

DOI:10.19431/j.cnki.1673-0062.2019.01.006

污染环境中时滞种群模型的 Hopf 分支分析

高丽娟, 廖茂新*, 王珠峰

(南华大学 数理学院, 中国 衡阳 421001)

摘要: 考虑种群对毒物反应及毒物侵入人体的两个时滞, 提出了一个描述污染环境中时滞种群的适当模型, 运用泛函微分方程稳定性理论和分支理论, 分析了正平衡点的局部稳定性及出现 Hopf 分支的条件。运用 Matlab 进行数值模拟, 验证理论分析的结果。

关键词: 污染环境; 种群模型; 时滞; 稳定性; Hopf 分支

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-0062(2019)01-0029-06

Hopf Bifurcation Analysis of a Delay Population Model in a Polluted Environment

GAO Lijuan, LIAO Maoxin*, WANG Zhufeng

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Considering the two delays of population reaction to poison and poison invasion into human body, a suitable model for describing the population with delays in polluted environment is proposed. By using the stability theory of functional differential equations and bifurcation theory, the local stability of positive equilibrium and the conditions for Hopf bifurcation are analyzed. Matlab is used to carry out numerical simulation to verify the theoretical analysis results.

key words: environmental pollution; population model; delay; stability; Hopf bifurcation

0 引言

生态种群的生存一直是许多学者关注的问

题。特别是研究毒物影响下的种群生存具有重要意义。无论是好还是坏, 毒物都会影响种群的生长速度。在早些年, T. G. Hallam 提出了在污染环

收稿日期: 2018-08-26

基金项目: 湖南省自然科学基金项目(13JJ3075); 湖南省教育厅重点项目(17A181); 南华大学研究生科学基金项目(2018KYY093)

作者简介: 高丽娟(1983-), 女, 硕士研究生, 主要从事微分方程方面的研究. E-mail: 250733913@qq.com. * 通信作者: 廖茂新(1974-), 男, 教授, 博士, 主要从事微分方程方面的研究. E-mail: 841139745@qq.com

境中单个种群的数学模型^[1-3]。于是,许多学者开始用常微分方程来描述生态人口系统。在参考文献[4]中,J. He 和 K. Wang 利用下面的模型对毒物影响下的种群进行了研究:

$$\begin{cases} dx(t)/dt = x(t)(r_0 - \alpha C_0(t) - \lambda x(t)) \\ dC_0(t)/dt = -(g + m + b_0 - \lambda x(t))C_0(t) + kC_e(t) \\ dC_e(t)/dt = -k_1x(t)C_e(t) + (g_1 + d_1 + \alpha_1 C_0(t))x(t)C_0(t) - hC_e(t) + u(t) \end{cases}$$

然而,由于某些种群的生物学特性,发现毒物的影响是延迟的,在一些文献中^[5-13],作者用时滞微分方程来描述生态系统。通过这些研究,考虑到种群对毒物的响应所引起的时滞及毒物进入人体的时滞,并得到一个时滞微分方程组。为了更为明显的展示毒物影响,将考虑居住在资源丰富、生活空间充足环境中的人群。通过这种方法,可以得到一些更好的结果,将以与文献[4]类似的方式得到这个的模型。

假设人口生活在没有成员移入和移出污染环境,并且环境资源丰富,生活空间充足,在这个环境中种群会吸收毒物,毒物会影响种群的生长速度。 $x(t)$, $C_0(t)$ 与 $C_e(t)$ 分别代表在 t 时刻的人口数量、人体内毒物浓度和环境毒物浓度。 b_0, d_0 分别代表在没有毒物的情况下人口的出生率与死亡率。 $\alpha (\alpha > 0)$ 表示机体对毒物的群体反应。

人口的增长可以表示为: $dx(t)/dt = x(t)(b_0 - d_0 - \alpha C_0(t))$ 为简单起见,令 $r_0 = b_0 - d_0$ 代表在没有毒物的情况下人口的增长率。将考虑由种群对毒物的反应所引内在起的时间延迟。则上述方程变为:

$$dx(t)/dt = x(t)(r_0 - \alpha C_0(t - \tau_1)) \quad (1)$$

其中 $\tau_1 (\tau_1 \geq 0)$ 是由种群对毒物的反应所引起的时间延迟。 m_0 表示人口的平均密度, k, g, m 都是正常数, $km_0x(t)C_e(t)$ 代表人群对环境中有毒物质的吸收, $gm_0x(t)C_0(t)$ 代表从人群中输入到环境中的毒物, $mm_0x(t)C_0(t)$ 代表新陈代谢过程中排出的毒物和 $(d_0 + \alpha C_0(t - \tau_1))m_0x(t)C_0(t)$ 代表生物死亡时体内所带的有毒物质。可以得到种群中有毒物质的增量可以表示为

$$\frac{dm_0x(t)C_0(t)}{dt} = km_0x(t)C_e(t) - gm_0x(t)C_0(t) - mm_0x(t)C_0(t) - (d_0 + \alpha C_0(t - \tau_1))m_0x(t)C_0(t) \quad (2)$$

通过计算方程(2)可得

$$x(t) \frac{dC_0(t)}{dt} + C_0(t) \frac{dx(t)}{dt} = kx(t)C_e(t) - (g + m + d_0 + \alpha C_0(t - \tau_1))x(t)C_0(t) \quad (3)$$

将式(1)代入式(3)可得

$$\frac{dC_0(t)}{dt} = kC_e(t) - (g + m + b_0)C_0(t)$$

考虑环境中的毒物侵入人体所引起的时间延迟。然后上述方程变为:

$$\frac{dC_0(t)}{dt} = kC_e(t - \tau_2) - (g + m + b_0)C_0(t) \quad (4)$$

最后,令 $Z_e(t)$ 为环境中有毒物质的数量, a, h, U 均为正常数。增量包括四个部分:从人群中向环境投放的毒物数量 $gm_0x(t)C_0(t)$; 在时刻 t 死亡的生物体中储存的有毒物质 $(d_0 + \alpha C_0(t - \tau_1))m_0x(t)C_0(t)$; 人群活动引起的毒物数量 $am_0x(t)$; 来自外部环境的有毒物质 U 。环境毒物损失分为两部分:人类从环境中获取的有毒物质数量 $km_0x(t)C_e(t - \tau_2)$; 来自系统外部环境的损失 $hZ_e(t)$ 。从而得到了

$$\frac{dZ_e(t)}{dt} = gm_0x(t)C_0(t) + (d_0 + \alpha C_0(t - \tau_1))m_0x(t)C_0(t) + am_0x(t) + U - km_0x(t)C_e(t - \tau_2) - hZ_e(t) \quad (5)$$

其中 $Z_e(t) = m_e C_e(t)$, m_e 代表环境中介质的总数量。方程两边同除以 m_e 可得:

$$\frac{dC_e(t)}{dt} = (g_1 + d_1 + \alpha_1 C_0(t - \tau_1))x(t)C_0(t) + a^*x(t) + u - k_1x(t)C_e(t - \tau_2) - hC_e(t), \quad (6)$$

其中 $g_1 = g \frac{m_0}{m_e}, d_1 = d_0 \frac{m_0}{m_e}, \alpha_1 = \alpha \frac{m_0}{m_e},$

$$a^* = a \frac{m_0}{m_e}, k_1 = k \frac{m_0}{m_e}, u = \frac{U}{m_e}.$$

综上所述,得到在污染环境时滞的种群模型:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(r_0 - \alpha C_0(t - \tau_1)), \\ \frac{dC_0(t)}{dt} = -(g + m + b_0)C_0(t) + kC_e(t - \tau_2), \\ \frac{dC_e(t)}{dt} = (g_1 + d_1 + \alpha_1 C_0(t - \tau_1))x(t) \times C_0(t) + a^*x(t) + u - k_1x(t)C_e(t - \tau_2) - hC_e(t) \end{cases} \quad (7)$$

在模型(7)的建模过程中,主要考虑居住在资源丰富、有足够生存空间和毒物的环境中的人群。特别地,考虑了人群对毒物的反馈时滞。这个模型能更好地反应毒物的影响。显然,该模型符合一个相对封闭的单种群环境的实际情况。

1 正平衡点的局部稳定性与 Hopf 分支的存在性

易知:

$$(H1) \frac{hr_0(g+m+b_0) - \alpha ku}{a\alpha k - r_0mk} > 0$$

成立,则系统(7)存在唯一的正平衡点 $E^*(x^*, C_0^*, C_e^*)$ 。

其中:

$$E^*(x^*, C_0^*, C_e^*) = \left(\frac{m_e [hr_0(g+m+b_0) - \alpha ku]}{m_0(ka\alpha - kr_0m)}, \frac{r_0}{\alpha}, \frac{r_0(g+m+b_0)}{\alpha k} \right)$$

将系统(7)在平衡点 E^* 线性化可得

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x^* C_0(t - \tau_1) \\ \frac{dC_0(t)}{dt} = -(g+m+b_0)C_0(t) + kC_e(t - \tau_2) \\ \frac{dC_e(t)}{dt} = \frac{m_0}{m_e} \left[(a - m \frac{r_0}{\alpha})x(t) + x^*(g + b_0)C_0(t) + x^*r_0C_0(t - \tau_1) - kx^*C_e(t - \tau_2) - chC_e(t) \right], \end{cases} \quad (8)$$

其中 $c = \frac{m_e}{m_0}$ 。式(8)对应的特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + (b_1\lambda^2 + b_2\lambda)e^{-\lambda\tau_2} + (c_1\lambda + c_2)e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)} = 0, \quad (9)$$

其中 $a_1 = h + g + m + b_0, a_2 = h(g + m + b_0),$

$$b_1 = \frac{-kx^*}{c}, b_2 = \frac{kmx^*}{c},$$

$$c_1 = -\frac{kr_0x^*}{c}, c_2 = \frac{(a\alpha - mr_0)kx^*}{c}.$$

情形 1 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时,将式(9)特征方程为

$$\lambda^3 + (a_1 + b_1)\lambda^2 + (a_2 + b_2 + c_1)\lambda + c_2 = 0, \quad (10)$$

$$\tau_{1j}^{(n)} = \frac{1}{\omega_j} \left\{ \arccos \frac{c_1\omega_j^4 + [(a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1]\omega_j^2}{c_1^2\omega_j^2 + c_2^2} + 2n\pi \right\}, (j = 1, 2, 3; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

那么当 $\tau_1 = \tau_{1j}^{(n)}$ 时方程(11)有一对纯虚根 $\pm i\omega_{1j}$,

若 (H2) $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2 + c_1) - c_2 > 0$ 且 $c_2 > 0$ 成立,由 Routh-Hurtitz 定理可知,方程(10)的所有根都具有负实部。根据泛函分析的稳定性知识可得定理 1。

定理 1 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时,如果 $(H_1), (H_2)$ 均成立,则正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

情形 2 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ 时,此时式(9)变为

$$\lambda^3 + (a_1 + b_1)\lambda^2 + (a_2 + b_2)\lambda + (c_1\lambda + c_2)e^{-\lambda\tau_1} = 0 \quad (11)$$

设 $\lambda = \omega i (\omega > 0)$ 是方程(11)式的其中一个虚根,则方程(11)变成

$$-\omega^3 i - (a_1 + b_1)\omega^2 + (a_2 + b_2)\omega i = -(c_1\omega i + c_2)e^{-i\omega\tau_1} \quad (12)$$

因为 $\lambda = \omega i (\omega > 0)$ 是方程(11)的一个虚根,则 $\lambda = -\omega i (\omega > 0)$ 也是方程(11)的一个虚根,代入方程(11)可得

$$\omega^3 i - (a_1 + b_1)\omega^2 - (a_2 + b_2)\omega i = -(-c_1\omega i + c_2)e^{i\omega\tau_1} \quad (13)$$

将式(12)×式(13)得

$$\omega^6 + [(a_1 + b_1)^2 - 2(a_2 + b_2)]\omega^4 + [(a_2 + b_2)^2 - c_1^2]\omega^2 - c_2^2 = 0 \quad (14)$$

令 $\omega^2 = z$,则方程(14)等价于

$$h(z) = z^3 + d_1z^2 + d_2z + d_3 = 0 \quad (15)$$

其中:

$$d_1 = (a_1 + b_1)^2 - 2(a_2 + b_2), \\ d_2 = (a_2 + b_2)^2 - c_1^2, d_3 = -c_2^2.$$

由文献[6]中的引理 3.3,可得

引理 1 (1)若方程(15)满足条件(H3) $d_3 \geq 0, d_1 \geq 0, d_2 > 0$;或者满足 $d_3 \geq 0, \Delta = d_1^2 - 3d_2 \leq 0$,则(15)没有正实根;

(2)若方程(15)满足条件(H4) $d_3 < 0$,或 $d_3 \geq 0, \Delta = d_1^2 - 3d_2 > 0, z_1^* = \frac{-d_1 + \sqrt{\Delta}}{3} > 0$ 且 $h(z_1^*) \leq 0$,则(15)有正实根。

假设方程(15)至少有一个正根,不失一般性,假设方程(14)有三个正根 $z_j (j = 1, 2, 3)$,相应地 $\omega_j = \sqrt{z_j} (j = 1, 2, 3)$ 是方程(13)三个正根。计算得

并且定义 $\tau_{10} = \min_{j \in \{1, 2, 3\}} \{\tau_{1j}^{(0)}\}, \omega_{10} = \omega_{1j_0}$

设 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ 是方程 (11) 在 $\tau = \tau_{10}$ 附近且满足 $\alpha(\tau_{10}) = 0, \omega(\tau_{10}) = \omega_{10}$ 的根, 下面寻找横截条件。对 (11) 关于 τ_1 求导, 得

$$\frac{d\tau_1}{d\lambda} = -\frac{3\lambda^2 + 2p_1\lambda + p_2}{\lambda e^{-\lambda\tau_1}(c_1\lambda + c_2)} + \frac{c_1}{\lambda(c_1\lambda + c_2)} - \frac{\tau_1}{\lambda}$$

(其中 $p_1 = a_1 + b_1, p_2 = a_2 + b_2$)

由式 (11) 可得

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau_1}\bigg|_{\lambda = \omega i}\right] = \frac{3\omega^4 + 2(p_1^2 - 2p_2)\omega^2 + p_2^2 - c_1^2}{(c_1\omega)^2 + c_2^2} = \frac{h'(w^2)}{(c_1\omega)^2 + c_2^2}$$

因此 $\operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau_1}\bigg|_{\lambda = \omega i}\right]\right\} = \operatorname{sign}\{h'(w^2)\}$, 所以 $h'(w^2) \neq 0$, 横截条件成立。由上面的讨论以及 Hopf 分支理论, 可得以下结论:

定理 2 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$, 有

(1) 若 (H1), (H2), (H3) 都成立, 则正平衡点 E^* 对所有 $\tau_1 > 0$ 都是局部渐近稳定的;

(2) 若 (H1), (H2), (H4) 成立, 则正平衡点 E^* 在 $0 < \tau_1 < \tau_{10}$ 时是局部渐近稳定的; 且若 $h'(w^2) \neq 0$, 则系统 (7) 在 $\tau_1 = \tau_{10}$ 时经历 Hopf 分支。

情形 3 当 $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$ 时, 由 (9) 可得特征方程为

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + (q_1\lambda^2 + q_2\lambda + q_3)e^{-\lambda\tau_2} = 0, \tag{16}$$

其中 $q_1 = b_1, q_2 = (c_1 + b_1), q_3 = c_2$ 。

类似情形 2, 可得

定理 3 对于 $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$, 若 (H1), (H2) 与相对应的 (H4) 成立, 则正平衡点 E^* 在 $0 < \tau_2 < \tau_{20}$ 时是局部渐近稳定的; 且若 $h'(w^2) \neq 0$, 则系统 (7) 在 $\tau_1 = \tau_{20}$ 时经历 Hopf 分支。

情形 4 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 时, 由式 (2) 得特征方程为:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + (b_1\lambda^2 + b_2\lambda)e^{-\lambda\tau_2} + (c_1\lambda + c_2)e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} = 0, \tag{17}$$

不妨设 $\tau_1 \in [0, \tau_{10})$, 将 τ_2 视为分支参量。令 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 是 (17) 的一个纯虚根, 整理

$$\begin{cases} (b_1\omega^2 - c_1\omega \sin \omega\tau_1 - c_2 \cos \omega\tau_1) \sin \omega\tau_2 + (b_2\omega + c_1\omega \cos \omega\tau_1 - c_2 \sin \omega\tau_1) \cos \omega\tau_2 = \omega^3 - a_2\omega \\ (b_1\omega^2 - c_1\omega \sin \omega\tau_1 - c_2 \cos \omega\tau_1) \cos \omega\tau_2 - (b_2\omega + c_1\omega \cos \omega\tau_1 - c_2 \sin \omega\tau_1) \sin \omega\tau_2 = -a_1\omega^2 \end{cases} \tag{18}$$

等式两边平方相加得

$$\frac{d\tau_1}{d\lambda} = \frac{3\lambda^2 + 2p_1\lambda + p_2}{-\lambda(\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda)} +$$

$$\frac{c_1}{\lambda(c_1\lambda + c_2)} - \frac{\tau_1}{\lambda}$$

把 $\lambda = \omega i$ 代入最后一个方程中, 且经过计算可知

$$(p_2\omega - \omega^3)^2 + (p_1\omega^2)^2 = c_2^2 + (c_1\omega)^2,$$

则可以得到:

$$l_1(\omega) + 2l_2(\omega) \cos \omega\tau_1 + 2l_3(\omega) \sin \omega\tau_1 = 0 \tag{19}$$

其中

$$l_1(\omega) = \omega^6 + (a_1^2 - b_1^2 - 2a_2)\omega^4 + (a_2^2 - b_2^2 - c_1^2)\omega^2 - c_2^2,$$

$$l_2(\omega) = (c_2b_1 - b_2c_1)\omega^2, l_3(\omega) = c_1b_1\omega^2 + c_2b_2\omega.$$

假设 (H5) 方程 (19) 有有限个正根, 记这些根为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ 。对每一个固定的 $\omega_j (j = 1, 2, 3, \dots, n)$ 代入式 (18), 有

$$\tau_{2j}^{(k)} = \frac{1}{\omega_j} \left\{ \arccos\left(-\frac{l_1}{2\sqrt{l_2^2 + l_3^2}}\right) + \varphi + 2k\pi \right\} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n; k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

其中: $\tan \varphi = l_3/l_2$ 。

则 $\pm i\omega_j$ 是在 $\tau_1 \in [0, \tau_{10}), \tau_2 = \tau_{2j}^{(k)}$ 时特征方程 (17) 的一对纯虚根。

令 $\tau_{20} = \tau_{2j}^{(0)} = \min_{j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}} \{\tau_{2j}^{(0)}\}$, 而 ω_{20} 是对应于 τ_{20} 的根。接下来寻找 $\tau_2 = \tau_{20}$ 时经历的 Hopf 分支的横截条件。对式 (17) 关于 τ_2 求导, 并代入 $\tau_2 = \tau_{20}, \lambda = i\omega$ 得

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2}{\lambda(b_1\lambda^2 + b_2\lambda)e^{-\lambda\tau_2} + \lambda(c_1\lambda + c_2)e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}} + \frac{(2b_1 + b_2)e^{-\lambda\tau_2} - c_1e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}}{\lambda(b_1\lambda^2 + b_2\lambda)e^{-\lambda\tau_2} + \lambda(c_1\lambda + c_2)e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)}} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{\lambda}$$

由式 (17) 得

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{3\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_2}{-\lambda(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda)} + \frac{2b_1 + b_2 - c_1e^{-\lambda\tau_1}}{\lambda[(b_1\lambda^2 + b_2\lambda) + (c_1\lambda + c_2)e^{-\lambda\tau_1}]} - \frac{\tau_1 + \tau_2}{\lambda}$$

得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau_2}\bigg|_{\tau_2=\tau_2^*}\right]^{-1} &= \operatorname{Re}\left[\frac{-3\omega + a_2 + 2a_1\omega i}{-\omega^4 + a_2\omega + a_1\omega^3 i}\right] + \\ &\quad \operatorname{Re}\left[\frac{2b_1 + b_2 - c_1\cos\omega\tau_2 + ic_1\sin\omega\tau_1}{-b_1\omega^3 - b_2\omega^2 - (c_1\omega - \omega c_2 i)(\cos\omega\tau_1 - isin\omega\tau_1)}\right], \\ \operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau_2}\bigg|_{\tau_2=\tau_2^*}\right]^{-1} &= \operatorname{Re}\left(\frac{M_R + M_I i}{N_R + N_I i}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{Q_R + Q_I i}{P_R + P_I i}\right) = \frac{M_R N_{Rr} + M_I N_{Ii}}{N_R^2 + N_I^2} + \frac{Q_R P_R + Q_I P_I}{P_R^2 + P_I^2}. \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} M_R &= a_2 - 3\omega, M_I = 2a_1\omega, N_R = a_2\omega - \omega^4, \\ N_I &= a_1\omega^3, Q_R = 2b_1 + b_2 - c_1\cos\omega\tau_1, \\ Q_I &= c_1\sin\omega\tau_1, \\ P_R &= -b_1\omega^3 - b_2\omega^2 - c_2\omega\cos\omega\tau_1 + c_2\omega\sin\omega\tau_1, \\ P_I &= \omega c_2\cos\omega\tau_1 - c_1\omega\sin\omega\tau_1. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d\lambda}{d\tau_2}\bigg|_{\tau_2=\tau_2^*}\right]^{-1} = \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= M_R N_{Rr} + M_I N_{Ii}, B = N_R^2 + N_I^2, \\ C &= Q_R P_R + Q_I P_I, D = P_R^2 + P_I^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\operatorname{sign}\left\{\left[\operatorname{Re}\frac{d\lambda}{dt}\bigg|_{\tau_2=\tau_2^*}\right]^{-1}\right\} = \operatorname{sign}\{AD + BC\}.$$

所以当 $AD+BC \neq 0$ 时,横截条件成立。由上分析可得下结论。

定理 4 对于 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$, 若 (H_5) 成立且 $\tau_1 \in [0, \tau_{10})$, 则正平衡点 E^* 在 $0 < \tau_2 < \tau_{20}$ 时是局部渐近稳定的; 若 $AD+BC \neq 0$ 成立, 则系统 (7) 在 $\tau_2 = \tau_{20}$ 时经历 Hopf 分支。

2 数值模拟

令 $r_0 = 0.2, b_0 = 0.4, d_0 = 0.2, \alpha = 0.4, g = 0.1, m = 0.1, k = 0.7, a = 0.2, u = 0.01, h = 0.3, \frac{m_0}{m_e} = 0.1$, 则系统 (7) 变为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(0.2 - 0.4C_0(t - \tau_1)), \\ \frac{dC_0(t)}{dt} = -0.6C_0(t) + 0.7C_e(t - \tau_2), \\ \frac{dC_e(t)}{dt} = (0.03 + 0.04C_0(t - \tau_1))x(t)C_0(t) + \\ \quad 0.02x(t) + 0.01 - 0.07x(t)C_e(t - \tau_2) - 0.03C_e(t) \end{cases}$$

由上面的公式易于得到正平衡点为 $E^*(7.9047, 0.5000, 0.4286)$ 。

1) 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$ 时, 计算得 $\tau_{10} = 3.8623$, 据定理 2 可知正平衡点 E^* 在 $\tau_1 \in [0, 3.8623)$ 时是

局部渐近稳定的, 如图 1 所示; 在 $\tau_1 > 3.8623$ 时不稳定, 并在 $\tau_1 = 3.8623$ 时系统 (7) 经历 Hopf 分支, 如图 2 所示。

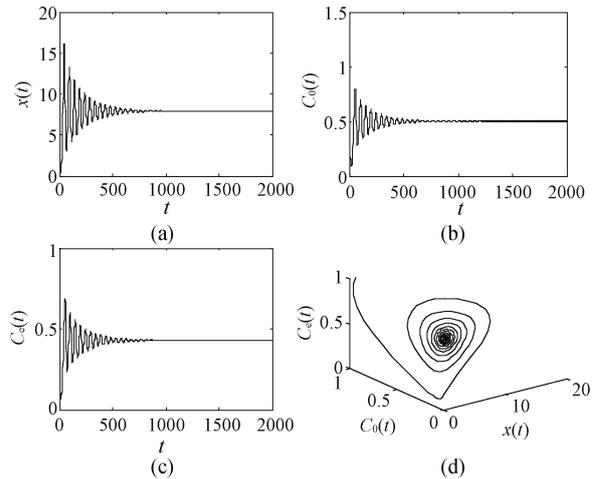


图 1 当 $\tau_1 = 3.0 < \tau_{10} = 3.8623, \tau_2 = 0$ 时, 系统 (7) 在正平衡点 E^* 处稳定
Fig. 1 The system (7) is stable when $\tau_1 = 3.0 < \tau_{10} = 3.8623, \tau_2 = 0$

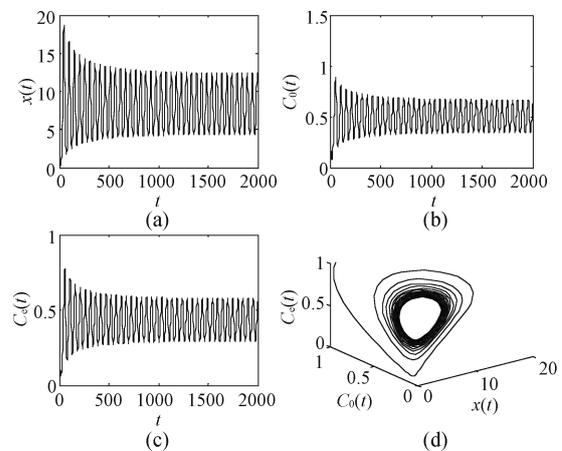


图 2 当 $\tau_1 = 4 > \tau_{10} = 3.8623, \tau_2 = 0$ 时, 系统 (7) 在正平衡点 E^* 处不稳定
Fig. 2 The system (7) is unstable when $\tau_1 = 4 > \tau_{10} = 3.8623, \tau_2 = 0$

2) 当 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 时, 选取 $\tau_{10} = 2 \in (0, 2.290)$, 计算得 $\tau_{20} = 0.8019$, 根据定理 4 可知正平衡点 E^*

在 $\tau_{20} \in [0, \tau_{20})$ 时是局部渐近稳定; 在 $\tau_2 = \tau_{20}$ 时经历 Hopf 分支, 如图 3, 图 4 所示。

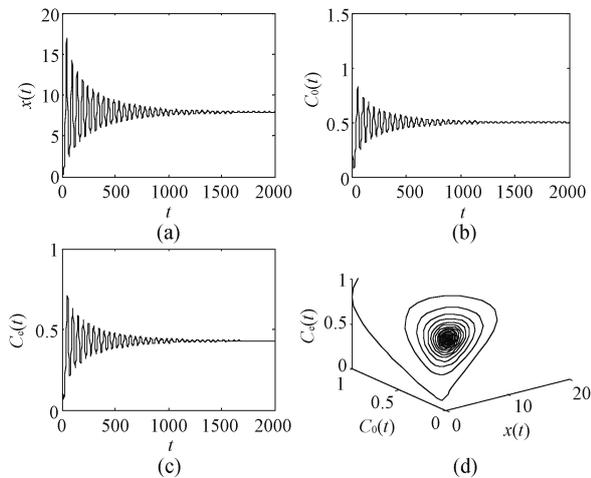


图 3 当 $\tau_1 = 3, \tau_2 = 0.5 < \tau_{20} = 0.8019$ 时, 系统(7)在正平衡点 E^* 处稳定

Fig.3 The system(7) is stable when $\tau_1 = 3, \tau_2 = 0.5 < \tau_{20} = 0.8019$

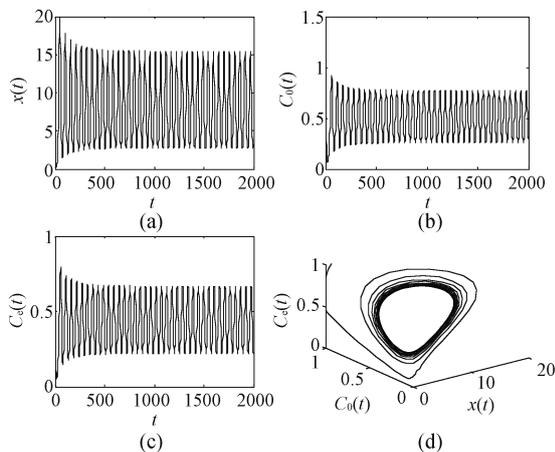


图 4 当 $\tau_1 = 3, \tau_2 = 2 > \tau_{20} = 0.8019$ 时, 系统(7)在正平衡点 E^* 处不稳定

Fig.4 The system(7) is unstable when $\tau_1 = 3, \tau_2 = 2 > \tau_{20} = 0.8019$

3 结 论

在以往的研究中, 作者主要研究了毒物 U 的输入速率的影响。而本文考虑了模型的时滞, 主要研究了诱发人口对毒性反应及环境中毒物进入人体的时间延迟, 结果显示它们对平衡点的局部稳定产生了影响。

参考文献:

- [1] HALLAM T G, CLARK C E. Non-autonomous logistic equations as models of populations in a deteriorating environment [J]. Journal of theoretical biology, 1981, 93 (2): 303-311.
- [2] HALLAM T G, CLARK C E, LASSITER R R. Effects of toxicants on populations; a qualitative approach I. Equilibrium environmental exposure [J]. Ecological modelling, 1983, 18(3): 291-304.
- [3] HALLAM T G, LUNA J T D. Effects of toxicants on populations: A qualitative: Approach III. Environmental and food chain pathways [J]. Journal of theoretical biology, 1984, 109(3): 411-429.
- [4] HE J, WANG K. The survival analysis for a population in a polluted environment [J]. Nonlinear analysis real world applications, 2009, 10(3): 1555-1571.
- [5] LIAO M X, XU C J, TANG X H. Bifurcation analysis for a three-species predator-prey system with two delays [J]. Communications in nonlinear science and numerical simulation, 2012, 17(1): 183-194.
- [6] TIPSRI S, CHINVIRYASIT W. The effect of time delay on the dynamics of an SEIR model with nonlinear incidence [J]. Chaos, solitons & fractals, 2015, 75: 153-172.
- [7] 田晓红, 徐瑞. 一类具时滞和阶段结构的捕食模型的稳定性与 Hopf 分支 [J]. 高校应用数学学报, 2010, 25(3): 285-292.
- [8] 张秋华, 周恺. 一类具有庇护所效应的阶段结构时滞 Holling-III 型捕食-食饵模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2017, 38(3): 1-5.
- [9] 黄兴华, 曹成堂, 周林. 一类具有时滞的阶段结构捕食模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 淮海工学院学报(自然科学版), 2013, 22(2): 1-4.
- [10] 郭伟岸, 黄立宏. 双时滞 Holling 型捕食-食饵系统的 Hopf 分支 [J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2018, 41(2): 63-71.
- [11] 袁媛, 段复建. 一类捕食者具有阶段结构的时滞捕食模型的稳定性分析 [J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2015, 38(1): 140-144.
- [12] 张道祥, 孙光讯, 马媛, 等. 带有 Holling-III 功能反应和线性收获效应的时滞扩散捕食者-食饵系统 Hopf 分支和空间斑图 [J]. 山东大学学报(理学版), 2018, 53(4): 85-94.
- [13] 张新锋, 陈斯养. 一类具有时滞的捕食与被捕食模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2012, 32(1): 36-41.

(责任编辑: 周泉)