DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2019. 06. 007

具媒体影响的时滞 HIV 传染动力学模型及其解的正性和有界性

刘岩柏,朱惠延*,刘 芳

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:建立一类具媒体影响的时滞 HIV 传染动力学模型来研究媒体等对 HIV 传染的影响。通过运用时滞微分方程相关理论证明了模型解的正性;运用常微分方程比较定理和时滞微分方程解的指数有界定义等证明了模型解的有界性。研究模型解的正性与有界性是研究此类模型其它动力学性质的前提基础。

关键词:媒体影响;HIV 传染;时滞;正性;有界性

中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-0062(2019)06-0037-04

Positive and Boundedness of the Solution to HIV Infection Model with Delay Effects of Media

LIU Yanbai,ZHU Huiyan*,LIU Fang

(School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China)

Abstract:In order to study the influence of media on HIV infection,a class of HIV infection model with media effects is established. The positive solution of the model is proved by using the theory of delay differential equations;The boundedness of the solution of the model is proved by the comparison theorem of the ordinary differential equations and exponential bounded definition of delay differential equations. Studying the positive and boundedness of the solution to the model is the premise basis for studying the other dynamic properties of such models.

key words:media;HIV infection;delay;positive;boundedness

0 引 言

HIV 病毒自发现以来在全球的迅速传染,已经严重威胁了人类的健康安全。根据世界卫生组织(WHO)最新发布的报告,全球有 HIV 感染者约 3 670 万人[1]。HIV 感染的相关动力学模型为

收稿日期:2019-06-24

作者简介:刘岩柏(1994-),男,硕士研究生,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:1315335328@qq. com。*通信作者:朱惠延(1962-),女,教授,博士,主要从事生物数学方面的研究。E-mail:zhuhuiyan@126. com

HIV 的防治提供了有参考价值的理论依据[2-5]。随着社会科技创新的快速进步,不论是报纸广播等传统媒体,还是以微博微信为代表的新媒体的出现,都使得信息传播在大众间迅速普及。媒体等对传染病防治的影响也得到发展[6-7],具意识分类的 HIV 模型也得以提出和研究[8-9]。A. K. Misra[10]基于仓室模型考虑了媒体对传染病的影响,并假设媒体的报道是连续性的,建立了以下传染病模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=A-\beta XI-\mu XM-dX+\sigma I+\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta XI-(d+\alpha+\sigma)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}t}=\mu XM-dX_m-\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\gamma I-\gamma_0M,\end{cases}$$

其中,X,I,X_m 分别表示在 t 时刻将人口分为三个仓室的易感人群、感染者以及有防护意识的易感人群,M 表示在 t 时刻媒体报道的累积密度。在这个模型中,β 是易感者的感染率,μ 表示无意识人群接受媒体影响的传播率,α,d,σ 分别是疾病死亡率、自然死亡率和疾病恢复率,A 是人口的输入率,μ_0 是有意识人群向无意识人群的恢复率,γ 是媒体报道的增长率,γ_0 是低效能等造成的媒体宣传的损耗率。在此基础上 A. K. Misra[11]将 $\mu XM,\gamma I$ 改为饱和反应项来建立模型,王晓静等[12]考虑了时滞对模型的影响,得到了一些有益的成果。

考虑到媒体报道的累积密度不仅与感染者数量成比例,也与媒体自身的影响有关,同时考虑到 HIV 感染的终身特性,将模型修改为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=A-\beta XI-\mu XM-dX+\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta XI-(d+\alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}t}=\mu XM-dX_m-\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=f(I,M)-\gamma_0M,\end{cases}\tag{1}$$

其中,$f(I,M)$ 表示媒体报道的累积增长率,假设它感染者数量相关的同时还与媒体自身的报道密度有关,即 $f(I,M)=\gamma IM$。考虑到媒体对于 HIV 的感染病例报道依赖于卫生部门的发布,从而会产生一定的媒体报道时滞,简称媒体时滞。因此本文将讨论下面的模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=A-\beta XI-\mu XM-dX+\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta XI-(d+\alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}t}=\mu XM-dX_m-\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t-\tau)M(t-\tau)-\gamma_0M,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $X(0)>0,I(0)>0,X_m(0)>0,M(0)>0,\tau$ 表示媒体由于依赖过往感染病例所产生的媒体时滞。

由于 $N=X+I+X_m$,所以模型(2)可以写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta(N-I-X_m)I-(d+\alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}t}=\mu(N-I-X_m)M-dX_m-\mu_0X_m,\\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=A-dN-\alpha I,\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t-\tau)M(t-\tau)-\gamma_0M,\end{cases}\tag{3}$$

1 解的正性和有界性

令 $B=C([-\tau,0],R)$,它是从区间$[-\tau,0]$映射到 R 上的并且由连续函数映射的全体构成的一个 Banach 空间。对于任意的 $\varphi\in B$,定义范数 $\|\varphi\|=sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}|(\theta)|$。

系统(3)的初始条件是:

$$\begin{cases}I(\theta)\geqslant0,X_m(\theta)\geqslant0,N(\theta)\geqslant0,M(\theta)\geqslant0,\\ \theta\in[-\tau,0],\\ I(0)>0,X_m(0)>0,N(0)>0,M(0)>0。\end{cases}\tag{4}$$

由时滞微分方程的相关定理[13],系统(3)在上述初始条件下存在唯一解。设$(I(t),X_m(t),N(t),M(t))$是系统(3)在初始条件下的任意解。

定理 1 设$(I(t),X_m(t),N(t),M(t))$为系统(3)在初始条件(4)下的解,则有系统(3)的解都是非负的。

证明:由于系统(3)和系统(2)是等价的,通过解系统(2)的每个方程,分别得到,

$$X(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t(\beta I(\xi)+\mu M(\xi)+d)\mathrm{d}\xi}\left(X(0)+\int_0^t(A+\mu_0X_m(\eta))\mathrm{e}^{\int_0^t(\beta I(\xi)+\mu M(\xi)+d)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta\right),$$

$$I(t)=I(0)\mathrm{e}^{-\int_0^t(\alpha+d-\beta X(\eta))\mathrm{d}\eta},$$

$$X_m(t) = \mathrm{e}^{-(d+\mu_0)t}(X_m(0) + \int_0^t \mu X(\eta)M(\eta)\mathrm{e}^{(d+\mu_0)\eta}\mathrm{d}\eta),$$

$$M(t) = \mathrm{e}^{-\gamma_0 t}(M(0) + \int_0^t \gamma I(\eta-\tau)M(\eta-\tau)\mathrm{e}^{\gamma_0\eta}\mathrm{d}\eta)。$$

显然 $I(t) > 0$,现在证明 $M(t) > 0$,设存在 $t_1 > 0$,t_1 为第一个穿过 I 轴并使得 $M(t) < 0$ 的点,即满足 $M(t_1) = 0$ 且 $M'(t_1) < 0$。由系统(3)的第四个方程 $M'(t) = \gamma I(t_1-\tau)M(t_1-\tau)$,因为 $\tau \geqslant 0$,$I(t_1-\tau) > 0$,由于 t_1 是第一个穿过 I 轴并使得 $M(t) < 0$ 的点,即 $t \in [0,t_1]$ 时,$M(t) > 0$。$t_1-\tau \leqslant t_1$,故 $M(t_1-\tau) \geqslant 0$,得到 $M'(t_1) \geqslant 0$,这与假设矛盾,所以 $M(t) > 0$。

现在证明 $X_m(t) > 0$,同理运用反证法,设存在 $t_2 > 0$,t_2 为第一个穿过 I 轴并使得 $X_m(t) < 0$ 的点,即满足 $X_m(t_2) = 0$ 且 $X_m'(t_2) < 0$。由系统(3)的第三个方程 $X_m'(t_2) = \mu X(t_2)M(t_2)$,另外,

$$X(t_2) = \mathrm{e}^{-\int_0^{t_2}(\beta I(\xi)+\mu M(\xi)+d)\mathrm{d}\xi}(X(0) + \int_0^{t_2}(A + \mu_0 X_m(\eta))\mathrm{e}^{\int_0^{t_2}(\beta I(\xi)+\mu M(\xi)+d)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta)。$$

所以,$X(t_2) > 0$。由于 t_2 是第一个穿过 I 轴并使得 $X_m(t) < 0$ 的点,即 $t \in [0,t_2]$ 时,$X_m(t) \geqslant 0$。由上 $M(t) > 0$ 已经得证,得到 $X_m'(t_2) > 0$,这与假设矛盾,所以 $X_m(t) > 0$。

现在证明 $X(t) > 0$,由上,$M(t) > 0$ 已经得证,根据得到的积分式和给定的初始条件,

$$X(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t(\beta I(\xi)+\mu M(\xi)+d)\mathrm{d}\xi}(X(0) + \int_0^t(A + \mu_0 X_m(\eta))\mathrm{e}^{\int_0^t(\beta I(\xi)+\mu M(\xi)+d)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta)。$$

所以,$X(t) > 0$。

由于 $N = X + I + X_m$,所以 $N(t) > 0$。

如果 t_1, t_2 没有穿过 I 轴,运用反证法同样得到矛盾。

定理 2　设 $(I(t), X_m(t), N(t), M(t))$ 为系统(3)在初始条件(4)下的解,则我们有,

(1)存在 $G>0$,使得在 t 充分大之后有

$$I(t) \leqslant G, X_m(t) \leqslant G, N(t) \leqslant G,$$

成立;

(2)$M(t)$ 是指数有界的,即存在 $B>0$,$s>0$,当 $t \geqslant 0$ 时,有

$$M(t) \leqslant B\mathrm{e}^{st}$$

成立。

证明:

首先,由系统(3)的第三个方程

$$N'(t) = A - dN - \alpha I,$$

因为 $N'(t) = A - dN - \alpha I \leqslant A - dN(t)$,

由比较定理[14]得到

$$N(t) \leqslant \frac{A}{d} + \varepsilon(\text{其中 } \varepsilon \text{ 是任意小的数})。$$

由于 $N = X + I + X_m$,所以,

$$I, X_m \leqslant N \leqslant \frac{A}{d} + \varepsilon。$$

又,$M(t)$ 由系统(3)的第四个方程

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma I(t-\tau)M(t-\tau) - \gamma_0 M(t),$$

由 $I(t) \leqslant \frac{A}{d}$,得到

$$M'(t) = \gamma I(t-\tau)M(t-\tau) - \gamma_0 M(t) \leqslant \frac{\gamma A}{d}M(t-\tau),$$

两边积分得

$$M(t) \leqslant \int_0^t \frac{\gamma A}{d}M(t-\tau),$$

由指数有界的定义[15],我们得到

$$M(t) \leqslant (1 + \frac{\gamma A}{d})\int_0^t M(s)\mathrm{d}s + M_0,$$

根据 Gronwall 不等式[15],得到

$$M(t) \leqslant M_0 \mathrm{e}^{\frac{d+\gamma A}{d}t}。$$

2　结　论

本文建立了一类具媒体影响的时滞 HIV 传染动力学模型,并对系统解的正性和有界性得到了证明。该结论为具媒体影响的时滞 HIV 传染动力学模型的其它动力学性质的研究打下了前提性的基础。

参考文献:

[1] 中国疾病预防控制中心性病艾滋病预防控制中心. 最新艾滋病流行情况统计[EB/OL]. [2019-06-24]. http://ncaids. chinacdc. cn/xxgx/yqxx/201709/t20170929_153916. htm.

[2] ZHU H Y, ZOU X F. Impact of delays in cell infection and virus production on HIV-1 dynamics[J]. Mathematical medicine and biology, 2008, 25(2): 99-112.

[3] ZHU H Y, ZOU X F. Dynamics of a HIV-1 infection model with cell-mediated immune response and intracellular delay [J]. Discrete and continuous dynamical systems series B, 2009, 12(2): 513-526.

[4] ZHU HY, LUO Y, CHEN M L. Stability and Hopf bifurca-

tion of a HIV infection model with CTL-response delay [J]. Computers and mathematics with applications,2011, 62(8):3091-3102.

[5] 赵天霄,朱惠延,刘岩柏,等.具水平抑制及母婴垂直传播的分数阶 HIV/AIDS 传染病模型的稳定性研究[J].生物数学学报,2018,33(2):204-210.

[6] ZHAO H T,LIN Y P,DAI Y X. An SIRS epidemic model incorporating media coverage with timedelay[J]. Computational and mathematical methods in medicine,2014, 2014:680743.

[7] SHARMA A,MISRA A K. Modeling the impact of awareness created by media campaigns on vaccination coverage in a variable population[J]. Journal of biological systems, 2014,22(2):249-270.

[8] 朱惠延,刘小佑,彭湘.一类有意识分类及干预措施的分数阶 HIV/AIDS 传染病模型[J].邵阳学院学报(自然科学版),2017,14(3):1-5.

[9] 朱惠延,彭湘,刘小佑.一类具有意识分类的分数阶 HIV/AIDS 传染病模型的研究[J].南华大学学报(自然科学版),2016,30(4):62-66.

[10] MISRA A K,SHARMA A,SHUKLA J B. Modeling and analysis of awareness programs by media on the spread of infectious diseases[J]. Mathematical and computer modelling,2011,53(5/6):1221-1228.

[11] MISRA A K,RAI R K. Modeling the control of infecyopus diseases:effects of TV and social media Advertisements[J]. Mathematical biosciences and engineering, 2018,15(6):1315-1343.

[12] 王晓静,潘艳雪,王丹,等.一类具有媒体播报和时滞效应的传染病模型的稳定性分析[J].生物数学学报,2017,32(3):321-332.

[13] KUANG Y. Delay differential equations with applications in population dynamics[M]. San Diego:Academic Press, 1993:15-116.

[14] 马知恩,周义仓.常微分方程定性与稳定性方法[M].北京:科学出版社,2015:13-21.

[15] GYORI I,LADAS G. Oscillation theory of delay differential equtions with applications[M]. United States:Oxford University Press,1991:10-12.

(责任编辑:周泉)

(上接第 23 页)

[4] 陈亮,刘春莲,庄畅,等.三水盆地古近系下部湖相沉积的稀土元素地球化学特征及其古气候意义[J].沉积学报,2009,27(6):1155-1162.

[5] LIU C L,FÜRSICH F T,CHEN L,et al. Geochemical signatures of Early Paleogene source rocks in the Sanshui Basin,South China[J]. Acta geologica sinica,2010,84 (1):145-154.

[6] WELLER D J,DE PORRAS M E,MALDONADO A,et al. Petrology,geochemistry,and correlation of tephra deposits from a large early-Holocene eruption of Mentolat volcano,southern Chile[J]. Journal of South American earth sciences,2019,90:282-295.

[7] XIA L W,CAO J,HU S Z,et al. Organic geochemistry, petrology,and conventional and unconventional hydrocarbon resource potential of Paleogene saline source rocks in eastern China:The Biyang Sag of the Nanxiang Basin [J]. Marine and petroleum geology,2019,101:343-354.

[8] 刘春莲,董艺辛,车平,等.三水盆地古近系布心组黑色页岩中黄铁矿的形成及其控制因素[J].沉积学报, 2006,24 (1):75-80.

(责任编辑:扶文静)