DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 20190419. 012

分布随从力作用下双参数非线性弹性地基上简支输流管道的参激振动

方孟孟,郭长青*

(南华大学 土木工程学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:建立了非线性 Pasternak 地基上分布随从力作用下输流管道在振荡流作用下的运动方程,采用 Galerkin 法将系统的偏微分方程离散为常微分方程组。计算了简支输流管道的非线性动力响应,并利用分岔图、相平面图、Poincare 映射图,分析了分布随从力、平均流速、地基剪切刚度对系统周期运动和混沌运动的影响。结果表明:以分布随从力为分岔参数,系统交替出现混沌运动和周期运动;以平均流速为分岔参数,系统具有非常复杂的动态响应,出现大范围的混沌运动和倍周期运动;增大地基剪切刚度不仅可以增加系统的稳定性,同时还对混沌运动有抑制作用;随着随从力增大,系统的稳定性下降。

关键词:简支输流管道;非线性弹性地基;分布随从力;周期运动;混沌运动;分岔

中图分类号:TU311 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-0062(2019)03-0069-09

Parametric Vibration of Simply Supported Pipes Conveying Fluid on Two-parameter Nonlinear Elastic Foundation with Distributed Follower Force

FANG Mengmeng, GUO Changqing*

(School of Civil Engineering, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The equation of motion of pipes conveying pulsating fluid on a nonlinear Pasternak foundation with distributed follower force is established. The partial differential equation of the system is discretized into ordinary differential equations by using Galerkin method. For simply supported pipes, the nonlinear dynamic responses are obtained numerically. The effects of distributed follower force, mean velocity of the fluid and shear stiffness

收稿日期:2018-11-01

基金项目:国家自然科学基金项目(51678286)

作者简介:方孟孟(1992-),男,硕士研究生,主要从事流固耦合力学方面的研究。E-mail: 178602165@ qq. com。* 通信作者:郭长青(1965-),男,教授,博士,主要从事流固耦合力学方面的研究。E-mail: GuoCQ@ hotmal. com

of the foundation on periodic motion and chaotic motion of the system are analyzed with bifurcation diagrams, phase plane and Poincare map. The results show that: with the distributed follower force as bifurcation parameter, chaotic motion and periodic motion appear alternately; with the mean velocity of fluid as bifurcation parameter, the dynamic responses are very complex, including large-range chaotic motion and multi-periodic motion; increasing the shear stiffness of the foundation can not only increase the stability of the system, but also suppress the chaotic motion; the stability of the system decreases with increasing follower force.

key words: simply supported pipes conveying fluid; nonlinear elastic foundation; distributed follower force; period motion; chaotic motion; bifurcation

0 引 言

输流管道的振动与稳定性是流固耦合研究领域的一个经典问题,该问题受到了众多学者的重视,是学术研究的热点问题,到现在为止,已经取得了丰富研究成果[1-4],而且对于非线性振动方面的研究也建立一定的理论基础。

管道常常被埋于土体或铺设于地面上,土体与输流管道的相互作用不容忽视,学术界一般把土体等效为弹性地基支承,研究弹性地基与输流管道的相互作用,根据不同的地基假设模型和研究对象的侧重的差异,学者们建立了不同的运动方程。已有研究表明[5-7],地基的力学特性对输流管道系统的动力学行为有很大的影响。梁峰,金基铎等人[8]并采用复模态法对系统的临界流速进行求解,研究了位于弹性地基上的输流管道的稳定性问题。K. R. Chellapilla 和 H. S. Simha[9]对位于双参弹性地基的简支输流管道进行了深入的分析,并得出剪切刚度的存在对系统临界流速的提高有影响的结论。张紫龙等人[10]采用 Galerkin 法研究了在基础激励作用下非线性弹性地基上悬臂管道的非线性动力学行为。李云东等人[11]用数值法研究了含有脉动内流激励的输流管-地基系统在不同脉动参数下的非线性动力学响应。

目前国内外学者已有对输流管道在轴向(定向)分布力作用下的稳定性进行了研究,并提出分布随从力的可能来源是由于管道外流的粘滞力。Pfluger 柱问题是典型的伪保守系统,而输流管道问题则是典型的陀螺系统,通过对输流管道在分布随从力作用下振动与稳定性的研究,揭示了伪保守系统和的陀螺系统特性,在工程应用上具有很大的工程指导价值。许锋等人[12]研究了弹性支承输流管道在分布随从力作用下的稳定性。郭长青[13]等人研究了分布随从力作用下的输流管道系统的振动与稳定性问题,并求解得到考虑随从力时运动解析式。樊丽俭[14]等人研究了输流管道在轴向荷载作用下的稳定性。娄敏[15]等人研究了海底输流管道内流、轴向力和压强等因素对允许悬定长度的影响。陶立佳等人[16]研究了悬臂输流管道在端部随从力作用下的稳定性。

本文首先建立具有非线性弹性地基支承的输流管道运动微分方程,研究其在分布随从力和脉动内流共同作用下的动力学响应。应用 Galerkin 法进行离散化得到一组方程组,采用四阶龙格-库塔数值积分法对离散化的方程组进行求解,利用分岔图、相平面图、Poincare 映射图着重讨论了系统的分岔参数平均流速、分布随从力以及地基剪切刚度对系统运动状态的影响。

1 模型及运动方程

考虑如图 1 所示为分布随从力作用下的非线性弹性地基上的输流管道理论模型,在系统振动过程中,分布随从力始终沿着输流管道挠曲线方向作用,U 为管内流体流速;$w(x,t)$ 是管道振动的任意瞬时中心线的横向位移;x 为沿管道长度方向的位置坐标;k_G, C, k_1, k_2 分别表示地基的剪切刚度,粘滞阻尼,等效线性支承刚度,等效非线性支承刚度;q 为沿管道切线方向的分布随从力。

其运动方程可写作:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E^* I\frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \Big[MU^2 + M\frac{\partial U}{\partial t}(l-x) - (E + E^*\frac{\partial}{\partial t})\frac{S}{2l}\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q(l-x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M+m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F(x,t) = 0 \tag{1}$$

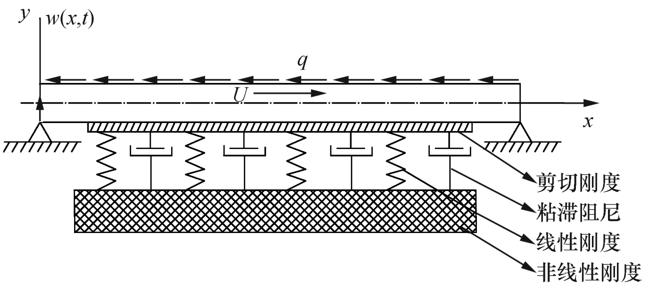


图 1　非线性弹性地基上两端简支输流管道示意图

Fig. 1　Schematic of simply supported pipe conveying fluid rested on nonlinear elastic foundation

式中:EI 为管道抗弯刚度;E^* 为黏弹性系数;M 和 m 分别单位长度上流体质量和管道质量;l 和 S 为管道的长度;C 为粘性阻尼系数;F 是非线性弹性地基的支反力,可写作:

$$F(x,t)=k_1w+k_2w^3+C\frac{\partial w}{\partial t}-k_G\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{2}$$

引入无量纲参数:

$$\eta=\frac{w}{l},\xi=\frac{x}{l},\tau=\frac{t}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{(M+m)}},$$

$$u=UI\sqrt{\frac{M}{EI}},\kappa_1=\frac{k_1l^4}{EI},\kappa_2=\frac{k_2l^6}{EI},\kappa_G=\frac{k_Gl^2}{EI},$$

$$\beta=\frac{M}{M+m},\alpha=\frac{E^*}{l^2}\sqrt{\frac{I}{E(M+m)}},$$

$$c=Cl^2\sqrt{\frac{(M+m)}{EI}},\chi=\frac{Sl^2}{2I},\gamma=\frac{ql^3}{EI} \tag{3}$$

则可得到方程(1)的无量纲形式为:

$$\alpha\frac{\partial^5\eta}{\partial\xi^4\partial\tau}+\frac{\partial^4\eta}{\partial\xi^4}[u^2-k_G+\gamma(1-\xi)+(\sqrt{\beta}\frac{\partial u}{\partial t})(1-\xi)-\chi\int_0^1\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\mathrm{d}\xi-2\alpha\chi\int_0^1\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\tau}\mathrm{d}\xi]\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}2u\sqrt{\beta}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau}+c\frac{\partial\eta}{\partial\tau}+\kappa_1\eta+\kappa_2\eta^3=0 \tag{4}$$

脉动流速表达式无量纲化处理可得:

$$u=u_0(1+\mu\sin(\omega\tau)) \tag{5}$$

式中,u_0,μ 和 ω 分别为管道脉动内流的平均流速,脉动幅值和脉动频率。

下面运用 Galerkin 方法求解无量纲化运动微分方程(4)考虑是悬臂管道,令:

$$\eta(\xi,\tau)=\sum_1^N\phi_i(\xi)q_i(\tau) \tag{6}$$

其中:

$$\phi_i(\xi)=\sin(i\pi\xi) \tag{7}$$

式中 $\phi_i(\xi)$ 为输流管道的模态函数,$q_i(\tau)$,$i=1,2,\cdots,N$ 为输流管道的广义坐标。为了达到计算精度的要求,使模拟结果更加的真实可靠,在下面的数值计算中取 $N=4$。

将方程(5)和(7)代入方程(4),并在方程两边同时左乘 ϕ_j,然后对 ξ 从 0 ~ 1 积分,利用模态函数正交性可得(按张量下标记号法):

$$\ddot{q}_i+C_{ij}\dot{q}_j+K_{ij}q_j+f_i+h_i=0 \tag{8}$$

式中:

$$C_{ij}=c\delta_{ij}+2\sqrt{\beta}uB_{ij}+\alpha L_{ij}$$

$$K_{ij}=L_{ij}+(u^2+\gamma-\kappa_G+\sqrt{\beta}\dot{u})g_{ij}-(\gamma+\sqrt{\beta}\dot{u})D_{ij}+\kappa_1\delta_{ij}$$

$$f_i=\kappa_2\int_0^1\Phi(\Phi^{\mathrm{T}}q)^3\mathrm{d}\xi$$

$$h_i=\chi q^{\mathrm{T}}AqAq+2\alpha\chi q^{\mathrm{T}}A\dot{q}Aq$$

$$B_{ij}=\int_0^1\phi_i\phi'_j\mathrm{d}\xi,L_{ij}=\int_0^1\phi_i\phi''''_j\mathrm{d}\xi$$

$$D_{ij}=\int_0^1\xi\phi_i\phi''_j\mathrm{d}\xi,g_{ij}=\int_0^1\phi_i\phi''_j\mathrm{d}\xi$$

式中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号。

为了方便后续的数值计算,引入状态向量:$z=(q,\dot{q})$将式(8)写成如下形式的一阶状态方程:

$$\dot{z}=Kz+F+H \tag{9}$$

其中,$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵,

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -K_{ij} & -C_{ij}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}=[0,0,\cdots,0,0,-f_1,-f_2,\cdots,-f_{N-1},-f_N]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{H}=[0,0,\cdots,0,0,-h_1,-h_2,\cdots,-h_{N-1},-h_N]^{\mathrm{T}}$$

式(9)构成了输流管系统的非线性响应控制方程,求解此方程可得到输流管在取定参数下的动力响应。

2　数值计算和分析

在数值计算中,取系统固定参数为:$\mu=0.4$,$\beta=0.64$,$\kappa_1=100$,$\kappa_2=1\ 000\ 000$,$\alpha=0.005$,$c=0.2$,$\chi=5\ 000$。为了分析输流管道系统振动状态,利用龙格-库塔法对方程求解,系统初始条件取 $q_i=0.001$,$\dot{q}_i=0.001$,$i=1,2,3,4$,经过对计算结果的分析,可得系统在不同参数下的振动形态。

在分岔图中使用的触发条件是输流管道在端点 $\xi=0.5$ 位置处的速度趋于 0,即

$$\dot{\eta}(0.5,\tau)=\phi_1(0.5)\dot{q}_1+\phi_2(1)\dot{q}_2+\phi_3(0.5)\dot{q}_3+\phi_4(0.5)\dot{q}_4\to 0 \tag{10}$$

满足式(10)时记录下管道端部($\xi=0.5$)位

置处的位移 $\eta(0.5,\tau)$。

2.1 系统运动状态随平均流速的变化

图 2 是地基剪切刚度 $\kappa_G=0$,分布随从力 $\gamma=0$,脉动频率 $\omega=47.5$ 时,以平均流速为控制参数的分岔图,初始条件近用于激发振动,下面的研究中截除了振动初期的瞬态响应,仅考虑振动的稳态响应。从图 2 可以看出,当 $3.85<u_0<4.05$ 时,系统表现为周期运动,在此区间发生倍周期分岔运动,出现了周期 8,周期 16,周期 32,……,周期 2^{n+2} 运动。随着流速的增加,位移振幅增大,系统在 $4.05<u_0<4.95$ 由倍周期分岔通向混沌运动,中间有阵发性的小窗口周期运动。当 $4.95<u_0<5.36$ 时,系统由混沌通过倒倍周期分岔通向周期运动。进一步研究表明,在此区域内系统的振动形态依次为,混沌,周期 2^{n+2},…,周期 32,周期 16,周期 8。当 $5.36<u_0<5.65$ 时,系统周期运动消失,在此流速阶段发生混沌运动。

为了更深入地观察系统的各种动力学行为,图 3 分别给出了在不同平均流速下系统的相图和 Poincare 映射图,可以更加明显的看到系统的振动特性。

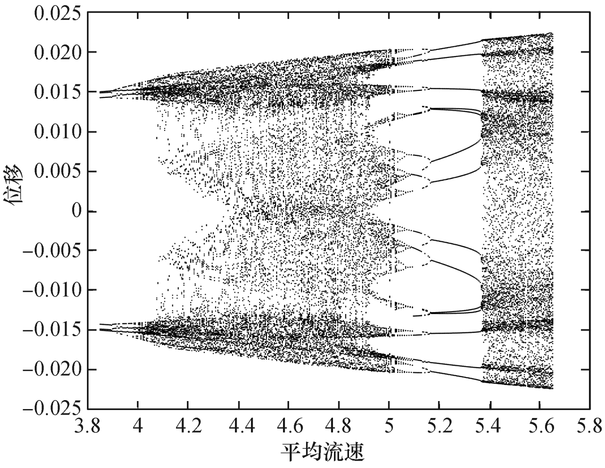
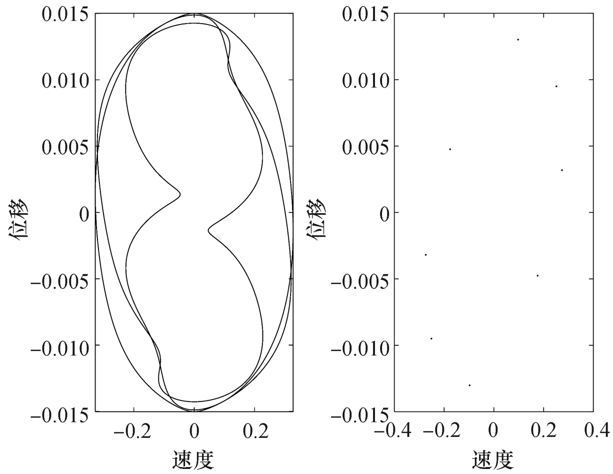
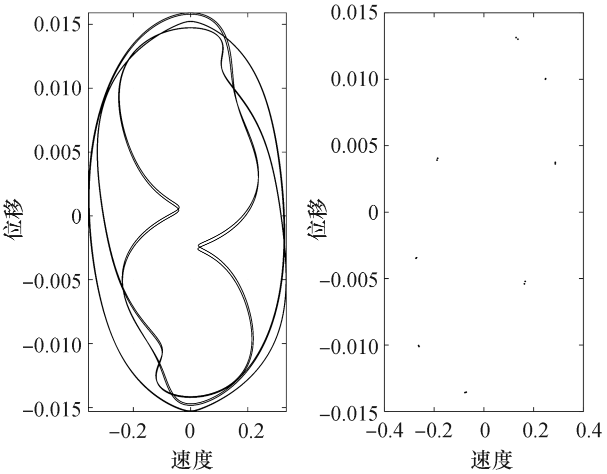


图 2 以平均流速 u_0 为控制参数的分岔图,$\kappa_G=0,\gamma=0,\omega=47.5$

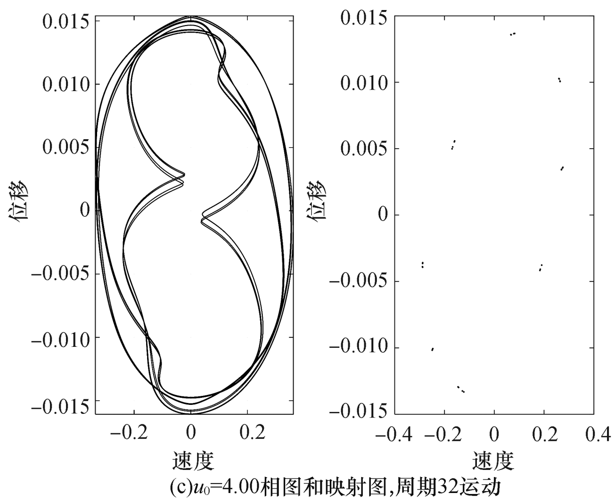
Fig. 2 Bifurcation diagram with average flow velocity as controlparameter, $\kappa_G=0,\gamma=0,\omega=47.5$



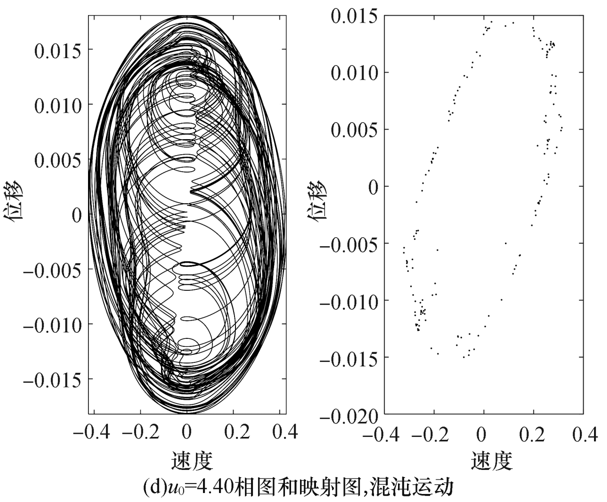
(a) u_0=3.85相图和映射图,周期8运动



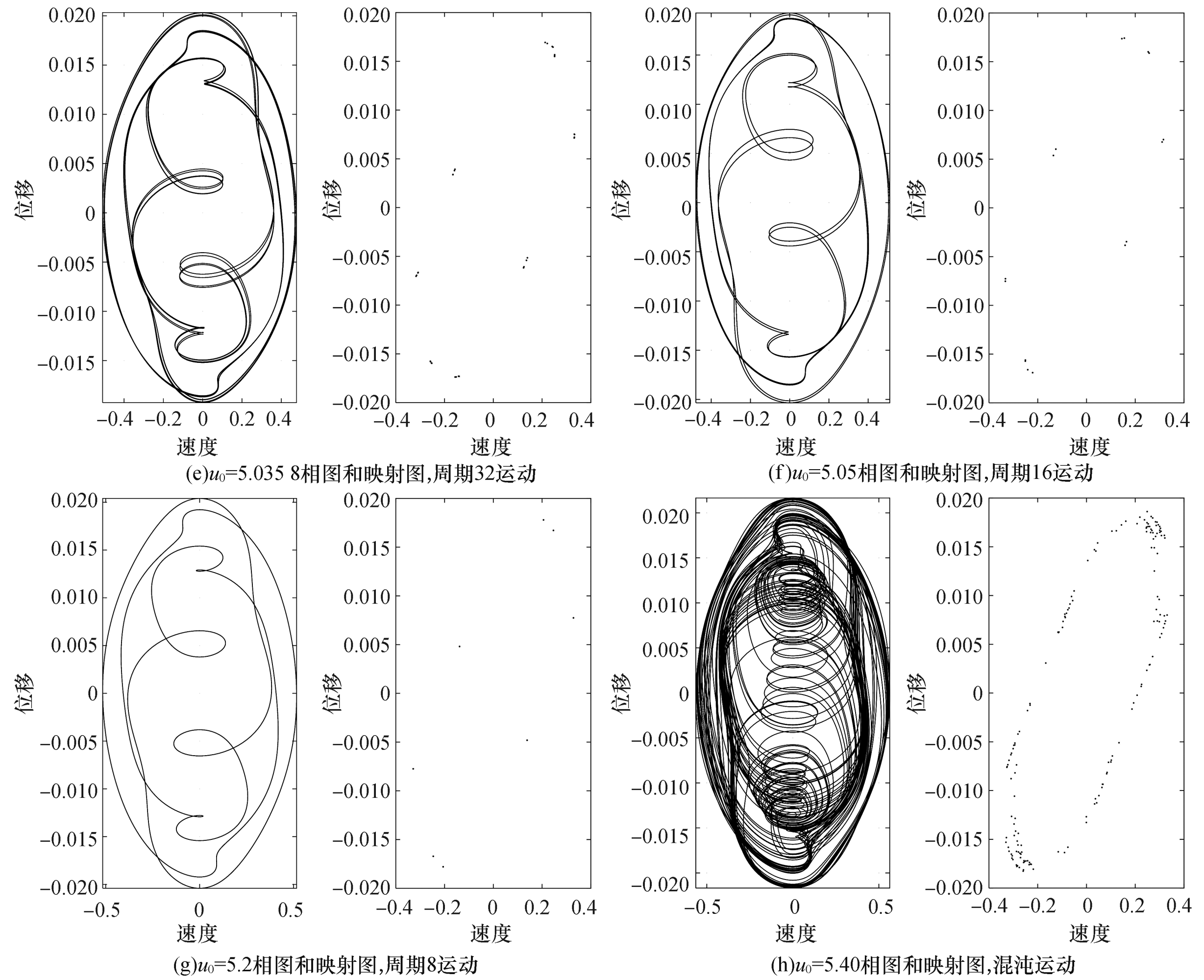
(b) u_0=3.98相图和映射图,周期16运动



(c) u_0=4.00相图和映射图,周期32运动



(d) u_0=4.40相图和映射图,混沌运动



(e) u_0=5.035 8相图和映射图,周期32运动

(f) u_0=5.05相图和映射图,周期16运动

(g) u_0=5.2相图和映射图,周期8运动

(h) u_0=5.40相图和映射图,混沌运动

图 3　不同流速下相图和庞加莱映射图

Fig. 3　Phase diagrams and Poincare maps with different flow velocity

2.2　系统运动状态随分布随从力的变化

图 4 是地基剪切刚度 $\kappa_G=0$,脉动频率 $\omega=39$,平均流速 $u_0=4.5$ 时,以分布随从力 γ 为分岔控制参数的分岔图。从图 4 可以看出,随着分布随从力的变化,地基-输流管道呈现出丰富的动力学行为,包括周期、概周期和混沌运动。当随从力 $0<\gamma<0.6$ 时,系统发生混沌运动,中间有阵发性小窗口周期运动。当 $0.6<\gamma<41.1$ 时,系统的动态响应表现为周期运动,分别为周期 3 运动,周期 4 运动。随着随从力的增加,系统振动幅值增加,且在 $41.1<\gamma<64$ 时,系统由周期运动跳跃到混沌运动,中间伴有阵发性周期运动。当 $64<\gamma<82.8$ 时,系统主要为倍周期和混沌运动,且系统过渡到混沌运动方式为由倍周期分岔通向混沌运动,进一步研究表明,系统的振动形态依次为,周期 6,周期 12,周期 24,…,3×2^n,混沌运动。混沌运动区间有阵发性周期运动,接着系统由混沌运动通过倒分岔,$3\times2^{n-1}$,…,周期 24,周期 12,周期 6,周期 3 进入周期运动。当 $82.8<\gamma<90$ 时,系统周期运动消失进入混沌运动。综上所述,随着随从力的变化,系统振动状态由周期过渡到混沌,且振动幅值逐渐增加,由此可见随从力不利于系统稳定。

图 5 是地基剪切刚度 $\kappa_G=6$,脉动频率 $\omega=39$ 时,以分布随从力 γ 为分岔控制参数的分岔图。考虑地基剪切刚度后,对比图 4 和图 5 可看出:系统振动幅值减小,混沌区域随着剪切刚度的增加,向分布随从力较大区域移动(如图 4 由 $43<\gamma<64$ 移动到 $55<\gamma<75$),可见地基剪切刚度利于系统的稳定而分布随从力则不利于系统稳定。为了更深入地观察系统的各种动力学行为,图 6 分别给出了地基剪切刚度 $\kappa_G=0$,脉动频率 $\omega=39$ 时,在不同分布随从力下系统的相图和 Poincare 映射图。

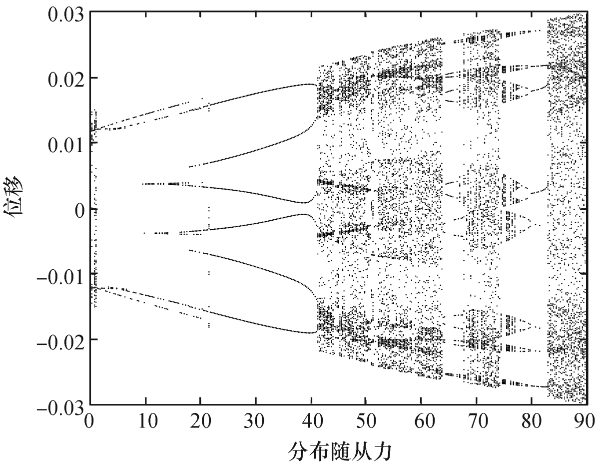


图 4　以分布随从力 γ 为控制参数的分岔图，$\kappa_G=0, \omega=39, u_0=4.5$

Fig. 4　Bifurcation diagram with fluctuation frequency as control parameter, $\kappa_G=0, \omega=39, u_0=4.5$

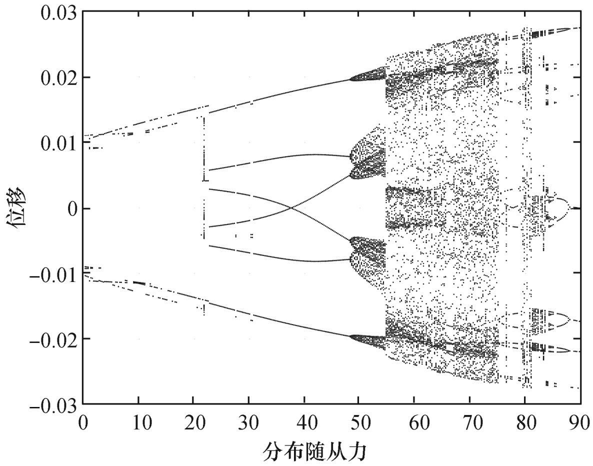
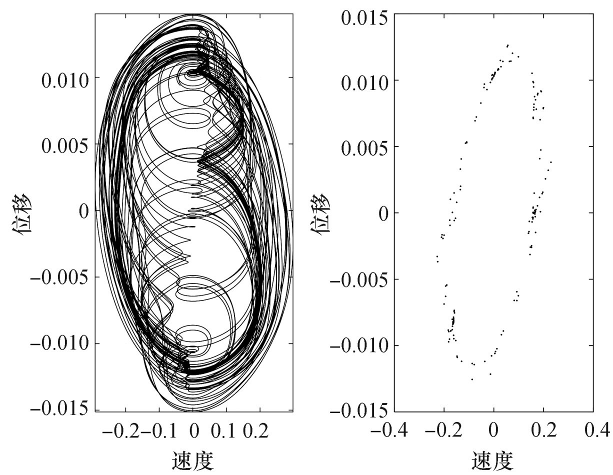
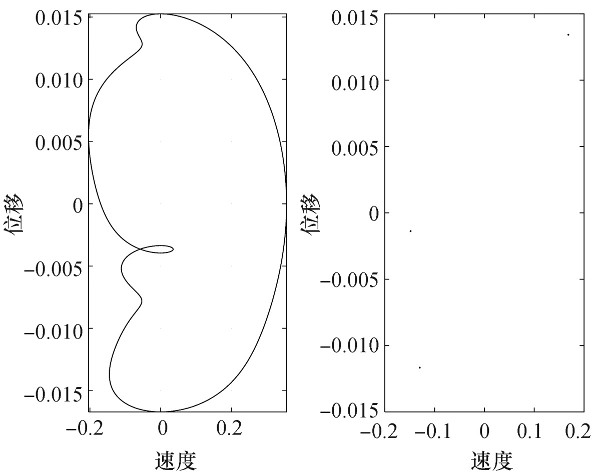


图 5　以分布随从力 γ 为控制参数的分岔图，$\kappa_G=6, \omega=39, u_0=4.5$

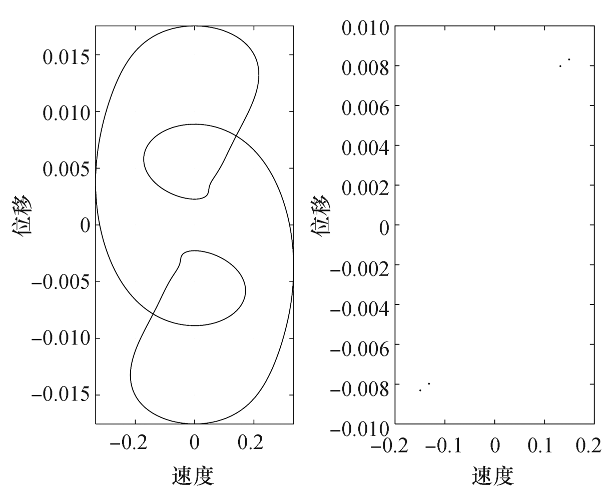
Fig. 5　Bifurcation diagram with fluctuation frequency as control parameter, $\kappa_G=6, \omega=39, u_0=4.5$



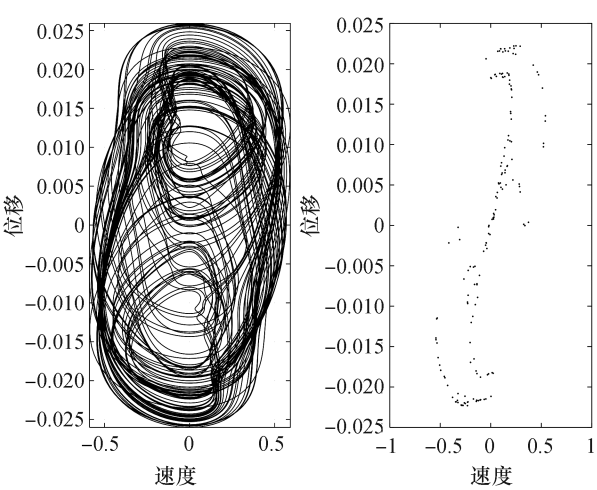
(a) γ=0.5相图和映射图,混沌运动



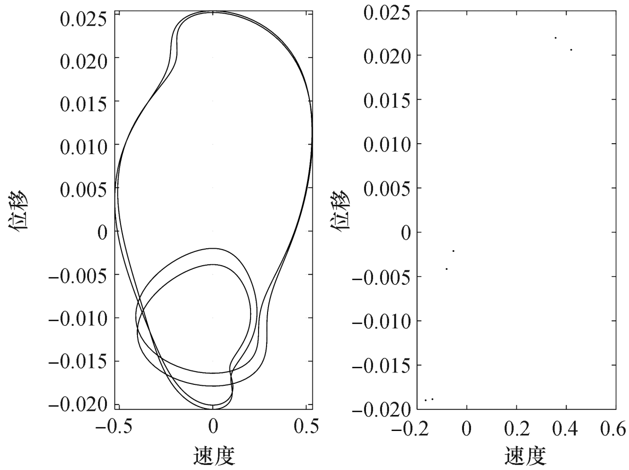
(b) γ=20相图和映射图,周期3运动



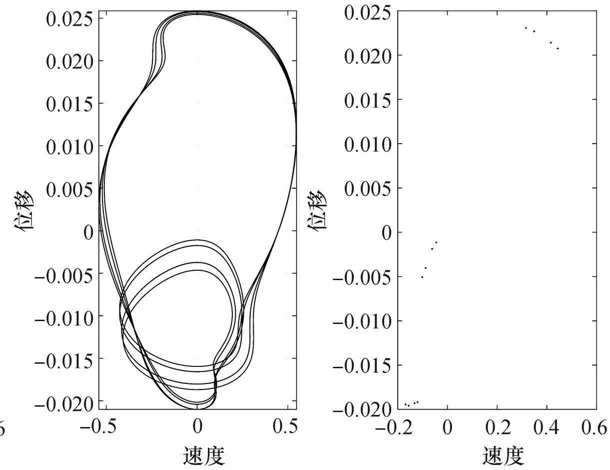
(c) γ=30相图和映射图,周期4运动



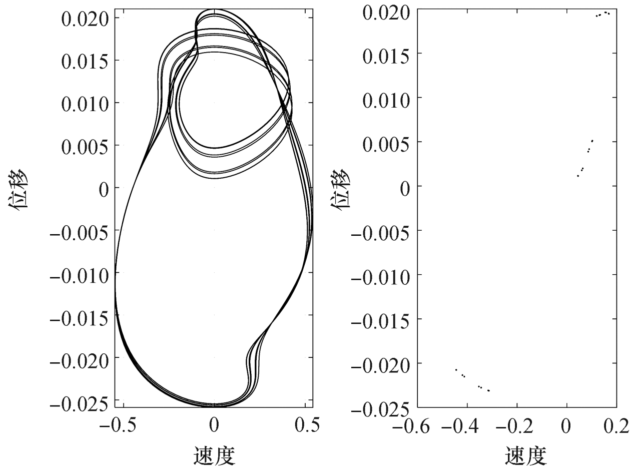
(d) γ=63相图和映射图,混沌运动



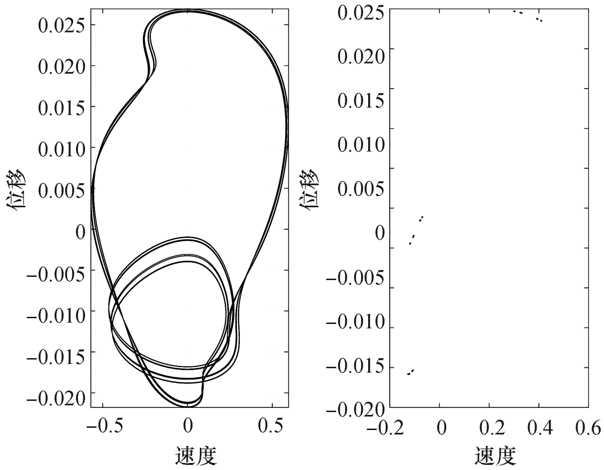
(e) γ=65相图和映射图,周期6运动



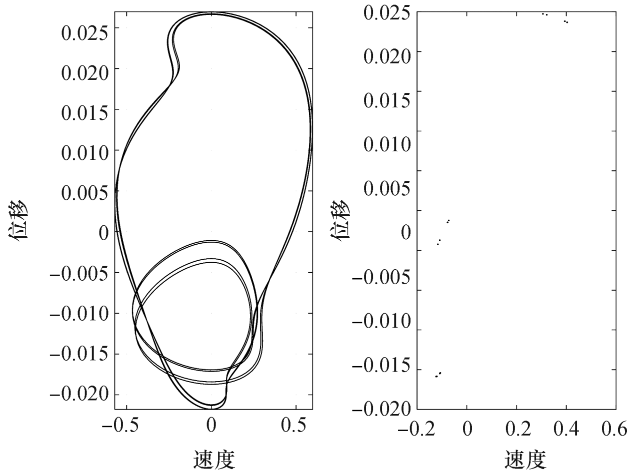
(f) γ=68.1相图和映射图,周期12运动



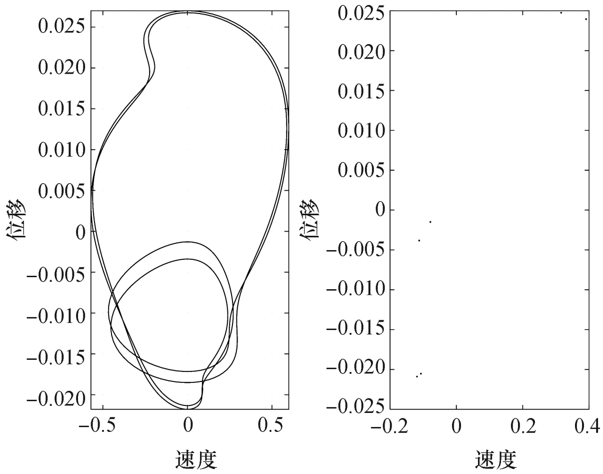
(g) γ=68.2相图和映射图,周期24运动



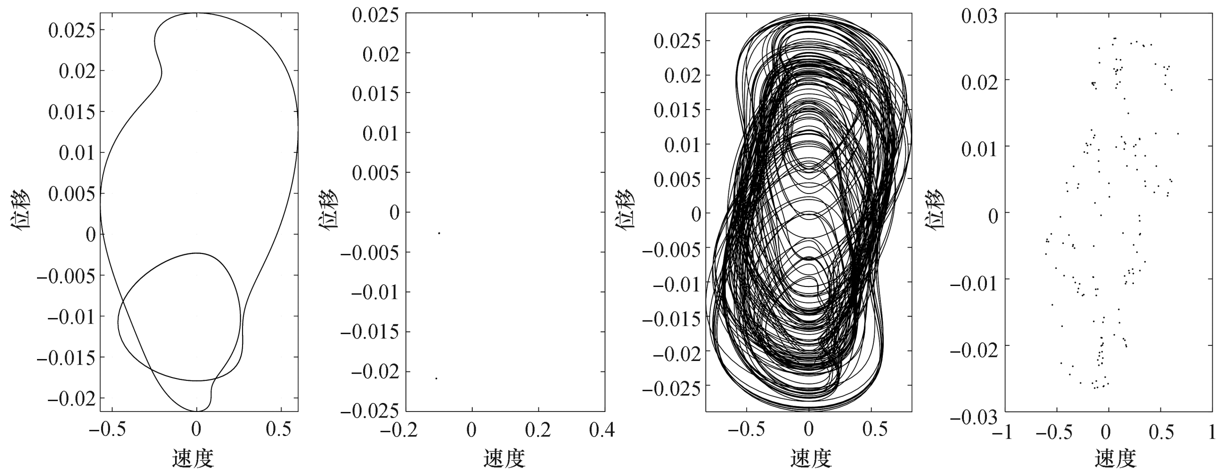
(h) γ=77.5相图和映射图,周期24运动



(i) γ=77.9相图和映射图,周期12运动



(j) γ=78.5相图和映射图,周期6运动



(k) γ=80相图和映射图,周期3运动

(l) γ=84相图和映射图,混沌运动

图 6 分布随从力下相图和庞加莱映射图

Fig. 6 Phase diagrams and Poincare maps with different distributed follower force

2.3 系统运动状态随地基剪切刚度的变化

图 7 给出了脉动内流脉动频率 $\omega=41$,分布随从力 $\gamma=0$,平均流速 $u_0=4.5$ 时,以地基剪切刚度 κ_G 为分岔控制参数时系统的分岔图。从分岔图可以看到,地基剪切刚度对输流管道的稳定性有很大的影响,这结论与文献[10]的结论是一致的。

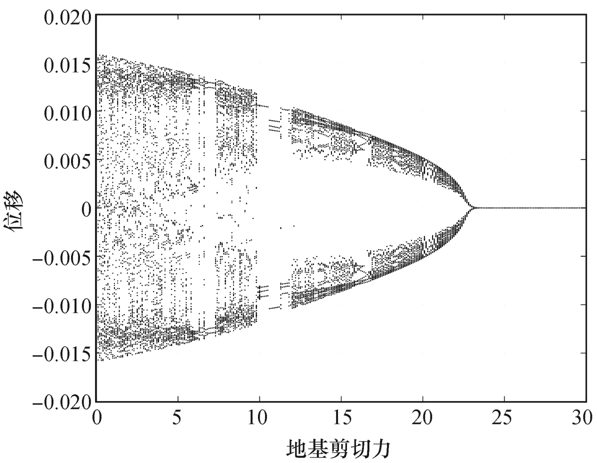


图 7 以地基剪切刚度为 κ_G 控制参数的分岔图,$\omega=41,\gamma=0,u_0=4.5$

Fig. 7 Bifurcation diagram with foundation shear force as control parameter, $\omega=41,\gamma=0,u_0=4.5$

图 8 是 $\omega=41,\gamma=10,u_0=4.5$ 时,以地基剪切刚度 κ_G 为分岔控制参数,系统考虑分布随从力后,对比图 7 和图 8 可看出:考虑随从力后,系统达到零平位置所对应的剪切刚度需要更大;考虑随从力后,系统振动幅值增加。

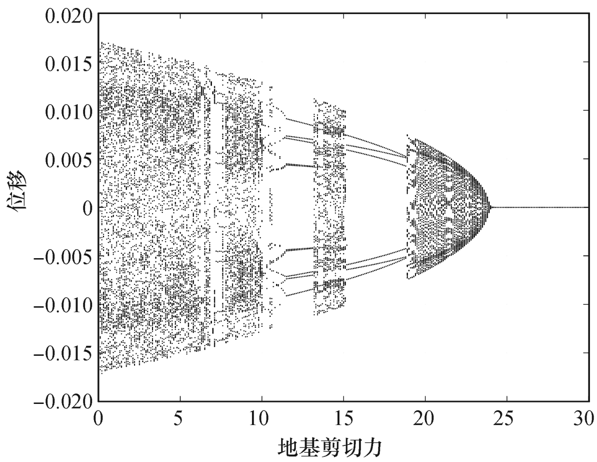


图 8 以地基剪切刚度 κ_G 为控制参数的分岔图,$\omega=41,\gamma=10,u_0=4.5$

Fig. 8 Bifurcation diagram with foundation shear force as control parameter, $\omega=41,\gamma=10,u_0=4.5$

3 结 论

本文给出了双参数非线性弹性地基上简支输流管道在周期振荡流和分布随从作用下的非线性运动方程,综合考虑了地基的剪切刚度、非线性特性和粘性阻尼的影响,所得结论如下:

1)脉动流的平均流速对系统的动力学特性有影响,当其为分岔参数时,系统振动形态首先出现周期运动,然后通过倍周期分岔过渡到混沌运动,且混沌运动区间有阵发性周期运动,接着从混沌运动区间通过到分岔周期运动过渡到周期运动,最后又出现混沌运动。进一步研究表明,分布

随从力作用下的输流管道发散失稳的临界流速随分布随从力的增大而减小。

2)系统以分布随从力 γ 为分岔参数时,系统首先出现混沌运动,随着随从力的增加,系统由周期运动过渡到混沌运动,中间伴有阵发性周期运动,接着系统由倍周期分岔周期6,周期12,周期24,…,3×2^n,进入混沌运动,混沌运动区间有阵发性周期运动,接着系统由混沌运动通过到倍周期分岔进入周期运动,最后系统又出现混沌运动。综上所述,随着随从力的连续变化,系统振动状态由周期过渡到混沌,且振动幅值逐渐增加,由此可见随从力不利于系统稳定。当系统考虑地基刚度后,从分岔图可以看到对系统的振动形态影响较大,表现为系统振动幅值减小,混沌区域随着剪切刚度的增加,向分布随从力较大区域移动。

3)地基剪切刚度 κ_G 对系统的动力学行为有根本性的变化,增加地基剪切刚度,系统的振动幅值减小,使系统的运动状态变的更加稳定,同时系统的混沌运动区域也减小(抑制了系统的混沌运动),当剪切刚度达到一定值时系统处于稳定状态(达到零平衡位置)。系统考虑随从力后,系统达到零平位置所对应的剪切刚度需要更大,系统振动幅值增加,可见随从力使系统的稳定性下降。

参考文献:

[1] PAIDOUSSIS M P,SARKAR A,SEMLER C. A horizontal fluid-conveying cantilever: spatial coherent structures, beam modes and jumps in stability diagram[J]. Journal of sound and vibration,2005,280(1/2):141-157.

[2] PAIDOUSSIS M P, SEMLER C, WADHAN-GAGNON M. A reappraisal of why aspirating pipes do not flutter at infinitesimally flow[J]. Journal of fluids and structures, 2005,20(1):147-156.

[3] PAIDOUSSIS M P. The canonical problem of the fluid-conveying pipe and radiation of the knowledge gained to other dynamics problems across applied mechanics[J]. Journal of sound and vibration,2008,310(3):462-492.

[4] 黄玉盈,邹时智,钱瑾,等.输液管的非线性振动、分叉与混沌-现状与展望[J].现状力学进展,1998,28(1):30-42.

[5] VASSILEV V M,DJONDJOROV P A. Dynamic stability of viscoelastic pipes on elastic foundations of variable modulus[J]. Journal of sound and vibration,2006,297(1/2):414-419.

[6] DJONJOROV P,VASSILEV V,DZHUPANOV V. Dynamic stability of fluid conveying cantilevered pipes on elastic foundation[J]. Journal of sound and vibration,2001,247(3):537-546.

[7] WANG L. A further study on the non-linear dynamics of simply supported pipes conveying pulsating fluid[J]. International journal of non-linear mechanics, 2009, 44(1):115-121.

[8] 梁峰,金基铎,杨晓东,等.弹性地基上输流管道的静态和动态稳定性研究[J].工程力学,2010,27(11):166-171.

[9] CHELLAPILLA K R,SIMHA H S. Critical velocity of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation[J]. Journal of sound and vibration,2007,302(1):387-397.

[10] 张紫龙,唐敏,倪樵.非线性弹性地基上悬臂输流管的受迫振动日[J].振动与冲击,2013,32(10):17-21.

[11] 李云东,杨诩仁,文化斌.非线性弹性地基上悬臂管道的参数振动[J].振动与冲击,2016,35(24):15-18.

[12] 许锋,郭长青,黄建红.弹性支承输流管道在分布随从力作用下的稳定性[J].工程力学,2014,31(7)234-238;256.

[13] 郭长青,刘红涛,王晓锋,等.输流管道在分布随从力作用下的振动和稳定性[J].工程力学,2010,27(4):190-196.

[14] 樊丽俭,张瑞平.轴向荷载输流管道的稳定性分析[J].西北大学学报(自然科学版),2004,34(4):158-162.

[15] 娄敏,郭海燕,杨新华,等.海底输液管道内流、轴向力和压强对允许悬空长度的影响[J].中国海洋大学学报,2006,36(2):341-344.

[16] 陶立佳,郭长青,童立明.悬臂输流管道在端部随从力作用下的稳定性[J].南华大学学报(自然科学版),2018,32(1):54-57.

(责任编辑:扶文静)