第 33 卷第 6 期 南华大学学报(自然科学版) Vol. 33 No. 6
2019 年 12 月 Journal of University of South China(Science and Technology) Dec. 2019

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2019.06.005

一类四阶微分方程 Neumann 边值问题正解的存在性

王晶晶,路艳琼*

(西北师范大学 数学与统计学院,甘肃 兰州 730070)

摘　要:运用锥上的不动点指数理论获得了四阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)=f(x,y(x)),x\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases}$$

在条件 $k_1<k_2<0$ 下正解存在的最优条件,其中 $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$。

关键词:Neumann 边值问题;格林函数;正解;不动点指数

中图分类号:O175.8　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-0062(2019)05-0024-07

The Existence of Positive Solutions of Neumann Boundary Value Problems for a Class of Fourth-order Differential Equations

WANG Jingjing, LU Yanqiong*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou, Gansu 730070, China)

Abstract: The fixed point index theory of cone mapping is used to obtain the optimal conditions for existence of positive solutions of the fourth-order Neumann boundary value problem

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)=f(x,y(x)),x\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases}$$

with conditions $k_1<k_2<0$, where $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$.

key words: Neumann boundary value problem; Green's function; positive solution; fixed point theorem

0　引　言

四阶常微分方程边值问题是熟知的刻画弹性梁平衡状态的数学模型,在弹性力学和工程物理中有着广泛的应用,因此,非线性四阶常微分方程边值问题正解的存在性备受众多学者的关注[1-7],

收稿日期:2019-06-21

基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(11901464);甘肃省青年科技基金计划项目(1606RJYA232);西北师范大学青年教师科研能力提升计划一般项目(NWNU-LKQN-15-16)

作者简介:王晶晶(1995-),男,硕士研究生,主要从事差分方程及其应用方面的研究。E-mail:WJJ950712@163.com。*通信作者:路艳琼(1986-),女,副教授,博士,主要从事差分方程及其应用方面的研究。E-mail:luyq8610@126.com

尤其对两端简单支撑的静态梁方程的研究最为普遍[1-4]。2015 年 R. Vrabel[2]运用上下解方法研究了两端简单支撑的静态梁方程

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)= \\ f(x,y(x)),x\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=y''(0)=y''(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中 k_1,k_2 满足 $k_1<k_2<0$,然而对于四阶 Neumann 边值问题正解的研究还是相对较少。2008 年,F. Y. Li 与 Y. B Zhang[5]等人利用不动点指数理论和临界群理论研究了四阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)-2y''(x)+y(x)= \\ f(x,y(x)),x\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性,其中 $f\in C^1([0,1]\times\Re,\Re)$ 且 $f(x,\cdot)$ 在 $\Re$ 上单调递增。2009 年,郭建敏与郭彩霞[6-7]等人又利用变分方法和环绕定理以及第二形变引理得到带有两个参数的四阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+\eta y''(x)-\xi y(x)= \\ \lambda f(x,y(x)),x\in(0,1), \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases} \tag{3}$$

解的存在性,其中 $f\in C^1([0,1]\times\Re,\Re)$,$\xi,\eta\in\Re$,$\lambda\in\Re_+:[0,\infty)$都是参数且满足条件

$$\frac{\xi}{\Pi^4}+\frac{\eta}{\Pi^2}<1,\xi\geqslant-\frac{\eta^2}{4},\eta>-2\Pi^2。$$

随后在文献[7]中利用 Morse 理论和 Brezis-Nirenberg 定理研究了问题(3)解的存在性。

受上述文章的启发,本文运用锥上的不动点指数理论研究了四阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)= \\ f(x,y(x)),x\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases} \tag{4}$$

正解的存在性,其中 $k_1<k_2<0$,f 满足如下假设条件:

(H1)$f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$是连续的;

(H2)存在函数 $m_0(\cdot)\in C([0,1],(0,\infty))$使得 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(x,y)}{y}=m_0(x)$;

(H3)存在函数 $m_\infty(\cdot)\in C([0,1],(0,\infty))$使得

$$\lim_{y\to\infty}\frac{f(x,y)}{y}=m_\infty(x)。$$

令 $\lambda_1(g)$表示线性特征值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)= \\ \lambda_1 g(x)y(x),x\in(0,1), \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases} \tag{5}$$

的主特征值,其中 $\lambda_1\in\Re$ 为参数,且 $g:[0,1]\to(0,\infty)$是连续的。

基于假设(H1)~(H3)获得了问题(4)解存在的充分条件。

定理 1　假设条件(H1)~(H3)成立。若下列条件之一:

(H4)$\lambda_1(m_0)<1<\lambda_1(m_\infty)$;

(H5)$\lambda_1(m_0)>1>\lambda_1(m_\infty)$

成立,则问题(4)至少存在一个正解。

由定理 1 可直接获得如下的推论:

推论 1　假设条件(H1)~(H3)成立。若下列条件之一:

(i)$f_0=\lim\limits_{y\to0}\inf\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(x,y)}{y}=0$,

$$f^\infty=\lim_{y\to\infty}\inf_{t\in[0,1]}\frac{f(x,y)}{y}=+\infty;$$

(ii)$f^0=\lim\limits_{y\to0}\inf\limits_{t\in[0,1]}\dfrac{f(x,y)}{y}=+\infty$,

$$f_\infty=\lim_{y\to\infty}\inf_{t\in[0,1]}\frac{f(x,y)}{y}=0$$

成立,则问题(4)至少存在一个正解。

推论 2　假设条件(H1)~(H3)成立,若下列条件之一:

(i)$\lambda_1(m_0)<\lambda<\lambda_1(m_\infty)$;

(ii)$\lambda_1(m_0)>\lambda>\lambda_1(m_\infty)$

成立,则带参数的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)= \\ \lambda f(x,y(x)),x\in(0,1), \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0 \end{cases} \tag{6}$$

至少存在一个正解,其中 $\lambda_1\in\Re$ 为参数。

1　格林函数的性质与预备知识

定义函数空间 $E=C(0,1)$,则 E 按范数 $\|y\|=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}|y(x)|$构成 Banach 空间。定义锥

$$P=\{y\in E\,|\,y(x)\geqslant0,x\in[0,1]\}。$$

显然,P 为 E 中的非负锥。对任意的 $r>0$,记 P 中半径为 r 的开球为 $B_r=\{y\in P\,|\,\|y\|<r\}$。

若 $y\in C[0,1]\cap C^4(0,1)$ 满足问题(4)且 $y(x)>0$,$x\in(0,1)$,则称 y 是问题(4)的一个正解。

下面讨论问题(4)相应的格林函数表达式和

符号性质。由 $k_1<k_2<0$,令

$$k_1=-r^2,k_2=-m^2$$

且 r 与 m 都是大于零的常数满足 $r>m$,进而将问题(4)转化为如下的边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)}(x)-(m^2+r^2)y''(x)+m^2r^2y(x)= \\ f(x,y(x)),x\in[0,1], \\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0。\end{cases}$$

定义线性算子 $L:D(L)\to X$

$$Ly:=y^{(4)}-(m^2+r^2)y''+m^2r^2y,y\in D(L),$$

其中 $D(L):=\{y\in C^4[0,1]:y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0\}$。

为了获得算子 $Ly=0$ 的格林函数 $G(x,s)$,定义线性算子

$$L_1y:=y''-r^2y,$$

$$D(L_1):=\{y\in C^2[0,1]:y'(0)=y'(1)=0\}。$$

不难计算 $L_1y=0$ 的格林函数为

$$G_1(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cosh[r(1-t)]\cosh(rs)}{r\sinh r},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \dfrac{\cosh[r(1-s)]\cosh(rt)}{r\sinh r},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$$

定义线性算子

$$L_2y:=y''-m^2y,$$

$$D(L_2):=\{y\in C^2[0,1]:y'(0)=y'(1)=0\},$$

则 $L_2y=0$ 的格林函数为

$$G_2(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\cos[m(1-t)]\cosh(ms)}{m\sinh m},0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \\ \dfrac{\cos[m(1-s)]\cosh(mt)}{m\sinh m},0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$$

易证 $Ly=L_2(L_1y)$,且 $Ly=0$ 的格林函数是

$$G(x,s):=\int_0^1 G_2(x,t)G_1(t,s)\mathrm{d}t,\quad (x,s)\in[0,1]\times[0,1] \tag{7}$$

当 $0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}
G(x,s)=&\int_0^x \frac{\cosh[m(1-x)]\cosh(mt)}{m\sinh m}\frac{\cosh[r(1-s)]\cosh(rt)}{r\sinh r}\mathrm{d}t+ \\
&\int_x^s \frac{\cosh[m(1-t)]\cosh(mx)}{m\sinh m}\frac{\cosh[r(1-s)]\cosh(rt)}{r\sinh r}\mathrm{d}t+ \\
&\int_s^1 \frac{\cosh[m(1-t)]\cosh(mx)}{m\sinh m}\frac{\cosh[r(1-t)]\cosh(rs)}{r\sinh r}\mathrm{d}t= \\
&\frac{\cosh[m(1-x)]\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}\int_0^x\cosh(mt)\cosh(rt)\mathrm{d}t+ \\
&\frac{\cosh(mx)\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}\int_x^s\cosh[m(1-t)]\cosh(rt)\mathrm{d}t+ \\
&\frac{\cosh(mx)\cosh(rs)}{mr\sinh m\sinh r}\int_s^1\cosh[m(1-t)]\cosh[r(1-t)]\mathrm{d}t= \\
&\frac{\cosh[m(1-x)]\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{m\sinh(mx)\cosh(rx)-r\cosh(mx)\sinh(rx)}{m^2-r^2}\right]+ \\
&\frac{\cosh(mx)\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{-m\sinh[m(1-s)]\sinh(rs)-r\cosh[m(1-s)]\sinh(rs)}{m^2-r^2}-\right. \\
&\left.\frac{-m\sinh[m(1-x)]\cosh(rx)-r\cosh[m(1-x)]\sinh(rx)}{m^2-r^2}\right]+ \\
&\frac{\cosh(mx)\cosh(rs)}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{m\sinh[m(1-s)]\cosh[r(1-s)]-r\cosh[m(1-s)]\sinh[r(1-s)]}{m^2-r^2}\right]= \\
&\frac{\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{m\sinh(mx)\cosh(rx)\cosh[m(1-x)]-r\cosh(mx)\sinh(rx)\cosh[m(1-x)]}{m^2-r^2}+\right.
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{m\sinh[m(1-x)]\cosh(rx)\cosh(mx)+r\cosh[m(1-x)]\sinh(rx)\cosh(mx)}{m^2-r^2}\right]+$$

$$\frac{\cosh(mx)}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{m\sinh[m(1-s)]\cosh(rs)\cosh[r(1-s)]}{r^2-m^2}+\right.$$

$$\frac{r\cosh[m(1-s)]\sinh(rs)\cosh[r(1-s)]}{r^2-m^2}-$$

$$\left.\frac{m\sinh[m(1-s)]\cosh[r(1-s)]\cosh(rs)-r\cosh[m(1-s)]\sinh[r(1-s)]\cosh(rs)}{r^2-m^2}\right]=$$

$$\frac{\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{-m\cosh(rx)\sinh m}{r^2-m^2}\right]+\frac{\cosh(mx)}{mr\sinh m\sinh r}\left[\frac{r\cosh[m(1-s)]\sinh r}{r^2-m^2}\right]=$$

$$\frac{1}{r^2-m^2}\left[\frac{-m\sinh m\cosh(rx)\cosh[r(1-s)]}{mr\sinh m\sinh r}+\frac{r\sinh r\cosh[m(1-s)]\cosh(mx)}{mr\sinh m\sinh r}\right]=$$

$$\frac{1}{r^2-m^2}\left[\frac{\cosh(mx)\cosh[m(1-s)]}{m\sinh m}-\frac{\cosh(rx)\cosh[r(1-s)]}{r\sinh r}\right]。$$

作对称变换,即当$0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1$时,令$s=1-x,x=1-s$代入上式,从而问题(4)的格林函数的具体表达式

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{r^2-m^2}\left[\dfrac{\cosh[m(1-s)]\cosh(mx)}{m\sinh m}-\dfrac{\cosh[r(1-s)]\cosh(rx)}{r\sinh r}\right],0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{r^2-m^2}\left[\dfrac{\cosh[m(1-x)]\cosh(ms)}{m\sinh m}-\dfrac{\cosh[r(1-x)]\cosh(rs)}{r\sinh r}\right],0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1。\end{cases}\quad(8)$$

引理1　若$r,m\in(0,+\infty)$且满足$r>m$,则问题(4)的格林函数式(8)满足

$$G(x,s)>0,(x,s)\in[0,1]\times[0,1]。$$

证明　由事实

$$G_i(x,s)>0,i=1,2,(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$$

结合式(7)可知$G(x,s)>0,(x,s)\in[0,1]\times[0,1]$。

定义算子

$$(Ay)(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s,x\in[0,1]\quad(9)$$

$$(T_0y)(x)=\int_0^1 G(x,s)m_0(s)y(s)\mathrm{d}s,x\in[0,1]\quad(10)$$

$$(T_\infty y)(x)=\int_0^1 G(x,s)m_\infty(s)y(s)\mathrm{d}s,x\in[0,1]\quad(11)$$

则不难验证算子A的非零不动点是问题(4)的正解,其中$G(t,s)$是问题(4)相应的格林函数。

令

$$m=\min_{t,s\in[0,1]}G(t,s),M=\max_{t,s\in[0,1]}G(t,s)\quad(12)$$

则$m>0,M>0$。此外,定义如下的锥

$$K=\left\{y\in P\,\middle|\,y(x)\geqslant\frac{m}{M}\|y\|\right\},$$

易证K是P的子锥。

引理2　假定条件(H1)成立,则$A(K)\subset K$,$T_0(K)\subset K,T_\infty(K)\subset K$且$A,T_0,T_\infty:K\to K$是全连续。

证明　由条件(12)中m与M的定义得

$$Ay(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\geqslant m\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s,x\in[0,1],$$

$$Ay(x)=\int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\leqslant M\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s,x\in[0,1]$$

由此可知

$$Ay(x)\geqslant\frac{m}{M}\max_{x\in[0,1]}Ay(x)=\frac{m}{M}\|Ay\|$$

故$A(K)\subset K$。同理可证$T_0(K)\subset K,T_\infty(K)\subset K$,运用Arzera-Ascoli定理可证$A,T_0,T_\infty$是全连续算子。

引理3　假设条件(H2)成立,则由式(10)定义的算子T_0的谱半径$r(T_0)\neq 0$,且T_0的第一个特征值$\lambda_1(m_0)=(r(T_0))^{-1}>0$,且相应于$\lambda_1(m_0)$的特征函数$\varphi_1(\cdot)>0$。

证明　显然,存在$x_1\in(0,1)$,使得$G(x_1,x_1)>0$。因此,存在$[a_1,b_1]\subset(0,1)$,使得$x_1\in(a_1,b_1)$且对任意的$x,s\in[a_1,b_1]$有$G(x,s)>0$。令$\psi\in$

$C[0,1]$使得 $\psi(x)\geqslant 0$,且对任意的 $x\in[0,1]$,有 $\psi(x_1)=0,x\notin[a_1,b_1]$和 $\psi(x)>0,x\in[a_1,b_1]$,则

$$(T_0\psi)(x)=\int_0^1 G(x,s)m_0(s)f(s,\psi(s))\mathrm{d}s\geqslant \int_{a_1}^{b_1}G(x,s)m_0(s)f(s,\psi(s))\mathrm{d}s>0$$

进而存在一个常数 $c>0$,使得对任意的 $x\in[0,1]$都有 $c(T_0\psi)(x)\geqslant\psi(x)$成立。由文献[8-11]知,谱半径 $r(T_0)>0$,T_0 有一个正的特征值 $\lambda_1(m_0)=(r(T_0))^{-1}$ 且相应于 $\lambda_1(m_0)$的特征函数 $\varphi_1(\cdot)>0$。

类似可得

引理 4　假设条件(H3)成立,则由(11)定义的算子 T_∞ 的谱半径 $r(T_\infty)\neq 0$,且 T_∞ 的第一个特征值 $\lambda_1(m_\infty)=(r(T_\infty))^{-1}>0$,且相应于 $\lambda_1(m_\infty)$的特征函数 $\varphi_1(\cdot)>0$。

最后,给出本文的研究工具:

引理 5[11]　设 E 是 Banach 空间,$P\subset E$ 是锥,$\Omega(P)$是 P 中的有界开集。令 $A:\overline{\Omega(P)}\to P$ 是一个全连续算子,存在 $y_0\in P\backslash\{\theta\}$,使得

$$y-Ay\neq\mu y_0,\forall y\in\partial\Omega(P),\mu\geqslant 0$$

则不动点指数 $i(A,\Omega(P),P)=0$。

引理 6[11]　设 E 是 Banach 空间,$P\subset E$ 是锥,$\Omega(P)$ 是 P 中的有界开集且 $\theta\in\Omega(P)$。令 $A:\overline{\Omega(P)}\to P$ 是一个全连续算子,若

$$Ay\neq\mu y,\forall y\in\partial\Omega(P),\mu\geqslant 1,$$

则不动点指数 $i(A,\Omega(P),P)=1$。

2　主要结果的证明

定理 1 的证明只需证明满足条件(H4)和(H5)两种情形下由式(9)定义的算子 A 存在非零不动点。

情形(i)　条件(H4)成立。由 $\lambda_1(m_0)<1$ 和条件(H2)知,存在 $\varepsilon>0,r_1>0$ 使得

$$f(x,y)\geqslant(1+\varepsilon)m_0(x)y,\forall 0\leqslant y\leqslant r_1 \tag{13}$$

令 $y^*=\varphi_1$ 是算子 T_0 相应于特征值 $\lambda_1(m_0)$正的特征函数,则 $y^*=\lambda_1(m_0)T_0y^*$. 从而对任意的 $y\in\partial B_{r_1}\cap K$,由式(13)可得

$$(Ay)(x)\geqslant(1+\varepsilon)\int_0^1 G(x,s)m_0(s)y(s)\mathrm{d}s=(1+\varepsilon)(T_0y)(x),x\in[0,1] \tag{14}$$

不妨假设 A 在$\partial B_{r_1}\cap K$ 上没有不动点(否则,结论显然成立)。下面证明

$$y-Ay\neq\tau y^*,\forall y\in\partial B_{r_1}\cap K,\tau\geqslant 0 \tag{15}$$

反设存在 $y_1\in\partial B_{r_1}\cap K$ 且 $\tau\geqslant 0$,使得

$$y_1-Ay_1=\tau_1y^*。$$

因此 $\tau_1\geqslant 0$ 且 $y_1=Ay_1+\tau_1y^*\geqslant\tau_1y^*$。令

$$\tau^*=\sup\{\tau\mid y_1\geqslant\tau y^*\} \tag{16}$$

显然,$\tau^*\geqslant\tau_1>0$ 且 $y_1\geqslant\tau^*y^*$。由 $T_0(K)\subset K$ 可得 $\lambda_1(m_0)T_0y_1\geqslant\tau^*\lambda_1(m_0)T_0y^*=\tau^*y^*$。故由式(14)知

$$\begin{aligned}y_1&=Ay_1+\tau_1y^*\geqslant(1+\varepsilon)T_0y_1+\tau_1y^*=\\&\frac{1+\varepsilon}{\lambda_1(m_0)}\lambda_1(m_0)T_0y_1+\tau_1y^*\geqslant\\&\frac{1+\varepsilon}{\lambda_1(m_0)}\tau^*y^*+\tau_1y^*=\\&\left[\frac{1+\varepsilon}{\lambda_1(m_0)}\tau^*+\tau_1\right]y^*,\end{aligned}$$

结合 $\lambda_1(m_0)<1$ 知,这与 τ^* 的定义相矛盾。因此式(15)成立且由引理 5 可得

$$i(A,B_{r_1}\cap K,K)=0 \tag{17}$$

由 $\lambda_1(m_\infty)>1$,则存在 $0<\sigma<1$ 和 $r_2>r_1$,使得

$$f(x,y)\leqslant(1-\sigma)m_\infty(x)y,\forall y\geqslant r_2 \tag{18}$$

令 $T_1y=(1-\sigma)T_\infty y,y\in C[0,1]$,则 $T_1:C[0,1]\to C[0,1]$为有界线性算子且 $T_1(K)\subset K$。定义

$$M^*=M\sup_{y\in\partial B_{r_2}\cap K}\int_0^1 f(s,y(s))\mathrm{d}s \tag{19}$$

显然 $M^*<+\infty$。令

$$W=\{y\in K\mid y=\mu Ay,0\leqslant\mu\leqslant 1\}$$

下证 W 是有界的。对任意的 $y\in W$,令 $y(x)=\min\{y(x),r_2\}$且定义 $E(x)=\{x\in[0,1]\mid y(x)>r_2\}$,则

$$\begin{aligned}y(x)&=\mu(Ay)(x)\leqslant\int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s=\\&\int_{E(x)}G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s+\\&\int_{[0,1]\backslash E(x)}G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&(1-\sigma)\int_0^1 G(x,s)m_\infty y(s)\mathrm{d}s+\\&M\int_{[0,1]\backslash E(x)}f(s,y(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&(1-\sigma)(T_\infty y)(x)+M^*=\\&(T_1y)(x)+M^*,x\in[0,1]\end{aligned} \tag{20}$$

从而

$$((I-T_1)y)(x)\leqslant M^*,x\in[0,1]$$

因为 $\lambda_1(m_\infty)>1$ 是 T_∞ 的主特征值且 $0<\sigma<1$,T_1 的主特征值$(r(T_1))^{-1}=\dfrac{\lambda_1(m_\infty)}{1-\sigma}>1$,所以逆算子

$(I-T_1)^{-1}$ 存在且

$$(I-T_1)^{-1}=I+T_1+T_1^{\,2}+\cdots+T_1^{\,n}+\cdots$$

由 $T_1(K)\subset K$ 可知 $(I-T_1)^{-1}(K)\subset K$。因此,$y(x)\leqslant(I-T_1)^{-1}M^*,x\in[0,1]$ 且 W 是有界的。

选取 $r_3>\max\{r_2,\sup W\}$。由不动点指数的同伦不变性可得

$$i(A,B_{r_3}\cap K,K)=i(\theta,B_{r_3}\cap K,K)=1 \tag{21}$$

结合式(17)和式(21),可得

$$i(A,(B_{r_3}\cap K)\backslash(B_{r_1}\cap K),K)=$$
$$i(A,B_{r_3}\cap K,K)-i(A,B_{r_1}\cap K,K)=1$$

故 A 在 $(B_{r_3}\cap K)\backslash(B_{r_1}\cap K)$ 上至少存在一个不动点,即问题(4)至少存在一个正解。

情形(ii)　条件(H5)成立。由 $\lambda_1(m_\infty)<1$ 和条件(H3)知,存在 $\varepsilon>0$ 与 $\frac{m}{M}R\geqslant R_1>0$,使得

$$f(x,y)\geqslant(1+\varepsilon)m_\infty(x)y,\forall y\geqslant R_1 \tag{22}$$

记 ψ_1 为算子 T_∞ 的相应于特征值 $\lambda_1(m_\infty)$ 的正特征函数,即 $\psi_1=\lambda_1(m_\infty)T_\infty\psi_1$。对任意的 $y\in\partial B_R\cap K$,得

$$(Ay)(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$(1+\varepsilon)\int_0^1 G(x,s)m_\infty(s)y(s)\mathrm{d}s=$$
$$(1+\varepsilon)(T_\infty y)(x),x\in[0,1]。$$

不妨设 A 在 $\partial B_R\cap K$ 上无不动点。否则,定理得证。下证

$$y-Ay\neq\mu\psi_1,\forall y\in\partial B_R\cap K,\mu\geqslant 0。$$

反设存在 $y_2\in\partial B_R\cap K,\mu_2\geqslant 0$,使得 $y_2-Ay_2=\mu_2\psi_1$,则

$$y_2=Ay_2+\mu_2\psi_1\geqslant\mu_2\psi_1,\ \mu_2>0。$$

令 $\mu^*=\sup\{\mu|y_2\geqslant\mu\psi_1\}$,显然,$\mu^*\geqslant\mu^2>0$ 且 $y_2\geqslant\mu^*\psi_1$。由 $T_\infty(K)\subset K$ 知,

$$\lambda_1(m_\infty)T_\infty y_2\geqslant\mu^*\lambda_1(m_\infty)T_\infty\psi_1=\mu^*\psi_1。$$

因此

$$y_2=Ay_2+\mu_2\psi_1\geqslant Ay_2\geqslant$$
$$\frac{1+\varepsilon}{\lambda_1(m_\infty)}\lambda_1(m_\infty)T_\infty y_2\geqslant\frac{1+\varepsilon}{\lambda_1(m_\infty)}\mu^*\psi_1。$$

这与 μ^* 的定义矛盾,从而引理 5 的条件均成立。因此

$$i(A,B_R\cap K,K)=0。 \tag{23}$$

由 $\lambda_1(m_0)>1$ 知,存在 $0<r<1,0<\varepsilon<1$,使得

$$f(x,y)\leqslant(1-\varepsilon)m_0(x)y,\forall 0\leqslant y<r。 \tag{24}$$

定义 $T_2y=(1-\varepsilon)T_0y,y\in C[0,1]$。因此,不难验证 $T_2:K\to K$ 是一个线性有界全连续算子且 $r(T_2)<1$。

对任意的 $y\in\partial B_r\cap K$,由式(24)可得

$$(Ay)(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$(1-\varepsilon)\int_0^1 G(x,s)m_0(s)y(s)\mathrm{d}s=$$
$$(T_2y)(x),x\in[0,1]。$$

因此对任意的 $\partial B_r\cap K$,有 $Ay\leqslant T_2y$。不失一般性,假设 A 在 $\partial B_r\cap K$ 上没有不动点(否则结论成立)。

下面证明

$$Ay\neq\mu y,\forall y\in\partial B_r\cap K,\mu\geqslant 1 \tag{25}$$

反设存在 $y_3\in B_r\cap K$ 和 $\mu_3\geqslant 1$,使得 $Ay_3=\mu_3y_3$。由题设 $\mu_3>1$ 且 $\mu_3y_3=Ay_3\leqslant T_2y_3$。由归纳法可得

$$\mu_3^ny_3\leqslant T_2^ny_3(n=1,2,\cdots)。$$

从而

$$\mu_3^ny_3\leqslant T_2^ny_3\leqslant\|T_2^n\|\|y_3\|,$$

且在 $[0,1]$ 上取最大值,有 $\mu_3^n\leqslant\|T_2^n\|$。由 Gelfand's 公式知

$$r(T_2)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T_2^n\|}\geqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|\mu_3^n\|}=\mu_3>1,$$

这与 $r(T_2)=\frac{1-\varepsilon}{\lambda_1(m_0)}<1$ 得出矛盾。因此式(25)成立且由引理 6 知

$$i(A,B_r\cap K,K)=1。 \tag{26}$$

结合式(23)和式(26)可得

$$i(A,(B_R\cap K)\backslash(B_r\cap K),K)=i(A,B_R\cap K,K)-$$
$$i(A,B_r\cap K,K)=-1。$$

因此,算子 A 在 $(B_R\cap K)\backslash(B_r\cap K)$ 上至少存在一个不动点。即问题(4)至少存在一个正解。

推论 1 的证明　与定理 1 的证明类似,此处不再赘述。

推论 2 的证明　由条件(i),(ii)可知

$$\frac{\lambda_1(m_0)}{\lambda}>1>\frac{\lambda_1(m_\infty)}{\lambda},\frac{\lambda_1(m_0)}{\lambda}<1<\frac{\lambda_1(m_\infty)}{\lambda}$$

成立,易见 $\mu_1(m_0)=\frac{\lambda_1(m_0)}{\lambda}$ 是线性特征值问题

$$\begin{cases}y^{(4)}(x)+(k_1+k_2)y''(x)+k_1k_2y(x)=\\ \mu\lambda m_0(x)y(x),x\in[0,1],\\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0\end{cases}$$

的主特征值,其中 μ 为参数,$\mu_1(m_\infty)=\frac{\lambda_1(m_\infty)}{\lambda}$ 的定义是类似的。故结合定理 1 可得推论 2 成立。

注记 1　注意到定理 1 和推论 2 所给的条件是保证问题(4)正解存在的最优条件。令 $k_1+k_2=$

$-5, k_1k_2=4, f(x,s)=s+h(s)$,其中

$$h(s)=\begin{cases}\dfrac{2s}{s^2+1}, s\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\\ \dfrac{2s^3}{s^2+1}, s\in[-1,1]。\end{cases}$$

考虑如下的四阶 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}y^{(4)}(x)-5y''(x)+4y(x)=\\ \lambda f(x,y(x)), x\in[0,1],\\ y'(0)=y'(1)=y'''(0)=y'''(1)=0\end{cases}\quad(27)$$

显然 $m_0=m_\infty=1$。易见 $\lambda_1(m_0)=\lambda_1(m_\infty)=\lambda_1(1)$。由推论 2 知问题(27)没有正解,事实上,假设当 $\lambda=\lambda_1(1)$ 时,问题(27)存在正解 $y(x)$,其中 $\lambda_1(1)$ 是问题(5)的主特征值,这里 $g(x)\equiv1$。令 $\varphi_1(x)>0$ 是相应于特征值 $\lambda_1(1)$ 的特征函数,在问题(27)方程两端乘以 $\varphi_1(x)$ 且在 0 到 1 积分得到

$$\lambda_1(1)\int_0^1\varphi_1(s)y(s)\,ds=\lambda_1(1)\int_0^1\varphi_1(s)y(s)\,ds+\lambda_1(1)\int_0^1\varphi_1(s)h(y(s))\,ds。$$

由此可以得到 $\lambda_1(1)\int_0^1\varphi_1(s)h(y(s))\,ds=0$,但容易验证

$$\lambda_1(1)\int_0^1\varphi_1(s)h(y(s))\,ds>0$$

得到矛盾!

参考文献:

[1] CABADA A,ENGUICA R R. Positive solutions of fourth order problems with clamped beam boundary conditions [J]. Nonlinear analysis,2011,74(10):3112-3112.

[2] VRABEL R. On the lower and upper solutions method for the problem of elastic beam with highed ends [J]. Journal of mathematical analysis and applications,2015, 421(2):1455-1468.

[3] MA R Y,WANG J X,YAN D L. The method of lower and upper solutions for fourth order equations with the Navier condition [J]. Boundary value problems, 2017 (1):152.

[4] MA R Y,WANG J X,LONG Y. Lower and upper solution method for the problem of elastic beam with hinged ends [J]. Journal of fixed point theory and applications,2018, 20(1):46.

[5] LI F Y,ZHANG Y B,LI Y H. Sign-changing solutions on a kind of fourth-order Neumann boundary value problem [J]. Mathematical analysis and applications,2008,344 (1):417-428.

[6] 郭彩霞,郭建敏,李华鹏. 带有参数的四阶 Neumann 边值问题解的存在性[J]. 数学的实践与认识,2009, 39(14):243-246.

[7] GUO J M,GUO C X,LI H P. Existence and multiplicity of solutions for fourth-order Neumann boundary value problem with parameters[J]. Journal of biomathematics, 2011,26(1):34-42.

[8] ZHANG G W,SUN J X. Positive solutions of m-point boundary value problems [J]. Journal of mathematical analysis and applications,2004,291(2):406-418.

[9] CUI Y J,ZOU Y M. Nontrivial solutions of singular superlinear m-point boundary value problems[J]. Applied mathematics and computation,2007,182(2):1256-1264.

[10] GUO D J,LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. San Diego:Academic Press,New York,1988.

[11] GUO D J. Nonlinear functional analysis [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press,1985.

(责任编辑:周泉)