^2 \quad \forall x \in \Omega \text{ 和 } |u| \leq \delta \quad (17)$$

通过不等式(7), 对于任意的 $u \in \tilde{E}$, $\|u\| \leq \frac{\delta}{\tau_{\infty}}$, 有

$$\|u\|_{\infty} \leq \delta \quad (18)$$

鉴于不等式(16) ~ (18) 有

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \frac{1}{2} \|u^-\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx \leq$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u) dx &\leq \\ \frac{1}{2} \|u^+\|^2 - T \int_{\Omega} |u|^2 dx &\leq -\frac{1}{2} \|u\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

对于任意的 $u = u^- + u^0 + u^+ \in \tilde{E}$, 有 $\|u\| \leq \frac{\delta}{\tau_{\infty}}$. 那

么存在 $\rho = \rho(\tilde{E}) > 0$ 和 $\alpha = \alpha(\tilde{E}) > 0$ 使得

$$\Phi(u) \leq 0, \forall u \in B_{\rho} \cap \tilde{E};$$

$$\Phi(u) \leq -\alpha, \forall u \in \partial B_{\rho} \cap \tilde{E}.$$

最后, 将证明 Φ 满足 (C) 条件. 假设 $\{u_m\} \in E$ 是 Φ 的一个 (C) 序列, 也就是说, $\{\Phi(u_m)\}$ 是有界的并且当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$(1 + \|u_m\|) \|\Phi'(u_m)\| \rightarrow 0 \quad (20)$$

那么存在一个常数 $\tilde{T}_0$, 使得

$$|\Phi(u_m)| \leq \tilde{T}_0,$$

$$(1 + \|u_m\|) \|\Phi'(u_m)\| \leq \tilde{T}_0 \quad (21)$$

对于每一个 $m \in N$, 选择足够大的 $k \geq n^+ + 1$ 使得

$$\|u\|^2 \geq 2m'_0 \|u\|_2^2 \quad \forall u \in Z_k \quad (22)$$

其中 $m'_0 = \max_{x \in \Omega} |V(x)|$. 现在证明 $\{u_m\}$ 在 E 里是有界的. 事实上如果不是, 可以先假设当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\|u_m\| \rightarrow \infty$. 令 $u_m = \bar{w}_m + \bar{v}_m$, $z_m = \frac{u_m}{\|u_m\|}$, 那么 $z_m = 1$, $z_m = w_m + v_m \in E$, 这里 $w_m = \frac{\bar{w}_m}{\|u_m\|}$, $v_m = \frac{\bar{v}_m}{\|u_m\|}$, $\bar{w}_m \in Y_k$, $\bar{v}_m \in Z_k$. 在子列意义下, 有 $z_m \rightarrow z$, $w_m \rightarrow w$, 并且 $\zeta = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|$ 存在.

情况一: $\zeta = 0$. 因为 Y_k 的维度 $< \infty$, 所以有 $\|w_m\| \rightarrow \|w\| = 1$. 通过不等式 (21), 可以得到 $3\tilde{T}_0 \geq 2\Phi(u_m) - (\Phi'(u_m), u_m) \geq$

$$2 \int_{\Omega} G(x, u_m) dx - \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx \quad (23)$$

由 (G7) 知道, 对于 $\tilde{R}_1 > 3\tilde{T}_0$, 存在 $\tilde{R}_2 > 0$ 使得

$$\hat{G}(x, u) = 2 \int_{\Omega} G(x, u) dx - \int_{\Omega} g(x, u) u dx \geq \tilde{R}_1,$$

$$\forall x \in \Omega, |u| \geq \tilde{R}_2 \quad (24)$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 定义 $\Lambda_{\varepsilon} := \{x \in \Omega : |w(x)| \geq \varepsilon\}$ 和 $\Lambda_{m\varepsilon} := \{x \in \Omega : |v_m(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$.

首先, 存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$\{x \in \Omega : |u(x)| \geq \varepsilon_0\} \neq \emptyset$$

$$\forall u \in Y_k, \|u\| = 1$$

间接假设, 对于任意的正整数 i , 存在 $u_i \in Y_k \setminus \{0\}$, 使得

$$\gamma_1 = \left\{x \in \Omega : |w_i(x)| \geq \frac{1}{i}\right\} = \emptyset \quad (25)$$

其中 $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$. 在子列意义下, 因为 Y_k 的维度 $< \infty$, 如有必要, 对于 E 里的一些 $w_0 \in Y_k$, 假设 $w_i \rightarrow w_0$. 显然, $\|w_0\| = 1$. 由于在有限维空间 Y_k 上范数的等价性, 在 $L^2(\Omega, R)$ 里有, $w_i \rightarrow w_0$, 即当 $i \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{\Omega} |w_i(x) - w_0(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (26)$$

然后存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\gamma_2 = \{x \in \Omega : |w_0(x)| \geq \varepsilon_1\} \neq \emptyset \quad (27)$$

如果不是, 对于所有的正整数 i , 有

$$\gamma_2 = \left\{x \in \Omega : |w_0(x)| \geq \frac{1}{i}\right\} = \emptyset \quad (28)$$

这意味着当 $i \rightarrow \infty$ 时,

$$0 \leq \int_{\Omega} |w_0(x)|^4 dx < \frac{1}{i^2} \|w_0\|_2^2 \rightarrow 0$$

因此 $w_0 = 0$, 可知与 $\|w_0\| = 1$ 矛盾, 所以式 (27) 成立.

现在令 $\Omega_0 = \{x \in \Omega : |w_0(x)| \geq \varepsilon_1\}$, $\Omega_i = \{x \in \Omega : |w_i(x)| < \frac{1}{i}\}$.

由式 (25) 和式 (27), 有

$$\Omega_0 \cap \Omega_i \neq \emptyset.$$

对于所有的正整数 i , 让 i 足够大使得 $\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{i} > 0$,

然后我们有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(w_i(x) - w_0(x))|^2 dx &\geq \int_{\Omega_0 \cap \Omega_i} |w_i(x) - \\ w_0(x)|^2 dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_0 \cap \Omega_i} |w_0(x)|^2 dx - \\ \int_{\Omega_0 \cap \Omega_i} |w_i(x)|^2 dx &\geq \\ \int_{\Omega_0 \cap \Omega_i} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{i}\right)^2 &> 0 \end{aligned} \quad (29)$$

对于所有足够大的 i , 不等式 (29) 与式 (26) 矛盾, 这样就证明了猜想, 因此, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\Lambda_{\varepsilon} := \{x \in \Omega : |w(x)| \geq \varepsilon\} \neq \emptyset.$$

由不等式 (7) 可以得到, 当 $m \rightarrow \infty$,

$$\#\Lambda_{m\varepsilon} \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} |v_m(x)|^2 dx \leq \frac{4\tau_2^2}{\varepsilon^2} \|v_m\|^2 \rightarrow 0$$

然后有 $\#(\Lambda_{\varepsilon} \setminus \Lambda_{m\varepsilon}) \rightarrow \#\Lambda_{\varepsilon}$. 所以对于所有的 $x \in$

$\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda_{m\varepsilon}$ 和 $m \geq N'_0$, 存在 $N'_0 > 0$ 使得 $|z_m(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3}$. 可以得到 $|u_m(x)| \geq \frac{\varepsilon}{3} \|u_m\|$, 由 (G7)、不等式 (23) 和式 (24), 得到当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$3\tilde{T}_0 \geq \int_{\Omega} \hat{G}(x, u_m(x)) dx \geq \int_{\Lambda_\varepsilon \setminus \Lambda_{m\varepsilon}} \tilde{R}_1 \geq \tilde{R}_1$$

这与 $\tilde{R}_1 > 3\tilde{T}_0$ 矛盾。

情况 2: $\delta > 0$, 由 (G1)、(G2)、不等式 (7)、式 (22) 和 Höder 不等式, 有

$$\begin{aligned} T_0 &\geq (\Phi'(u_m), \bar{v}_m) = \\ &\|\bar{v}_m\|^2 - \int_{\Omega} g(x, u_m) \bar{v}_m(x) dx \geq \\ &\|\bar{v}_m\|^2 - \int_{\Omega} [(V(x)u_m(x), \bar{v}_m(x)) + \\ &(m'_1 |u_m(x)|^{v_1} + m'_2 |u_m(x)|^{v_2}) \times \\ &|\bar{v}_m(x)|] dx \geq \|\bar{v}_m\|^2 - m'_0 \|\bar{v}_m\|_2^2 - \\ &m'_1 \|u_m\|_{\frac{v_1}{2v_1}}^{v_1} \|\bar{v}_m\|_2 - \\ &m'_2 \|u_m\|_{\frac{v_2}{2v_2}}^{v_2} \|\bar{v}_m\|_2 \geq \\ &\frac{1}{2} \|\bar{v}_m\|^2 - m'_1 \tau_2 \tau_{2v_1}^{v_1} \|u_m\|^{v_1+1} - \\ &m'_2 \tau_2 \tau_{2v_2}^{v_2} \|u_m\|^{v_2+1} \end{aligned} \quad (30)$$

将不等式 (30) 两边同除以 $\|u_m\|^2$, 得到 $0 \geq \frac{\xi^2}{2} > 0$, 显然这是矛盾的。

所以, $\{u_m\}$ 在 $\|\cdot\|$ 里是有界的。接下来将证明在 $\|\cdot\|$ 里 $\{u_m\}$ 有收敛的子序列。鉴于 $\{u_m\}$ 的有界性, 不失一般性, 可以假设在 $\|\cdot\|$ 里

$$u_m \rightarrow u, u_m^+ \rightarrow u^+, u_m^- \rightarrow u^-, u_m^0 \rightarrow u^0 \quad (31)$$

现在, 可以证明在 $\|\cdot\|$ 里 $u_m \rightarrow u$ 了。由式 (11), 很容易得到

$$\begin{aligned} \|u_m^+ - u^+\|^2 &= (\Phi'(u_m) - \Phi'(u))(u_m^+ - u^+) + \\ &\int_{\Omega} (g(x, u_m) - g(x, u)) \cdot (u_m^+ - u^+) dx \end{aligned} \quad (32)$$

很明显知道当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$(\Phi'(u_m) - \Phi'(u))(u_m^+ - u^+) \rightarrow 0 \quad (33)$$

由不等式 (7)、式 (31)、引理 2 和 Höder 不等式, 当 $m \rightarrow \infty$ 有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g(x, u_m) - g(x, u))(u_m^+ - u^+) dx = \\ \int_{\Omega} g(x, u_m)(u_m^+ - u^+) dx - \int_{\Omega} g(x, u)(u_m^+ - \\ u^+) dx \leq (m'_0 \|u_m\|_2 + m'_1 \|u_m\|_{\frac{v_1}{2v_1}}^{v_1} + \\ m'_2 \|u_m\|_{\frac{v_2}{2v_2}}^{v_2}) \|u_m^+ - u^+\|_2 + (m'_0 \|u\|_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'_1 \|u\|_{\frac{v_1}{2v_1}}^{v_1} + m'_2 \|u\|_{\frac{v_2}{2v_2}}^{v_2}) \|u_m^+ - u^+\|_2 \leq \\ (m'_0 \tau_2 \|u_m\| + m'_1 \tau_{2v_1}^{v_1} \|u_m\|^{v_1} + \\ m'_2 \tau_{2v_2}^{v_2} \|u_m\|^{v_2}) \|u_m^+ - u^+\|_2 + \\ (m'_0 \tau_2 \|u\| + m'_1 \tau_{2v_1}^{v_1} \|u\|^{v_1} + \\ m'_2 \tau_{2v_2}^{v_2} \|u\|^{v_2}) \|u_m^+ - u^+\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (34)$$

所以, 由式 (32) ~ 不等式 (34), 可以得到当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\|u_m^+ - u^+\| \rightarrow 0$. 联系前面 $(E^- \oplus E^0)$ 的维度 $< \infty$ 这个条件, 推出在 $\|\cdot\|$ 里 $u_m \rightarrow u$. 因此, Φ 满足 (C) 条件。

通过引理 4, 得到了 Φ 有无数多个非零解, 也就是说, 方程 (1) 有无数多个非零解。

参考文献:

- [1] 张文丽, 钟立楠. R^N 中一类拟线性椭圆方程组非负解的存在性和多重性[J]. 数学物理学报: A 辑, 2013, 33(1): 174-184.
- [2] 金启胜. 一类半线性椭圆型方程边值问题的可解性[J]. 高师理科学刊, 2010, 30(2): 50-52.
- [3] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. Journal of functional analysis, 1973, 14(4): 349-381.
- [4] WILLEM M. Minimax theorems[M]. Germany: Springer science & Business media, 1997.
- [5] 王雪春. 半线性椭圆型方程及 Hamiltonian 系统解的存在性[D]. 无锡: 江南大学, 2010: 1-39.
- [6] 李鸿翔. 一类半线性椭圆型方程组多解的存在性[D]. 太原: 山西大学, 2016: 1-38.
- [7] 王芳. 一类半线性椭圆型方程组非平凡解的存在性[D]. 武汉: 中南民族大学, 2015: 91-42.
- [8] 李小帅, 钟金标. 一类半线性椭圆型方程边值问题的正径向解[J]. 安庆师范大学学报(自然科学版), 2018, 24(3): 18-20.
- [9] CHEN H W, HE Z M. Homoclinic solutions for second-order discrete hamiltonian systems with asymptotically quadratic potentials[J]. Mathematical methods in the applied sciences, 2014, 37(16): 2451-2462.
- [10] EDMUNDS D E, EVANS W D. Spectral theory and differential operators[M]. Oxford: Oxford University Press, 2018.
- [11] ZHANG Q Y, LIU C G. Multiple solutions for a class of semilinear elliptic equations with general potentials[J]. Nonlinear analysis: theory, methods & applications, 2012, 75(14): 5473-5481.
- [12] 甘汶彬. 某些半线性椭圆方程解的存在性问题[D]. 福州: 福建师范大学, 2016: 1-49.

(责任编辑: 周泉)