

## 非线性薛定谔-基尔霍夫型系统的基态解

袁瑞银, 刘艳琪\*

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

**摘要:** 研究如下薛定谔-基尔霍夫型系统,

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{R^3}|\nabla u_1|^2dx\right)\Delta u_1+\lambda_1 u_1=\mu_1|u_1|^{2q-2}u_1+b_{12}|u_2|^q|u_1|^{q-2}u_1, \\ -\left(a+b\int_{R^3}|\nabla u_2|^2dx\right)\Delta u_2+\lambda_2 u_2=\mu_2|u_2|^{2q-2}u_2+b_{21}|u_1|^q|u_2|^{q-2}u_2, \\ u_1\in H^1(R^3), u_2\in H^1(R^3), \end{cases}$$

其中  $a>0, b\geq 0, \lambda_i, \mu_i (i=1, 2)$  是任意给定的正常数,  $b_{12}=b_{21}>0$  且  $q\in(2, 3)$ 。

分析非局部项  $(\int_{R^3}|\nabla u_i|^2dx)$  带来的扰动影响, 利用变分方法证明了系统存在一个正

基态解  $(u_1^*, u_2^*)$ , 且  $u_i^* (i=1, 2)$  是径向对称衰减的。

**关键词:** 薛定谔系统; 基尔霍夫项; Nehari 流形; 基态解

**中图分类号:** O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-0062(2019)05-0068-04

## Ground States for a Nonlinear Schrödinger System with Kirchhoff Term

YUAN Ruiyin, LIU Yanqi

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

**Abstract:** This paper mainly studies the existence of ground states for a coupled Schrödinger- Kirchhoff-type equations

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{R^3}|\nabla u_1|^2dx\right)\Delta u_1+\lambda_1 u_1=\mu_1|u_1|^{2q-2}u_1+b_{12}|u_2|^q|u_1|^{q-2}u_1, \\ -\left(a+b\int_{R^3}|\nabla u_2|^2dx\right)\Delta u_2+\lambda_2 u_2=\mu_2|u_2|^{2q-2}u_2+b_{21}|u_1|^q|u_2|^{q-2}u_2, \\ u_1\in H^1(R^3), u_2\in H^1(R^3), \end{cases}$$

where  $a>0, b\geq 0, \lambda_i, \mu_i (i=1, 2)$  are positive constants,  $b_{12}=b_{21}>0$  and  $q\in(2, 3)$ . It employs variational methods to show that the above system has at least one positive ground

收稿日期: 2019-05-31

作者简介: 袁瑞银(1993-), 女, 硕士研究生, 主要从事偏微分方面的研究。E-mail: ruiyin5217sina@.com。\* 通信作者: 刘艳琪(1980-), 女, 讲师, 博士研究生, 主要从事人工智能、算法分析方面的研究。E-mail: 53785064@qq.com

state  $(u_1^*, u_2^*)$  with  $u_i^*, (i=1, 2)$  radially decreasing.

**key words:** Coupled Schrödinger equations; Kirchhoff term; Nehari manifold; ground state solution

## 0 引言

本文主要研究以下非线性薛定谔-基尔霍夫型系统基态解的存在性

$$\begin{cases} -\left(a + b \int_{R^3} |\nabla u_1|^2 dx\right) \Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 |u_1|^{2q-2} u_1 + b_{12} |u_2|^q |u_1|^{q-2} u_1, \\ -\left(a + b \int_{R^3} |\nabla u_2|^2 dx\right) \Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = \mu_2 |u_2|^{2q-2} u_2 + b_{21} |u_1|^q |u_2|^{q-2} u_2, \\ u_1 \in H^1(R^3), u_2 \in H^1(R^3), \end{cases} \quad (1)$$

其中参数  $a > 0, b \geq 0, \lambda_i, \mu_i > 0 (i=1, 2), b_{12} = b_{21} > 0, q \in (2, 3)$ 。若  $a=1, b=0$  时, 方程组(1)变成如下形式

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 |u_1|^{2q-2} u_1 + b_{12} |u_2|^q |u_1|^{q-2} u_1, \\ -\Delta u_2 + \lambda_2 u_2 = \mu_2 |u_2|^{2q-2} u_2 + b_{21} |u_1|^q |u_2|^{q-2} u_2, \\ u_1 \in H^1(R^3), u_2 \in H^1(R^3). \end{cases}$$

Oliverira 和 Tavares 在文献[1]中运用 Nehari 流形方法证明了以上系统存在基态解, 并把该系统推广到  $n$  个方程组的情形, 其中基态解的每个分量都是非平凡的。受文献[1]的启发, 本文研究一类更加复杂的带有基尔霍夫项的耦合薛定谔系统基态解的存在性问题。

基尔霍夫型方程产生于弹性力学当中, 以及在人口动力学、非牛顿力学、宇宙物理、血浆问题和弹性理论等诸多领域都有广泛应用, 具有深刻的物理意义, 见文献[4-6]。由于算子  $b\left(\int_{R^3} |\nabla u|^2 dx\right)$  的出现, 这类问题经常被视为非局部问题, 具体体现在系统(1)不再是一个点态等式, 这不同于经典的椭圆问题。最近, 越来越多的学者通过使用变分技术等来研究基尔霍夫方程解的存在性以及解的各种性态, 可以参看文献[7-9]等。在文献[2]中, Liu 和 Guo 利用了山路引理等方法, 证明了渐近线性薛定谔-基尔霍夫型方程正解的存在性。近年来, 方程组解的存在性研究也取得了丰富的成果。在文献[3]中, Li 和 Zhang 研究了带有扰动项的薛定谔系统, 利用扰动法证明了系统的正解的存在性。这些对薛定谔系统解的研究为本文奠定了研究基础。

利用变分法证明系统(1)解的存在性问题实质是转化为一个能量泛函的临界点问题, 关键是

证明能量泛函的紧性。由于本文在全空间  $R^3$  中研究薛定谔-基尔霍夫型系统, 标准的 Sobolev 空间缺乏相应的紧性, 给研究带来了很大的困难。为了克服这个困难, 首先要限制能量泛函在一个抽象的流形上, 通过证明泛函在流形上是有下界的, 从而获得极小化序列; 然后利用已有的极小化序列以及施瓦兹对称重排原理来构造一类具有对称性的极小序列, 从而获得紧性, 进而证明系统(1)具有基态解。

## 1 概念及主要结论

本文主要讨论三维欧氏空间以及  $q \in (2, 3)$  的情况。根据系统(1), 定义相应的能量泛函

$$I: E = (H^1(R^3), H^1(R^3)) \rightarrow R,$$

具体表示为

$$\begin{aligned} I(u_1, u_2) = & \frac{1}{2} (\|u_1\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2\|_{\lambda_2}^2) + \\ & \frac{b}{4} \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_1|^2 dx \right)^2 + \left( \int_{R^3} |\nabla u_2|^2 dx \right)^2 \right] - \\ & \frac{1}{2q} (\mu_1 |u_1|_{2q}^{2q} + \mu_2 |u_2|_{2q}^{2q}) - \\ & \frac{1}{q} (b_{12} |u_1 u_2|_q^q + b_{21} |u_1 u_2|_q^q), \end{aligned}$$

其中  $H^1(R^3)$  为标准的 Sobolev 空间, 其范数定义为

$$\|u_i\|_{\lambda_i}^2 := \int (a |\nabla u_i|^2 + \lambda_i u_i^2) dx \quad i=1, 2,$$

$|\cdot|_q$  表示在  $L^q(R^n)$  空间上的范数。

已经提到薛定谔-基尔霍夫方程组的基态解的问题能够转化为求解  $I(u_1, u_2)$  的极小值问题。首先给出一个抽象流形的定义:

$$\begin{aligned} N := & \{(u_1, u_2) \in E : (u_1, u_2) \neq (0, 0), \\ & \nabla I(u_1, u_2) \perp (u_1, u_2)\}, \end{aligned}$$

且

$$c := \inf\{I(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in N\}.$$

此外,定义如下一个泛函:

$$\begin{aligned} \tau_2(u_1, u_2) &= \langle \nabla I(u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle \\ &= (\|u_1\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2\|_{\lambda_2}^2) + \\ &\quad b \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_1|^2 dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{R^3} |\nabla u_2|^2 dx \right)^2 \right] - (\mu_1 |u_1|_{2q}^{2q} + \\ &\quad \mu_2 |u_2|_{2q}^{2q} + 2b |u_1 u_2|_q^q). \end{aligned}$$

综上所述,当流形  $N$  上存在某一点使得泛函  $I$  达到极小值  $c$  时,通过拉格朗日乘子原理能够证明该点即为薛定谔基尔霍夫系统的基态解。给出以下存在性定理:

**定理 1** 当  $q \in (2, 3)$  时,系统(1)至少存在一个基态解  $(u_1^*, u_2^*) \in E$ , 且

$$I(u_1^*, u_2^*) = \inf_{(u_1, u_2) \in N} I(u_1, u_2) = c.$$

## 2 定理 1 的证明

假设  $(u_1, u_2) \in E, (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ , 且  $\tau_2(u_1, u_2) \leq 0$ , 则一定存在  $t \in [0, 1]$  使得  $(tu_1, tu_2) \in N$ 。事实上,如果  $\tau_2(u_1, u_2) = 0$ , 只须令  $t = 1$  即可。若  $\tau_2(u_1, u_2) < 0$ , 则

$$\begin{aligned} \tau_2(tu_1, tu_2) &= t^2 (\|u_1\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2\|_{\lambda_2}^2) + \\ &\quad t^4 b \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_1|^2 dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{R^3} |\nabla u_2|^2 dx \right)^2 \right] - t^{2q} (\mu_1 |u_1|_{2q}^{2q} + \\ &\quad \mu_2 |u_2|_{2q}^{2q} - t^{2q} 2b |u_1 u_2|_q^q) \\ &= t^2 \left\{ (\|u_1\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2\|_{\lambda_2}^2) + \right. \\ &\quad t^2 b \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_1|^2 dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{R^3} |\nabla u_2|^2 dx \right)^2 \right] - \\ &\quad \left. t^{2q-2} (\mu_1 |u_1|_{2q}^{2q} + \mu_2 |u_2|_{2q}^{2q}) \right\} \\ &=: t^2 T(t) \end{aligned}$$

显然当  $t = 0$  时,  $T(0) > 0$ , 当  $t = 1$  时  $T(1) = \tau_2(u_1, u_2) < 0$ 。由连续函数的零点定理可知,一定存在  $t^* \in (0, 1)$  使得  $T(t^*) = 0$ 。因此,  $\tau_2(t^* u_1, t^* u_2) = 0$ , 并且  $(t^* u_1, t^* u_2) \in N$ 。

另外,若  $(u_1, u_2) \in N, \tau_2(u_1, u_2) = 0$ , 则由泛函  $I, \tau_2$  的定义可知

$$\begin{aligned} I(u_1, u_2) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) (\|u_1\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2\|_{\lambda_2}^2) + \\ &\quad b \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2q} \right) \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_1|^2 dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{R^3} |\nabla u_2|^2 dx \right)^2 \right] \end{aligned}$$

因此,泛函  $I$  在流形  $N$  上有下界。取一个极小值序列  $(u_{1,k}, u_{2,k}) \in N$  满足  $I(u_{1,k}, u_{2,k}) \rightarrow c, k \rightarrow \infty$ 。由以上事实可知,序列  $(u_{1,k}, u_{2,k})$  在空间  $E$  上是一致有界的。取  $u_{i,k}^* (i=1, 2)$  为  $u_{i,k}$  的径向对称重排序列。从文献[1]中可知,在  $L^p$  空间内重排序列的范数保持不变。此外

$$\|\nabla f^*\|_2 \leq \|\nabla f\|_2.$$

因此,

$$\|u_{1,k}^*\|_{\lambda_1}^2 + \|u_{2,k}^*\|_{\lambda_2}^2 \leq \|u_{1,k}\|_{\lambda_1}^2 + \|u_{2,k}\|_{\lambda_2}^2.$$

另外,有以下不等式成立

$$\int |u_{1,k} u_{2,k}| dx \leq \int u_{1,k}^* u_{2,k}^* dx.$$

因此,

$$\tau_2(u_{1,k}^*, u_{2,k}^*) \leq \tau_2(u_{1,k}, u_{2,k}) = 0.$$

由先前的证明可知  $(u_{1,k}^*, u_{2,k}^*) \in E, (u_{1,k}^*, u_{2,k}^*) \neq (0, 0)$  且  $\tau_2(u_{1,k}^*, u_{2,k}^*) \leq 0$ 。因此,存在  $t_k \in (0, 1)$  使得  $(t_k u_{1,k}^*, t_k u_{2,k}^*) \in N$ 。此外,

$$\begin{aligned} I(t_k u_{1,k}^*, t_k u_{2,k}^*) &= t_k^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) (\|u_{1,k}^*\|^2 + \\ &\quad \|u_{2,k}^*\|^2) + t_k^4 b \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2q} \right) \times \\ &\quad \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_{1,k}^*|^2 dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{R^3} |\nabla u_{2,k}^*|^2 dx \right)^2 \right] \leq \\ &\quad \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) (\|u_{1,k}^*\|^2 + \|u_{2,k}^*\|^2) + \\ &\quad b \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2q} \right) \left[ \left( \int_{R^3} |\nabla u_{1,k}^*|^2 dx \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \int_{R^3} |\nabla u_{2,k}^*|^2 dx \right)^2 \right] \\ &= I(u_{1,k}^*, u_{2,k}^*), \end{aligned}$$

由上可知

$$I(t_k u_{1,k}^*, t_k u_{2,k}^*) \rightarrow c, (k \rightarrow \infty).$$

因此,  $N$  中存在另一经向对称极小值序列  $(t_k u_{1,k}^*, t_k u_{2,k}^*)$ 。

假设存在  $u^* \in H^1(R^3)$  使得  $u_{i,k} \rightarrow u^*$  在  $H^1(R^3)$  中是弱收敛的,由前面可知  $(t_k u_{1,k}^*, t_k u_{2,k}^*)$  是对称序列,所以  $u_{i,k} \rightarrow u^* (i=1, 2)$  在  $L^{2q}(R^3)$  是强收敛的。此外  $(u_1^*, u_2^*) \neq (0, 0)$ 。通过柯西-

施瓦兹不等式和流形  $N$  的定义可知

$$\begin{aligned} |u_{1,k}|_{2q}^2 + |u_{2,k}|_{2q}^2 &\leq C_1 (\|u_{1,k}\|_{\lambda_1}^2 + \|u_{2,k}\|_{\lambda_2}^2) \\ &\leq C_2 (|u_{1,k}|_{2q}^{2q} + |u_{2,k}|_{2q}^{2q}), \end{aligned}$$

其中  $C_1, C_2$  是两个正常数。由以上不等式可知, 存在  $\delta > 0$  使得  $|u_{1,k}|_{2q} + |u_{2,k}|_{2q} \geq \delta$ , 进一步由范数不变性可知,

$$|u_{1,k}^*|_{2q} + |u_{2,k}^*|_{2q} \geq \delta,$$

不妨设  $(u_{1,k}, u_{2,k})$  去表示  $(t_k u_{1,k}^*, t_k u_{2,k}^*)$ 。很容易知道  $(u_{1,k}, u_{2,k})$  为  $E$  中的有界序列。假设存在  $(u_1^*, u_2^*) \in E$  使得  $(u_{1,k}, u_{2,k}) \rightarrow (u_1^*, u_2^*)$  在  $E$  中弱收敛。由 Fatou 引理可得

$$\tau_2(u_1^*, u_2^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \tau_2(u_{1,k}, u_{2,k}) = 0.$$

根据前面的证明可知, 存在  $t \in [0, 1]$  使得  $(tu_1^*, tu_2^*) \in N$ , 并且

$$\begin{aligned} \inf_N I_2 &\leq I(tu_1^*, tu_2^*) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) (\|u_1^*\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2^*\|_{\lambda_2}^2) + \\ &\quad t^4 b \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}\right) \left[ \left(\int_{R^3} |\nabla u_1^*|^2 dx\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{R^3} |\nabla u_2^*|^2 dx\right)^2 \right] \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) (\|u_1^*\|_{\lambda_1}^2 + \|u_2^*\|_{\lambda_2}^2) + \\ &\quad b \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2q}\right) \left[ \left(\int_{R^3} |\nabla u_1^*|^2 dx\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\int_{R^3} |\nabla u_2^*|^2 dx\right)^2 \right] \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_{1,k}, u_{2,k}) = \inf_N I_2. \end{aligned}$$

综上所述:  $u_{i,k} \rightarrow u_i^*$  在  $H^1(R^3)$  是强收敛的。

由拉格朗日乘子原理, 可知流形  $N$  是自然压缩的, 因此,  $(u_1^*, u_2^*)$  是系统(1)的基态解。

#### 参考文献:

- [1] OLIVEIRA F, TAVARES H. Ground states for a nonlinear Schrödinger system with sublinear coupling terms[J]. Advanced nonlinear studies, 2016, 16(2): 381-387.
- [2] LIU Z, GUO S. Positive solutions for asymptotically linear Schrödinger-Kirchhoff-type equations[J]. Mathematical methods in the applied science, 2017, 37(4): 571-580.
- [3] LI K, ZHANG Z. A perturbation result for system of Schrödinger equations of Bose-Einstein condensates in  $R^3$ [J]. National natural science foundation, 2016, 36(2): 851-860.
- [4] 赵洋洋. 带有临界指数的薛定谔-基尔霍夫型方程正解的存在性[D]. 太原: 中北大学, 2018.
- [5] 刘志苏. 薛定谔泊松方程与基尔霍夫方程解的存在性研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2015.
- [6] 张申贵. 一类变指数基尔霍夫型方程的无穷多解[J]. 应用数学学报, 2018, 41(6): 801-810.
- [7] 高芳, 陈林. 一类非齐次基尔霍夫型椭圆方程解的存在性[J]. 伊犁师范学院学报(自然科学版), 2018, 12(1): 4-9.
- [8] 李香萍. 两类基尔霍夫型问题解的存在性[D]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2016.
- [9] 高芳. 几类椭圆型微分方程解的存在性研究[D]. 伊宁: 伊犁师范大学, 2019.

(责任编辑: 周泉)