DOI:10. 19431/j. cnki. 1673-0062. 2019. 01. 008

无延时可修系统的可靠性分析与计算

刘亚春,王 盈,张 娜

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:针对无延时可修系统,在假设失效时间服从指数分布、而维修时间服从一般分布的前提下,利用补充变量法,建立了系统的可靠性模型,通过拉普拉斯变换,推导出了系统的瞬时可用度、瞬时故障频度、稳态可用度、稳态故障频度、平均开工时间、平均停工时间和平均周期等可靠性指标的解析表达式,并验证结论的正确性,纠正了某些参考文献的瑕疵或错误,推广了有关结果。

关键词:可修系统;可靠性;模型;稳态可靠性指标

中图分类号:O213.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-0062(2019)01-0044-03

Reliability Analysis and Calculation of Repairable System without Delay

LIU Yachun, WANG Ying, ZHANG Na

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Specific to repairable system without delay, it is assumed that the failure time obeys exponential distribution, and the repair time obeys general distribution. Using the method of supplementary variable, the system reliability model is established. Through Laplace transform, some reliability indexes' analytical expression, such as instantaneous availability, instantaneous fault frequency, steady-state availability, steady-state fault frequency, average starting time, average shutdown time and average period and so on, is deduced. Finally, the correctness of the conclusion is verified, which corrects some references' defects or errors, and some relevant conclusions is generalized.

key words: repairable system; reliability; model; stable reliability index

收稿日期:2018-10-08

基金项目:南华大学博士启动基金资助项目(2016XQD04);南华大学研究生科研创新项目(2016XCX07;2008XCX88)

作者简介:刘亚春(1965-),男,教授,博士,主要从事可靠性与计算数学方面的研究. E-mail:369132950@qq.com

0 引 言

系统是由若干单元或部件按一定的结构组成的以实现某些特定功能的整体。系统通常分为不可修系统与可修系统。由于技术和经济上的安全性与可行性,可修系统被广泛使用,是可靠性工程中研究的主要对象[1]。

理论上,为了使系统具有更好的可用性,当系统发生故障时,应当马上开始维修。假设无延时可修复系统只有正常和故障两个状态:分别记为 e_1 和 e_2,设 t 时刻系统处于状态 e_1 和 e_2 的概率分别为 $p_1(t)$ 和 $p_2(t)$,在假设失效率和维修率分别为常数为 λ 和 μ 的情况下,文献[2-3]利用微元法、基于状态转移和全概率公式建立了无延时可修复系统的可靠性模型:

$$\begin{cases} P'_1(t) = -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ P'_2(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \\ P_1(0) = 1, P_2(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

解微分方程组(1),可得瞬时可用度

$$A(t) = p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{2}$$

稳态可用度为

$$A(\infty) = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \tag{3}$$

显然,在失效率不变的情况下,要提高稳态可用度,必须提高产品的维修率。文献[4-6]研究了降低维修成本、提高维修率的方法或措施。然而,维修率一般是持续维修时间的函数。文献[7]考虑了维修率不是常数的情况,但存在瑕疵。为了完善可靠性理论、使研究结果具有实际指导意义,特撰此文。

1 模型的建立

假设系统的失效率为常数 λ,t 时刻系统处于正常状态的概率为 $p_1(t)$,如果系统发生了故障便马上维修,设 t 时刻系统处于故障状态、持续维修时间为 x 的维修率为 $\mu(x)$,系统处于故障状态且持续维修时间为 x 的概率为 $p_2(t,x)$,则有

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) \cdot [1 - \lambda \Delta t] + \left[\int_0^t \mu(x) p_2(t,x) \mathrm{d}x\right] \Delta t + o(\Delta t)$$

即

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda p_1(t) + \int_0^t \mu(x) p_2(t,x) \mathrm{d}x + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$,得

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda p_1(t) + \int_0^t \mu(x) p_2(t,x) \mathrm{d}x \tag{4}$$

同理有

$$p_2(t + \Delta t, x + \Delta x) = p_2(t,x) \cdot [1 - \mu(x)\Delta x] + o(\rho)$$

移项得

$$p_2(t + \Delta t, x + \Delta x) - p_2(t,x) = -p_2(t,x)\mu(x)\Delta x + o(\rho)$$

$$\frac{\partial p_2(t,x)}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial p_2(t,x)}{\partial x}\Delta x = -p_2(t,x)\mu(x)\Delta x + o(\rho)$$

其中

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2},$$
$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta t,$$

上式两边同除以 Δt,然后令 $\Delta t \to 0$,得

$$\frac{\partial p_2(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p_2(t,x)}{\partial x} = -\mu(x) p_2(t,x) \tag{5}$$

初始条件为

$$p_1(0) = 1, p_2(0,x) = 0 (x \geqslant 0) \tag{6}$$

边界条件为

$$p_2(t,0) = \lambda p_1(t) \tag{7}$$

式(4)~式(7)构成可修系统的可靠性模型。因为 $0 \leqslant x \leqslant t$,所以,当 $x>t$ 时 $p_2(t,x)=0$。从而,无延时可维修系统的可靠性模型可以改写为:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda p_1(t) + \displaystyle\int_0^{+\infty} \mu(x) p_2(t,x) \mathrm{d}x \\ \dfrac{\partial p_2(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial p_2(t,x)}{\partial x} = -\mu(x) p_2(t,x) \\ p_1(0) = 1, p_2(0,x) = 0 \\ p_2(t,0) = \lambda p_1(t) \end{cases} \tag{8}$$

2 模型的求解

在式(5)两边关于变量 t 取 Laplace 变换[8],记 $L[p_2(t,x)] = P_2^*(s,x)$,并结合初始条件,得

$$sL[p_2(t,x)] - p_2(0,x) + \frac{\partial}{\partial x} L[p_2(t,x)] = -\mu(x) \cdot L[p_2(t,x)]$$

$$sP_2^*(s,x) + \frac{\partial P_2^*(s,x)}{\partial x} = -\mu(x) \cdot P_2^*(s,x)$$

解得 $P_2^*(s,x) = C \cdot \exp\left[-s \cdot x - \int_0^x \mu(\tau) \mathrm{d}\tau\right]$

其中 C 是与 x 无关的待定常数。

记 $L[p_1(t)] = P_1^*(s)$,在式(7)两边进行 Laplace

变换,得 $P_2^*(s,0)=\lambda P_1^*(s)$,代入上式,得

$$P_2^*(s,x)=\lambda\cdot P_1^*(s)\cdot\exp\left[-s\cdot x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{9}$$

在模型(8)的第一个方程两边进行 Laplace 变换,得

$$sP_1^*(s)-p_1(0)=-\lambda P_1^*(s)+\int_0^{+\infty}\mu(x)P_2^*(s,x)\mathrm{d}x$$

$$sP_1^*(s)-1=-\lambda P_1^*(s)+\int_0^{+\infty}\mu(x)\cdot\lambda P_1^*(s)\cdot\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x$$

从而

$$P_1^*(s)=\frac{1}{s+\lambda-\lambda\int_0^{+\infty}\mu(x)\cdot\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x} \tag{10}$$

$$P_2^*(s,x)=\frac{\lambda\cdot\exp\left[-s\cdot x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]}{s+\lambda-\lambda\int_0^{+\infty}\mu(x)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x} \tag{11}$$

$$p_1(t)=L^{-1}\left[P_1^*(s)\right] \tag{12}$$

$$p_2(t,x)=L^{-1}\left[P_2^*(s,x)\right] \tag{13}$$

3 可靠性计算

可修系统在任意时刻的瞬时可用度由式(12)给出,即

$$A(t)=L^{-1}\left[P_1^*(s)\right] \tag{14}$$

瞬时故障频度

$$m(t)=\int_0^{+\infty}p_2(t,x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

稳态可用度为

$$A(\infty)=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{s\to0}sP_1^*(s) \tag{16}$$

稳态故障频度为

$$m(\infty)=\lim_{s\to0}\int_0^{\infty}s\cdot P_2^*(s,x)\mathrm{d}x \tag{17}$$

平均开工时间、平均停工时间和平均周期分别为

$$T_S=\frac{A(\infty)}{m(\infty)} \tag{18}$$

$$T_D=\frac{1-A(\infty)}{m(\infty)} \tag{19}$$

$$T_P=\frac{1}{m(\infty)} \tag{20}$$

4 结　论

针对无延时可修系统,在假设失效时间服从指数分布、而维修时间服从一般分布的情况下,利用补充变量法建立了系统的可靠性模型,通过拉普拉斯变换,推导出了系统的瞬时可用度、瞬时故障频度、稳态可用度、稳态故障频度、平均开工时间、平均停工时间和平均周期等可靠性指标的解析表达式。下面以稳态可用度为例,验证结论的正确性:

当失效率和维修率都为常数时,由式(10)得

$$P_1^*(s)=\frac{1}{s+\lambda-\lambda\int_0^{+\infty}\mu(x)\cdot\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}x}=\frac{1}{s+\lambda-\lambda\mu\int_0^{+\infty}e^{-(s+\mu)x}\mathrm{d}x}=\frac{s+\mu}{s^2+(\lambda+\mu)s} \tag{21}$$

由式(16)和式(21)得

$$A(\infty)=\lim_{s\to0}sP_1^*(s)=\lim_{s\to0}\frac{s+\mu}{s+\lambda+\mu}=\frac{\mu}{\lambda+\mu} \tag{22}$$

显然,式(22)表示的结果与参考文献[1-3]对应的结果式(3)完全相同,说明模型(8)是模型(1)的推广,得出的可靠性参数计算公式(14)~(20)是正确的,在理论和实际应用上具有重要意义和参考价值。

参考文献:

[1] TANG Y H. Some new results on one unit repairable system[J]. Microelectronics reliability, 1996, 36(4): 456-468.

[2] 宋保维. 系统可靠性设计与分析[M]. 西安:西北工业大学出版社,2000:59-61.

[3] 曹正华,程侃. 可靠性数学引论[M]. 修订版. 北京:高等教育出版社,2006.

[4] 姜健,郭峰,张华. 产品的可靠性、维修性及有效性之间的关系[J]. 技术经济与管理研究,1998(6):36-37.

[5] 苏保河. 一类可修系统的可靠性指标和最优检测策略[J]. 自动化学报,2002,28(1):116-119.

[6] 刘艳,唐应辉. 一种新型的单部件可修系统的更换策略[J]. 电子科技大学学报,2007,36(2):289-391.

[7] 刘东旭,司文艺,袁玉娇. 一类单部件可修系统的稳定性及可靠性分析[J]. 延边大学学报,2013,40(1):15-19.

[8] WIDDER D V. The laplace transform[M]. Princeton: Princeton University Press,1941.

(责任编辑:扶文静)