DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2019.05.010

一类和号内含有未知函数差分的和差分不等式中未知函数的估计

范乐乐

(河池学院 数学与统计学院,广西 宜州 546300)

摘　要:研究了一类 Gronwall-Bellman 型非线性和差分不等式,和号内不仅含有未知函数而且含有未知函数的差分,和项外具有非常数项因子。利用变量替换技巧和放大技巧等分析手段,给出了和差分不等式中未知函数的显式估计,最后结合实例说明所得的结果可以用来研究一类和差分方程解的定性性质。

关键词:非线性和差分不等式;变量替换和放大技巧;显式估计;和差分方程

中图分类号:O175.5　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-0062(2019)05-0060-04

Estimation of Unknown Function of a Class of Sum-Difference Inequalities with Difference of Unknown Function

FAN Lele

(School of Mathematics and Statistics, Hechi University, Yizhou, Guangxi 546300, China)

Abstract: This paper studies a class of nonlinear sum-difference inequalities, which include an unknown function and its difference in summation term and a nonconstant factor outside summation term. The upper bound of the unknown function in the sum-difference inequality is estimated explicitly using various analytical means including the change and amplification of variables. Finally, an example is given to illustrate that the results can be used to study the qualitative properties of solutions of sum-difference equations.

key words: nonlinear sum-difference inequalities; skills of the replacement and amplification of variables; explicit estimation; sum-difference equations

收稿日期:2019-05-06

基金项目:广西省自然科学基金项目(2016GXNSFAA380090);河池学院 2019 年校级青年课题(2019XJQN009)

作者简介:范乐乐(1983-),女,讲师,主要从事微分方程数值解方面的研究。E-mail:fanlele262@163.com

0 引　言

Gronwall 和 Bellman[1-2] 为了研究微分方程的解对参数的依赖性,考虑了下面的积分不等式

$$u(t) \leqslant c + \int_a^t f(s)u(s)\mathrm{d}s, t \in [a,b] \quad (1)$$

其中 $c>0$ 是常数,并给出了未知函数的估计

$$u(t) \leqslant c \times \exp\left(\int_a^t f(s)\mathrm{d}s\right), t \in [a,b] \quad (2)$$

由于人们发现 Gronwall-Bellman 型积分不等式及其推广形式是研究微分方程、积分方程和微分——积分方程解的存在性、有界性、唯一性等定性性质的重要工具,数学工作者致力于研究它的各种推广形式,使得它的应用范围不断扩大。而随着积分不等式理论及差分方程理论的发展,许多学者开始关注 Gronwall-Bellman 型积分不等式的离散形式,即差分不等式。

Pachpatte 在他的专著[3] 中研究了下面的和号内含有未知函数及其差分的线性和差分不等式

$$\Delta u(t) \leqslant a(t) + b(t)\sum_{s=0}^{t-1} c(s)(u(s) + \Delta u(s)), t \in \mathbf{N} \quad (3)$$

和

$$\Delta u(t) \leqslant a(t) + b(t)(u(t) + \sum_{s=0}^{t-1} c(s)(u(s) + \Delta u(s))), t \in \mathbf{N} \quad (4)$$

E. Akin-bohner 等[4] 研究了时标上的线性积分不等式

$$u^{\Delta}(t) \leqslant a(t) + b(t)\int_{t_0}^t c(s)(u(s) + u^{\Delta}(s))\mathrm{d}s, \quad (5)$$

和

$$u^{\Delta}(t) \leqslant a(t) + b(t)(u(t) + \int_{t_0}^t c(s)(u(s) + u^{\Delta}(s))\mathrm{d}s)。 \quad (6)$$

A. K. Zareen[5] 更进一步研究了积分号内含有未知函数及其导函数的非线性积分不等式

$$\dot{u}(t) \leqslant c + \int_0^t k(s)\dot{u}(s)(\dot{u}^p(s) + u^2(s))\mathrm{d}s, t \in \mathbf{R}^+ \quad (7)$$

本文中,将研究一类和号内含有未知函数及其差分且和号外具有非常数因子的非线性差分不等式

$$\Delta u(t) \leqslant a(t) + b(t)\sum_{s=0}^{t-1} c(s)\Delta u(s) \cdot (\Delta u(s) + u^2(s)), t \in \mathbf{N} \quad (8)$$

给出未知函数 $u(t)$ 的估计式。

1 主要结果

定理 1　设 $a(t)$、$b(t)$ 是定义在自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的非负增函数,$c(t)$ 是定义在自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的非负函数,$u(t)$ 是定义在自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的正的增函数,且它们之间满足不等式(8)。如果

$$\mathrm{e}^{-(\ln(a(t)+u(0)^2+u(0))+t)} - \sum_{s=0}^{t-1} b(t)c(s) - t > 0, \quad t \in \mathbf{N} \quad (9)$$

则有未知函数的估计式

$$u(t) \leqslant u(0) + \sum_{k=0}^{t-1} a(t)\exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1} b(t)c(j) \cdot (\mathrm{e}^{-(\ln(a(t)+u(0)^2+u(0))+t)} - \sum_{s=0}^{j-1} b(t)c(s) - j)^{-1}\right\}, t \in \mathbf{N} \quad (10)$$

证明　对于任意一个自然数 n,由式(8)可以看出

$$\Delta u(t) \leqslant a(n) + b(n)\sum_{s=0}^{t-1} c(s)\Delta u(s)(\Delta u(s) + u^2(s)), t \in [0,n] \quad (11)$$

把式(11)的右端定义为函数 $m(t)$,即

$$m(t) = a(n) + b(n)\sum_{s=0}^{t-1} c(s)\Delta u(s) \cdot (\Delta u(s) + u^2(s)), t \in [0,n] \quad (12)$$

由定理 1 的条件可知,$m(t)$ 为非负的增函数,$m(0)=a(n)$,且满足

$$\Delta u(t) \leqslant m(t), t \in [0,n] \quad (13)$$

先将式(13)中的变量 t 改写为 s,然后两边关于 s 从 0 到 $t-1$ 求和,得到

$$u(t) \leqslant u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} m(s)。 \quad (14)$$

求函数 $m(t)$ 的差分,得到

$$\Delta m(t) = b(n)c(t)\Delta u(t)(\Delta u(t) + u^2(t)) \leqslant b(n)c(t)m(t)(m(t) + (u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} m(s))^2), t \in [0,n] \quad (15)$$

令

$$n(t) = m(t) + (u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} m(s))^2, \quad (16)$$

可见,$n(t)$ 为非负的增函数,

$$n(0) = m(0) + u(0)^2,$$

且满足

$$m(t) \leqslant n(t), t \in [0,n] \quad (17)$$

将式(16)代入式(15),得到

$$\Delta m(t) \leqslant b(n)c(t)m(t)n(t), t \in [0,n] \tag{18}$$

求函数 $n(t)$ 的差分,有

$$\Delta n(t) = \Delta m(t) + 2m(t)(u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} m(s)) + m^2(t), t \in [0,n] \tag{19}$$

将式(17)和式(18)代入式(19)中,得到

$$\Delta n(t) \leqslant b(n)c(t)n(t)n(t) + 2n(t)(u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} n(s)) + n^2(t) = (b(n)c(t) - 1)n^2(t) + 2n(t)(n(t) + u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} n(s)) \tag{20}$$

定义函数 $z(t) = n(t) + u(0) + \sum_{s=0}^{t-1} n(s)$, 则有

$$z(0) = n(0) + u(0), \text{和 } n(t) \leqslant z(t), \tag{21}$$

将式(21)代入式(20),得到

$$\Delta n(t) \leqslant (b(n)c(t) - 1)n^2(t) + 2n(t)z(t) \leqslant (b(n)c(t) + 1)z^2(t), t \in [0,n] \tag{22}$$

求函数 $z(t)$ 的差分,有

$$\Delta z(t) = \Delta n(t) + n(t) \leqslant (b(n)c(t) + 1)z^2(t) + z(t), t \in [0,n] \tag{23}$$

式(23)两端同时除以 $z(t)$,有

$$\frac{\Delta z(t)}{z(t)} \leqslant (b(n)c(t) + 1)z(t) + 1, t \in [0,n] \tag{24}$$

另外,由积分中值定理,存在 $\varepsilon \in [z(t), z(t+1)]$,使得

$$\ln z(t+1) - \ln z(t) = \int_{z(t)}^{z(t+1)} \frac{1}{s} \mathrm{d}s = \frac{\Delta z(t)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\Delta z(t)}{z(t)}, \tag{25}$$

所以,

$$\ln z(t+1) - \ln z(t) \leqslant (b(n)c(t) + 1)z(t) + 1。 \tag{26}$$

不等式(26)的两端分别将 t 改写为 s,然后关于 s 从 0 到 $t-1$ 求和,得到

$$\sum_{s=0}^{t-1} \ln z(s+1) - \sum_{s=0}^{t-1} \ln z(s) \leqslant \sum_{s=0}^{t-1} (b(n)c(s) + 1)z(s) + \sum_{s=0}^{t-1} 1,$$

即

$$\ln z(t) \leqslant \ln z(0) + \sum_{s=0}^{t-1} (b(n)c(s) + 1)z(s) + t \leqslant \ln z(0) + \sum_{s=0}^{t-1} (b(n)c(s) + 1)z(s) + n, t \in [0,n] \tag{27}$$

定义函数 $w(t) = \ln z(0) + \sum_{s=0}^{t-1} (b(n)c(s) + 1)z(s) + n$, 则有

$$w(0) = \ln z(0) + n, \text{和 } z(t) \leqslant \mathrm{e}^{w(t)}。 \tag{28}$$

求函数 $w(t)$ 的差分,有

$$\Delta w(t) = (b(n)c(t) + 1)z(t) \leqslant (b(n)c(t) + 1)\mathrm{e}^{w(t)}, t \in [0,n] \tag{29}$$

在式(29)的两端分别乘以 $-\mathrm{e}^{-w(t)}$,得到

$$-\mathrm{e}^{-w(t)}\Delta w(t) \geqslant -\mathrm{e}^{-w(t)}(b(n)c(t) + 1)\mathrm{e}^{w(t)} = -(b(n)c(t) + 1)。 \tag{30}$$

利用积分中值定理,存在 $\varepsilon \in (w(t), w(t+1))$,使得

$$\mathrm{e}^{-w(t+1)} - \mathrm{e}^{-w(t)} = \int_{w(t)}^{w(t+1)} -\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s = -\mathrm{e}^{-\varepsilon}\Delta w(t) \geqslant -\mathrm{e}^{-w(t)}\Delta w(t)。 \tag{31}$$

所以,

$$\mathrm{e}^{-w(t+1)} - \mathrm{e}^{-w(t)} \geqslant -(b(n)c(t) + 1)。 \tag{32}$$

在式(32)两边把 t 改写为 s,并将 s 从 0 到 $t-1$ 求和,有

$$\mathrm{e}^{-w(t)} \geqslant \mathrm{e}^{-w(0)} - \sum_{s=0}^{t-1} (b(n)c(s) + 1), \tag{33}$$

从而有

$$w(t) \leqslant -\ln(\mathrm{e}^{-w(0)} - \sum_{s=0}^{t-1} b(n)c(s) - t)。 \tag{34}$$

把式(34)代入式(28)中,得到

$$z(t) \leqslant \mathrm{e}^{w(t)} \leqslant (\mathrm{e}^{-w(0)} - \sum_{s=0}^{t-1} b(n)c(s) - t)^{-1} = (\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)} - \sum_{s=0}^{t-1} b(n)c(s) - t)^{-1}, t \in [0,n]。 \tag{35}$$

根据式(18)、式(21)和式(35)三个式子,得到

$$\frac{\Delta m(t)}{m(t)} \leqslant b(n)c(t)n(t) \leqslant b(n)c(t) \times (\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)} - \sum_{s=0}^{t-1} b(n) \times c(s) - t)^{-1}, t \in [0,n] \tag{36}$$

由积分中值定理,存在 $\varepsilon \in [m(t), m(t+1)]$,使得

$$\ln m(t+1) - \ln m(t) = \int_{m(t)}^{m(t+1)} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \frac{\Delta m(t)}{\varepsilon} \leqslant \frac{\Delta m(t)}{m(t)}, t \in [0,n] \tag{37}$$

所以,

$$\ln m(t+1)-\ln m(t)\leqslant b(n)c(t)\left(\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)}-\sum_{s=0}^{t-1}b(n)c(s)-t\right)^{-1},t\in[0,n] \quad (38)$$

在式(38)两端将 t 改写为 j,并将 j 从 0 到 $t-1$ 求和,得到

$$\ln m(t)\leqslant \ln m(0)+\sum_{j=0}^{t-1}b(n)c(j)\times\left(\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)}-\sum_{s=0}^{j-1}b(n)c(s)-j\right)^{-1},t\in[0,n] \quad (39)$$

所以,

$$m(t)\leqslant m(0)\exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1}b(n)c(j)\times\left(\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)}-\sum_{s=0}^{j-1}b(n)\times c(s)-j\right)^{-1}\right\},t\in[0,n] \quad (40)$$

由式(40)和式(14),得到

$$u(t)\leqslant u(0)+\sum_{k=0}^{t-1}m(k)\leqslant u(0)+\sum_{k=0}^{t-1}a(n)\exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1}b(n)c(j)\times\left(\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)}-\sum_{s=0}^{j-1}b(n)c(s)-j\right)^{-1}\right\},t\in[0,n] \quad (41)$$

在式(41)中,令 $t=n$,有

$$u(n)\leqslant u(0)+\sum_{k=0}^{n-1}a(n)\exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1}b(n)c(j)\times\left(\mathrm{e}^{-(\ln(a(n)+u(0)^2+u(0))+n)}-\sum_{s=0}^{j-1}b(n)c(s)-j\right)^{-1}\right\},t\in[0,n] \quad (42)$$

由于 n 的任意性,则对任意自然数 $t\in\mathbf{N}$,有

$$u(t)\leqslant u(0)+\sum_{k=0}^{t-1}a(t)\exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1}b(t)c(j)\times\left(\mathrm{e}^{-(\ln(a(t)+u(0)^2+u(0))+t)}-\sum_{s=0}^{j-1}b(t)c(s)-j\right)^{-1}\right\},t\in\mathbf{N} \quad (43)$$

定理得证。

2　应　用

定理 1 中的结果可以用来研究某一类型的和差分方程的解的有界性。考虑和差分方程:

$$\Delta x(t)=f(t)+g(t)\sum_{s=0}^{t-1}H(s,\Delta x(s),x^2(s)),x(0)=c, \quad (44)$$

其中 $|c|$ 是正常数,$H\in C(\mathbf{Z}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ 满足条件

$$|H(t,x,y)|\leqslant c(t)|x|(|x|+y), \quad (45)$$

且 $|f(t)|$、$|g(t)|$ 和 $c(t)$ 分别满足定理 1 中 $a(t)$、$b(t)$ 和 $c(t)$ 具有的性质。

显然,利用式(45),由方程(44)得到

$$|\Delta x(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\sum_{s=0}^{t-1}c(s)|\Delta x(s)|\times(|\Delta x(s)|+x^2(s)),t\in\mathbf{N} \quad (46)$$

由于式(46)具有与不等式(8)相同的形式,且相应的函数也满足定理 1 中的条件,那么利用定理 1 就可以得到方程(44)解 $x(t)$ 的模的估计式:

$$|x(t)|\leqslant|c|+\sum_{k=0}^{t-1}|f(t)|\exp\left\{\sum_{j=0}^{k-1}|g(t)|\times c(j)\left(\mathrm{e}^{-(\ln(|f(t)|+|c|^2+|c|)+t)}-\sum_{s=0}^{j-1}|g(t)|c(s)-j\right)^{-1}\right\},t\in\mathbf{N} \quad (47)$$

参考文献:

[1] GRONWALL T H. Note on the derivatives with respect to parameter of the solutions of a system of differential equations[J]. Annals of mathematics,1919,20(4):292-296.

[2] BELLMAN R. The stability of solutions of linear differential equations[J]. Duke mathematical,1943,10(4):643-647.

[3] PACHPATTE B G. Inequalities for differential and integral equations[M]. New York:Academic Press,1998.

[4] AKIN-BOHNER E,BOHNER M,AKIN F. Pachpatte inequalities on time scales[J]. Inequalities in pure and applied mathematics,2005,6(1):1-23.

[5] ZAREEN A K. On some fundamental integrodifferential inequalities[J]. Applied mathematics,2014,5: 2968-2973.

[6] 黄春妙,王五生. 一类非线性差分不等式中未知数的估计及其应用[J]. 数学物理学报,2015,35(5):895-909.

[7] ZHOU J,SHEN J,ZHANG W. A powered Gronwall-type inequality and applications to stochastic differential equations[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2017,36(12):7207-7234.

[8] 范乐乐,王五生. 一类含有未知函数 p 次幂的积分不等式中未知函数的估计[J]. 数学的实践与认识,2018,48(21):215-219.

(责任编辑:周泉)