DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2019. 01. 011

一类随机离散的 SIR 流行病模型解的稳定性分析

鲁银霞,廖新元*,陈会利,李佳季

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:引进一个确定的用微分方程表示的 SIR 流行病模型,考虑到随机因素的扰动,并用 Euler-Milstein 法将模型进行离散化,得到了随机离散的 SIR 流行病模型。然后利用线性化、Lyapunov 函数法,得到该模型平衡解的渐近均方稳定性的充分条件,并用数值仿真说明了所得结论的正确性。

关键词:随机离散 SIR 流行病模型;线性化;Lyapunov 函数;渐进均方稳定

中图分类号:O174　**文献标志码**:A　**文章编号**:1673-0062(2019)01-0058-04

Analysis of Stability of Solutions for a Stochastic Discrete SIR Epidemic Model

LU Yinxia, LIAO Xinyuan*, CHEN Huili, LI Jiaji

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The study derives a deterministic SIR model described by ordinary differential equation. Taking the stochastic perturbation into consideration and using the Euler-Milstein discretization method, it obtains a stochastic discrete SIR epidemic model. Some sufficient conditions for the asymptotic mean square stability of the positive equilibrium state are established by linearized and Lyapunov functional method. The correctness of the conclusion is showed by numerical simulation.

key words: stochastic discrete SIR epidemic model; linearized method; lyapunov functional; asymptotic mean square stability

0　引　言

SIR 流行病模型是传染病动力学中的重要数学模型之一。Kermack 和 McKendrick 最初提出并研究了经典 SIR 模型[1],随后流行病模型受到越来越多学者的关注[2-5]。

收稿日期:2018-07-23

基金项目:南华大学研究生科学基金项目(2018KYY095)

作者简介:鲁银霞(1993-),女,硕士研究生,主要从事微分方程方面的研究. E-mail:1037915090@qq.com. *通信作者:廖新元(1965-),男,教授,博士,主要从事微分方程稳定性的研究. E-mail:674623842@qq.com

确定性SIR流行病模型可以用以下列常微分方程表示[6]:

$$\begin{cases}S'(t)=\Lambda-\beta S(t)I(t)-\mu S(t)\\ I'(t)=\beta S(t)I(t)-(\mu+\gamma+\lambda)I(t)\\ R'(t)=\gamma I(t)-\mu R(t)\end{cases}\quad(1)$$

其中$S(t),I(t),R(t)$分别表示t时刻易感染者数目、轻度染病者数目、重度染病者数目,Λ为种群输入率,μ为S,I,R的自然死亡率,γ表示感染个体的恢复率,β表示传播速率,λ表示由疾病引起的死亡率,$\Lambda,\beta,\mu,\gamma,\lambda$都为正参数。

因为传染率在数学流行病学研究中起着重要的作用,而且相关研究成果表明:改进流行病的传染率有利于刻画流行病的传播机制。所以为了使系统(1)更加具有现实意义,在系统(1)的基础上,文献[6]进一步研究了饱和传染率为$\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I}(\alpha>0)$的SIR流行病模型:

$$\begin{cases}S'(t)=\Lambda-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-\mu S(t)\\ I'(t)=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-(\mu+\gamma+\lambda)I(t)\\ R'(t)=\gamma I(t)-\mu R(t)\end{cases}\quad(2)$$

事实上,流行病系统总是受到环境噪声的影响,环境噪声会不同程度地影响到系统的增长率、环境容量、竞争系数及其他参数,而且与其确定的模型相比,随机模型更具有现实意义,所以将研究模型在白噪声扰动下平衡解的稳定性。假设系统(2)受与系统状态$(S(n),I(n))$偏离平衡点(S^*,I^*)成正比的随机扰动的影响,即当系统状态偏离平衡点的偏差增大时,随机扰动也随之增加[7]。在这种假设下,系统(2)表现为以下形式:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=(\Lambda-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-\mu S(t))\mathrm{d}t+\\ \quad\sigma_1(S(t)-S^*)\mathrm{d}B_1(t)\\ \mathrm{d}I(t)=(\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-(\mu+\gamma+\lambda)I(t))\mathrm{d}t+\\ \quad\sigma_2(I(t)-I^*)\mathrm{d}B_2(t)\\ \mathrm{d}R(t)=(\gamma I(t)-\mu R(t))\mathrm{d}t\end{cases}\quad(3)$$

其中$B(t)$是白噪声,在形式上被认为是标准的布朗运动,也就是$\dot{B}_k(t)=\mathrm{d}B_k(t)/\mathrm{d}t$,${\sigma_k}^2$表示$B_k(t)(k=1,2)$的强度[8]。

因为R不影响系统(3)的动力学研究,忽略系统(3)的第三个方程的分析,只对以下系统进行研究:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=(\Lambda-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-\mu S(t))\mathrm{d}t+\\ \quad\sigma_1(S(t)-S^*)\mathrm{d}B_1(t)\\ \mathrm{d}I(t)=(\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I(t)}-(\mu+\gamma+\\ \quad\lambda)I(t))\mathrm{d}t+\sigma_2(I(t)-I^*)\mathrm{d}B_2(t)\end{cases}\quad(4)$$

将对系统(4)离散化、线性化,研究离散的SIR流行病系统的局部均方稳定性。

1 知识准备

对于一些流行病,利用差分方程建立离散模型来描述它们的变化过程更符合实际情况,而且离散模型相对连续模型更能展示丰富的动力学性态。因此本文使用Euler-Milstein法[9]把系统(4)转换成随机离散模型:

$$\begin{cases}S(n+1)=S(n)+(\Lambda-\dfrac{\beta S(n)I(n)}{1+\alpha I(n)}-\\ \quad\mu S(n))h+\sigma_1\sqrt{h}(S(n)-\\ \quad S^*)\xi_1(n+1)\\ I(n+1)=I(n)+(\dfrac{\beta S(n)I(n)}{1+\alpha I(n)}-\\ \quad(\mu+\gamma+\lambda)I(n))h+\sigma_2\sqrt{h}(I(n)-\\ \quad I^*)\xi_2(n+1)\end{cases}\quad(5)$$

其中h是步长。在基本概率空间$\{\Omega,\tilde{s},P\}$中,$\tilde{s}_n\in\tilde{s},n\in Z=\{0,1,\cdots\}$是$\sigma-$代数族,$E$表示期望,$\xi_k(n),k=1,2,n\in Z$,是由$\tilde{s}_n$适应随机变量的相互独立序列,且有:

$$E\xi_k(n)=0,E\xi_k^2(n)=1,E\xi_1(n)\xi_2(n)=0。\quad(6)$$

设系统(5)的正平衡点为$E(S^*,I^*)$,令$S(n)=x(n)+S^*,I(n)=y(n)+I^*$。将系统(5)在平衡点$E(S^*,I^*)$线性化得到以下方程:

$$\begin{cases}x(n+1)=(1-\dfrac{h\beta I^*}{1+\alpha I^*}-\\ \quad\mu h)x(n)-\dfrac{h\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2}y(n)+\\ \quad\sigma_1\sqrt{h}\xi_1(n+1)x(n)\\ y(n+1)=(1+\dfrac{h\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2}-h(\mu+\\ \quad\gamma+\lambda))y(n)+\dfrac{h\beta I^*}{1+\alpha I^*}x(n)+\\ \quad\sigma_2\sqrt{h}\xi_2(n+1)y(n)\end{cases}\quad(7)$$

易知系统(5)正平衡点解的局部稳定性是等

价于系统(7)零解的局部稳定性。为了得到系统(7)零解的渐近均方稳定条件,引进了一些表示和适当的结论。

定义 1 对两个对称实矩阵 P 和 Q,如果 $P-Q$ 是一个正定矩阵,则矩阵 $P>Q$。

定义 2 如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$,使得 $E|z(n)|<\varepsilon, n\in Z$,则系统(7) 的零解是均方稳定的;如果满足 $\lim_{n\to\infty}E|z(n)|^2=0$,则系统(7) 的零解是渐近均方稳定的。

引理 1 [10] 对系统(7),如果存在一个非负函数 $V_i=V(i,z(1),\cdots,z(n))$ 满足 $V(0,\phi(0))\leqslant\delta_1\|\phi\|^2$ 和 $E\Delta V_i\leqslant-\delta_2E|z(i)^2|, i\in Z$,其中 δ_1 和 δ_2 是正常数,则系统(7)的零解是渐近均方稳定的。

2 均方稳定条件

定理 1 假设存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得矩阵方程:

$$-P=A'DA-D \tag{8}$$

有一个半正定解 $D=\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{12} & d_{22}\end{pmatrix}$

且 P 满足

$$P>\begin{pmatrix}d_{11}\sigma_1^2h & 0\\ 0 & d_{22}\sigma_2^2h\end{pmatrix} \tag{9}$$

则系统(7)的零解是局部渐近均方稳定的。

证明:考虑以下两个线性随机差分方程:

$$\begin{cases}z_1(n+1)=a_{11}z_1(n)+b_{12}z_2(n)+\\ \qquad \sigma_1\sqrt{h}\xi_1(n+1)z_1(n)\\ z_2(n+1)=a_{22}z_2(n)+b_{21}z_1(n)+\\ \qquad \sigma_2\sqrt{h}\xi_2(n+1)z_2(n)\end{cases} \tag{10}$$

容易看出系统(7)是系统(10)的特殊形式。

令 $z(n)=(z_1(n),z_2(n))'$ 则系统(10)等价于以下矩阵方程:

$$z(n+1)=(A+\Theta(\xi(n+1)))z(n)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵,

$$\Theta(\xi(n+1))=\begin{pmatrix}\sigma_1\sqrt{h}\xi_1(n+1) & 0\\ 0 & \sigma_2\sqrt{h}\xi_2(n+1)\end{pmatrix}$$

构建 Lyapuov 函数 $V(n)=z'(n)Dz(n)$,有 $\Delta V(n)=z'(n+1)Dz(n+1)-z'(n)Dz(n)$。计算 $\Delta V(n)$ 的期望并根据式(6)得到

$$\begin{aligned}E\Delta V(n)&=E(z'(n)(A+\Theta(\xi(n+1)))'D(A+\Theta(\xi(n+1)))z(n)-z'(n)Dz(n))\\ &=E(z'(n)((A'+\Theta'(\xi(n+1)))D(A+\Theta(\xi(n+1)))-D)z(n))\\ &=E(z'(n)(A'DA-D+\Theta'(\xi(n+1))D\Theta(\xi(n+1)))z(n))\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}&E\Theta'(\xi(n+1))D\Theta(\xi(n+1))\\ &=E\begin{pmatrix}\sigma_1\sqrt{h}\xi_1(n+1) & 0\\ 0 & \sigma_2\sqrt{h}\xi_2(n+1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{12} & d_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1\sqrt{h}\xi_1(n+1) & 0\\ 0 & \sigma_2\sqrt{h}\xi_2(n+1)\end{pmatrix}\\ &=E\begin{pmatrix}d_{11}\sigma_1^2h\xi_1^2(n+1) & d_{12}\sigma_1\sigma_2h\xi_1(n+1)\xi_2(n+1)\\ d_{12}\sigma_1\sigma_2h\xi_1(n+1)\xi_2(n+1) & d_{22}\sigma_2^2h\xi_2^2(n+1)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}d_{11}\sigma_1^2h & 0\\ 0 & d_{22}\sigma_2^2h\end{pmatrix}\end{aligned}$$

根据引理 1 和式(9),有

$$E\Delta V(n)=E(z'(n)(-P+\begin{pmatrix}d_{11}\sigma_1^2h & 0\\ 0 & d_{22}\sigma_2^2h\end{pmatrix})z(n))\leqslant-cE|z(n)|^2$$

其中 $c>0$,根据引理 1,证明完成。

将定理 1 应用于系统(5)的解 $E(S^*,I^*)$ 的正平衡态中,在这种情况下,

$$A=\begin{pmatrix}1-\dfrac{h\beta I^*}{1+\alpha I^*}-\mu h & \dfrac{h\beta I^*}{1+\alpha I^*}\\ \dfrac{-h\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} & 1+\dfrac{h\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2}-h(\mu+\gamma+\lambda)\end{pmatrix}$$

则矩阵方程(8)等价于

$$p_{11}=\frac{(\mu h\alpha I^{*}+\mu h-1-\alpha I^{*}+h\beta I^{*})[(1+\alpha I^{*}-h\beta I^{*}-\mu h-\mu h\alpha I^{*})d_{11}+2h\beta I^{*}d_{12}]-(h\beta I^{*})^{2}d_{22}}{(1+\alpha I^{*})^{2}}+d_{11} \quad (11)$$

$$p_{12}=\frac{-((1+\alpha I^{*}-h\beta I^{*}-\mu h-\mu h\alpha I^{*})d_{12}+h\beta I^{*}d_{22})((1+\alpha I^{*})^{2}+h\beta S^{*}-h(1+\alpha I^{*})^{2}(\mu+\gamma+\lambda))}{(1+\alpha I^{*})^{3}}+$$
$$\frac{(1+\alpha I^{*}-h\beta I^{*}-\mu h-\mu h\alpha I^{*})h\beta S^{*}d_{11}+h^{2}\beta^{2}I^{*}S^{*}d_{12}}{(1+\alpha I^{*})^{3}}+d_{12} \quad (12)$$

$$p_{22}=\frac{-h^{2}\beta^{2}S^{*2}d_{11}+((1+\alpha I^{*})^{2}+h\beta S^{*}-h(1+\alpha I^{*})^{2}(\mu+\gamma+\lambda))h\beta S^{*}d_{12}}{(1+\alpha I^{*})^{4}}+d_{22}-$$
$$\frac{[-h\beta S^{*}d_{12}+(1+\alpha I^{*})^{2}+h\beta S^{*}-h(1+\alpha I^{*})^{2}(\mu+\gamma+\lambda)]d_{22}[(1+\alpha I^{*})^{2}+h\beta S^{*}-h(1+\alpha I^{*})^{2}(\mu+\gamma+\lambda)]}{(1+\alpha I^{*})^{4}} \quad (13)$$

其中
$$p=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}$$
$$p_{11}p_{22}-p_{12}{}^{2}>0 \quad (14)$$
在式(14)成立的条件下式(9)等价于以下不等式
$$p_{11}-d_{11}\sigma_{1}{}^{2}h>0 \quad (15)$$
$$(p_{11}-d_{11}\sigma_{1}{}^{2}h)(p_{22}-d_{22}\sigma_{2}{}^{2}h)-p_{12}{}^{2}>0 \quad (16)$$
如果式(11),式(12),式(13)有满足式(14),式(15),式(16)的解 $(d_{11}d_{12}d_{22})$,我们就说正平衡解(S^{*},I^{*}) 是渐近均方稳定的。

下面对相关参数取适当的值,利用 Matlab 软件求解,作出图形说明结论的正确性。选取初值 $S(0)=0.7$,$I(0)=0.8$,令 $\Lambda=0.6$,$\beta=0.4$,$\alpha=0.1$,$\mu=0.3$,$\lambda=0.2$,$h=0.01$。得到平衡解 $E(1.53,0.25)$ 以及正定矩阵 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 和图 1。
$$D=\begin{pmatrix}5.7457 & 1.7415\\ 1.7415 & 2.2310\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0.4150 & 0.3728\\ 0.3728 & 4.3140\end{pmatrix}$$

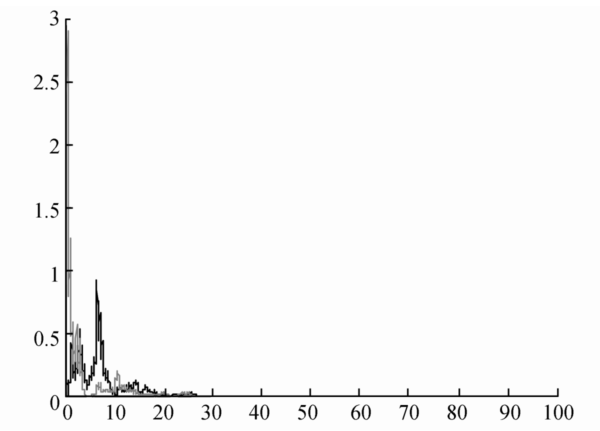

图 1　系统(7)零解的稳定性图形

Fig. 1　Stability of zero solution of system seven

通过定理 1,得出系统(7)的零解是渐近均方稳定的,图 1 验证了结论的正确性。

参考文献:

[1] KERMACK W O,MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Bulletin of mathematical biology,1991,53(1/2):700-721.

[2] ZAMAN G,KANG Y H,JUNG I H. Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemic model[J]. Biosystems,2008,93(3):240-249.

[3] JI C Y,JIANG D Q,SHI N Z. The behavior of an SIR epidemic model with stochastic perturbation[J]. Stochastic analysis and applications,2012,30(5):755-773.

[4] JIANG D Q,YU J J,JI C Y,et al. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model[J]. Mathematical and computer modelling,2011,54(1/2):221-232.

[5] LIN Y G,JIANG D Q. Long-time behavior of perturbed SIR model by white noise[J]. Discrete continuous systems-series B,2013,18(7):1873-1887.

[6] LIU Q,CHEN Q M. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with saturated incidence[J]. Applied mathematics and computation,2016,282:155-166.

[7] SHAIKHET L. Stability of equilibrium states for a stochastically perturbed exponential type system of difference equations[J]. Journal of computational and applied mathematics,2015,290:92-103.

[8] MAO X. Stochastic differential equations and applications[M]. New York:Horwood Chichester,2007:132-138.

[9] IACUS S M. Simulation and inference for stochastic differential equations:with R examples[M]. New York:Springer-Verlag,2008:56-63.

[10] SHAIKHET L. Lyapunov functionals and stability of stochastic difference quations[M]. London:Spring,2011:67-75.

(责任编辑:扶文静)