

文章编号:1673-0062(2018)02-0030-07

# 一维平板外源驱动次临界系统动态参数权重函数研究

于 涛,侯 丞,谢金森,曾文杰,陈珍平

(南华大学 核科学技术学院,湖南 衡阳 421001)

**摘 要:**在准静态框架下,动态参数由权重函数、动力学量算符、形状函数的卷积得到.传统方法的权重函数并不能满足外源驱动次临界系统的中子动力学分析的要求.基于改进的准静态方法,选取临界权重函数模型和全局稳态权重函数模型分别计算一维次临界平板堆启堆过程和断束工况下的中子动力学结果,通过与时空动力学方程直接求解结果对比来深化对权重函数的认识;在外源驱动次临界系统中,权重函数应具有“次临界堆中子价值”物理意义;共轭外源项表征了堆芯内某一位置对外源中子的响应,与外源中子在该位置存在的概率有关.在此基础上提出的局部稳态权重函数模型,用裂变因子乘以权重系数作为共轭外源项.实践表明,采用局部稳态权重函数模型获取的中子动力学结果的准确性得到了提升.

**关键词:**外源驱动次临界系统;动态参数;权重函数;改进的准静态方法

**中图分类号:**TL329      **文献标志码:**A

## On the Weighting Function of the 1D Slab Source Driven Subcritical System

YU Tao, HOU Cheng, XIE Jin-sen, ZENG Wen-jie, CHEN Zhen-ping

(School of Nuclear Science and Technology, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

**Abstract:** In the quasi-static framework, the kinetic parameters are obtained by the convolution of weight functions, dynamic operators and shape functions. The weight function in the traditional method cannot satisfy the requirement of the neutron kinetics analysis for ADS, which is a subcritical system driven by the exogenous source. In this article, the critical weighting function of kinetics (cwk) and the global weighting function of kinetics (gwk) are adopted for the calculation of the neutron kinetic results for the one-dimensional subcritical plate reactor by Improved Quasi-static (IQS) method. And then, the physical meaning about the weighting functions can be clarified by comparing the results by IQS with the result obtained directly by the spatio-temporal kinetic equation. In the exogenous driven subcritical system, the weight function should have the physical meaning of subcriti-

收稿日期:2018-03-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11575079)

作者简介:于 涛(1972-),男,教授,博士,主要从事核反应堆物理和数值计算方面的研究.E-mail:yutao29@sina.com

cal neutron value and the conjugate external term represents the response at one position in the core. The neutron's response is related to the probability that exogenous neutrons exist in that location. Based on the assumption, the local weighting function of kinetics (lwk) model is proposed. The fission factor is multiplied by the weight coefficient as the conjugate external source term. The results show that the accuracy of the neutron kinetics obtained by using the lwk model has been improved.

**key words:** external source driven subcritical system; kinetic parameter; weighting function; IQS method.

## 0 引言

加速器驱动次临界系统 (accelerator driven sub-critical system, ADS)<sup>[1]</sup> 由于外中子源的引入和深次临界特性,在加速器束流瞬变时,外源发生快速变化,在中子学上表现出较强的“时间-空间-能量”非均匀性,这给 ADS 中子动力学分析带来了新的挑战<sup>[2]</sup>。

中子动力学研究通常采用的方法有点堆动力学<sup>[3-5]</sup>和基于准静态方法<sup>[6-8]</sup>的时-空动力学两大类。在点堆动力学和准静态方法的幅函数计算中均需要准确的中子学动态参数,它们由权重函数、动力学量算符和形状函数的卷积得到。传统的反应堆无需外源驱动即可实现自持运行,在计算其动态参数时,权重函数常采用共轭  $\lambda$  基波中子注量率,它具有“临界堆中子价值”的物理含义;在

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi(r, E, t)}{\partial t} = -L\phi(r, E, t) + (1 - \beta) \chi_p F\phi(r, E, t) + \sum_{i=1}^n \chi_{d,i} \lambda_i C_i(r, t) + S(r, E, t) \\ \frac{\partial C_i(r, t)}{\partial t} = \beta_i F\phi(r, E, t) - \lambda_i C_i(r, t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,

$$\begin{aligned} L\phi(r, E, t) &= -\nabla \cdot D(r, E) \nabla \phi(r, E, t) + \\ &\quad \Sigma_t(r, E) \phi(r, E, t) - \\ &\quad \int_0^\infty \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) \times \\ &\quad \phi(r, E', t) dE', \\ F\phi(r, E, t) &= \int_0^\infty \nu(r, E') \Sigma_f(r, E') \phi(r, E', t) dE' \end{aligned}$$

假设中子注量率  $\phi(r, E, t)$  可以被因式分解为形状函数  $\varphi(r, E, t)$  和幅函数  $n(t)$  的乘积:

$$\phi(r, E, t) = \varphi(r, E, t) \cdot n(t) \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),同时为不失一般性,在方程两边乘以一任意权重函数  $w(r, E)$ ,并对能量、空间进行积分,经过一系列变换,可得到点堆动力学方程组:

外源驱动次临界系统中,外源中子的快速变化使得次临界反应堆的中子注量率分布、能谱等发生剧烈变化,中子动力学特性较为复杂,动态参数计算采用何种权重函数仍需要更深入的研究。

基于改进的准静态方法(improved quasi-static methods, IQS),本文分别采用不同的权重函数模型模拟一维平板外源驱动次临界系统启堆过程和断束工况的动力学结果,并与直接求解时空动力学方程所得到的结果进行对比,在此基础上研究权重函数的物理意义,并建立新的权重函数模型。

## 1 理论基础

### 1.1 改进的准静态方法(IQS)

考虑缓发中子和外源中子的时空动力学方程可由方程组(1)表示:

$$\begin{cases} \frac{dn(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta_{\text{eff}}(t)}{\Lambda(t)} n(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i(t) + q(t) \\ \frac{dc_i(t)}{dt} = \frac{\beta_{\text{eff},i}(t)}{\Lambda(t)} n(t) - \lambda_i c_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\Lambda(t) = \frac{\langle w, \nu^{-1} \varphi \rangle_{r,E}}{\langle w, \chi F \varphi \rangle_{r,E}} \quad (4)$$

$$\beta_{\text{eff},i}(t) = \frac{\langle w, \beta_i \chi_{d,i} F \varphi \rangle_{r,E}}{\langle w, \chi F \varphi \rangle_{r,E}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\text{eff}}(t) &= \frac{1}{\langle w, \chi F \varphi \rangle_{r,E}} \sum_{i=1}^n \langle w, \beta_i \chi_{d,i} F \varphi \rangle_{r,E} = \\ &\quad \sum_{i=1}^n \frac{\langle w, \beta_i \chi_{d,i} F \varphi \rangle_{r,E}}{\langle w, \chi F \varphi \rangle_{r,E}} = \\ &\quad \sum_{i=1}^n \beta_{\text{eff},i}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$c_i(t) = \langle w, \chi_{d,i} C_i \rangle_{r,E} \quad (7)$$

$$q(t) = \langle w, S \rangle_{r,E} \quad (8)$$

$$\rho = \frac{\langle w, (\chi F - L) \varphi \rangle_{r,E}}{\langle w, \chi F \varphi \rangle_{r,E}} \quad (9)$$

$$\chi = (1 - \beta)\chi_p + \sum_{i=1}^n \beta \chi_{d,i} \quad (10)$$

描述幅度函数的方程(3)也被称为精确点堆动力学方程,它直接由中子时空动力学方程推导得到.可以采用 Gear 方法<sup>[9]</sup>求解方程获取幅函数  $n(t)$ .

在 IQS 方法中,某一时刻  $t$  的形状函数可通过对时间的一阶差分方程(11)得到:

$$\left[ L - (1 - \beta)\chi_p F + \frac{1}{\nu} \frac{1}{n(t)} \frac{dn(t)}{dt} + \frac{1}{\nu} \frac{1}{\Delta t} \right] \times \varphi(r, E, t) = \frac{1}{\nu} \frac{1}{\Delta t} \varphi(r, E, t') + \frac{S_d(r, E, t')}{n(t)} + \frac{S}{n(t)} \quad (11)$$

其中  $t' = t - \Delta t$ ,  $\Delta t$  为时间步长;缓发中子源项和缓发中子先驱核浓度分别为

$$S_d = \sum_{i=1}^n \chi_{d,i} \lambda_i C_i(r, t) \quad (12)$$

$$C_i(r, t) = C_i(r, t_0) \cdot e^{-\lambda_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\lambda_i(t-t')} \cdot \beta_i F \phi(r, E, t') dt' \quad (13)$$

### 1.2 动态参数权重函数模型

对于权重函数的选取,数学上虽然未对权重函数做特殊要求,但通常希望它既可提高动态计算精度又具备良好物理含义.物理上认为准静态模型中应采用“次临界堆中子价值”作为权重函数,但其有效性仍需数值计算与实验结果检验.

选取了以下 2 种权重函数模型:

#### 1) 临界权重函数模型

临界权重函数模型(critical weighting function of kinetics, cwk)<sup>[9]</sup>即采用共轭  $\lambda$  基波中子注量率作为权重函数,如公式(14):

$$-L^* \varphi_c^*(r, E) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} (\chi F)^* \varphi_c^*(r, E) = 0 \quad (14)$$

$\varphi_c^*$  具有“临界反应堆中子价值”的物理意义,是传统动力学模型动态参数计算最常用的权重函数.将  $\varphi_c^*$  带入式(9),有

$$\rho = \frac{\langle \varphi_c^*, (\chi F - L) \varphi \rangle_{r,E}}{\langle \varphi_c^*, \chi F \varphi \rangle_{r,E}} = \frac{\langle \varphi, (\chi F - L)^* \varphi_c^* \rangle_{r,E}}{\langle \varphi, (\chi F)^* \varphi_c^* \rangle_{r,E}}$$

$$\frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} \frac{\langle \varphi, (\chi F)^* \varphi_c^* \rangle_{r,E}}{\langle \varphi, (\chi F)^* \varphi_c^* \rangle_{r,E}} = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} \quad (15)$$

动态参数  $\rho$  被赋予了“静态反应性”的物理意义.

#### 2) 全局稳态权重函数模型

全局稳态权重函数模型(global weighting function of kinetics, gwk)<sup>[11]</sup>即为外源驱动次临界反应堆稳态中子平衡方程的共轭方程<sup>[10]</sup>的解,本文采用裂变因子  $\nu \Sigma_f$  作为共轭外源项  $S^*$ ,如方程(16)所示<sup>[11]</sup>:

$$-L^* \varphi_s^*(r, E) + (\chi F)^* \varphi_s^*(r, E) + \nu \Sigma_f(r, E) = 0 \quad (16)$$

裂变中子产生截面作为外源驱动次临界系统的共轭源  $S^*$ ,它的物理意义可以表述为:在次临界系统中单位时间内一个外源中子在某一位置产生的响应,即外源中子对全堆稳定裂变功率的贡献.

## 2 计算模型

本文研究的次临界系统为一维平板反应堆(图1),平板厚度为 450 cm,被划分为 90 个 5 cm 宽的网格; $k_{\text{eff}} = 0.986\ 98$ ,堆芯参数(见表1)来自 SLAB\_1D\_2G 基准题<sup>[12]</sup>;外源被放置在堆芯中央(阴影区域 45、46),宽度为 10 cm,外源中子各向同性发射,初始能量落在第 1 能群.

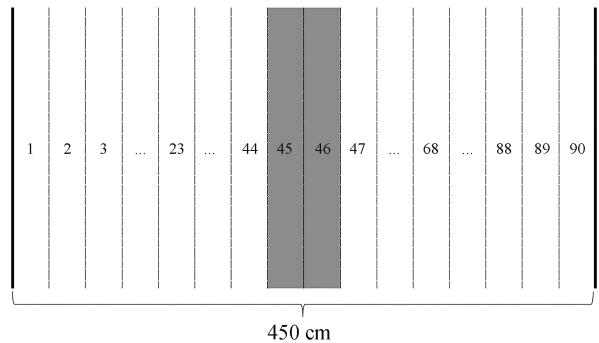


图1 一维次临界平板堆示意图

Fig.1 Schematic diagram of 1D sub-critical slab reactor

## 3 两种权重函数对动力学结果的影响分析

采用改进的准静态方法(IQS)获取一维平板次临界系统中全堆中子数随时间的变化,并与时空动力学方程直接求解程序的结果(基准值)进行对比.本文研究两种外源驱动模式:

表 2 一维次临界平板堆堆芯参数  
Table 2 The homogeneous parameters in 1D sub-critical slab reactor

能群 The Group	$D/cm$	$\Sigma_R/cm^{-1}$	$\nu\Sigma_f/cm^{-1}$	$\chi_p/\chi_d$	$\Sigma_{1-2}/cm^{-1}$	$v/(cm \cdot s^{-1})$
1	1.264	$8.154 \times 10^{-3}$	0	1.000	$7.368 \times 10^{-3}$	$1.000 \times 10^7$
2	$9.328 \times 10^{-1}$	$4.100 \times 10^{-3}$	$4.562 \times 10^{-3}$	0		$3.000 \times 10^5$

1) 启堆:在启堆过程中,外中子源强度在零时刻瞬间达到额定强度,次临界系统在稳态外源的驱动下,堆内中子注量率从 0 逐步达到稳定水平。

2) 断束:在次临界系统的中子注量率达到稳定水平后,在零时刻突然切断外源驱动,外中子源强度在瞬间由额定强度降为零,中子注量率随时间衰减。

以下选取 0~0.5 s 的中子动力学结果展示出来,在这段时间内,采用 IQS 方法计算的动力学结果与基准值的误差以趋于稳定。

需要说明的是,在模拟启堆过程的中子动力学时,由于初始时刻的中子注量率为零,这导致 IQS 计算时,初始时刻形状函数  $\varphi(r, E, t)$  的选择具有一定的“任意性”。为了排除初始形状函数的影响,本文通过时空动力学方程直接求解程序获

取零时刻后第一个时间点的中子注量率,然后通过中子注量率和权重函数求取幅函数和形状函数并进行后续的计算。

3.1 启堆过程中子动力学模拟

外源驱动的一维次临界平板堆启堆过程动力学结果及其与基准值的误差绝对值见图 2。

从图 2 中可以看到, IQS 中子动力学结果与基准值之间的误差呈现先增长后减小的趋势:在 0~0.05 s,误差的绝对值迅速增大;在 0.05 s 之后,误差绝对值逐渐减小并在 0.4 s 后维持在稳定水平;采用临界权重函数模型(cwk)计算的动力学结果误差比采用全局稳态权重函数模型(gwk)的误差略小,两者的偏差在 0.05s 附近达到最大,然后随着时间逐渐减小.因此,对于启堆过程,采用临界权重函数模型能使中子动力学结果更加精确。

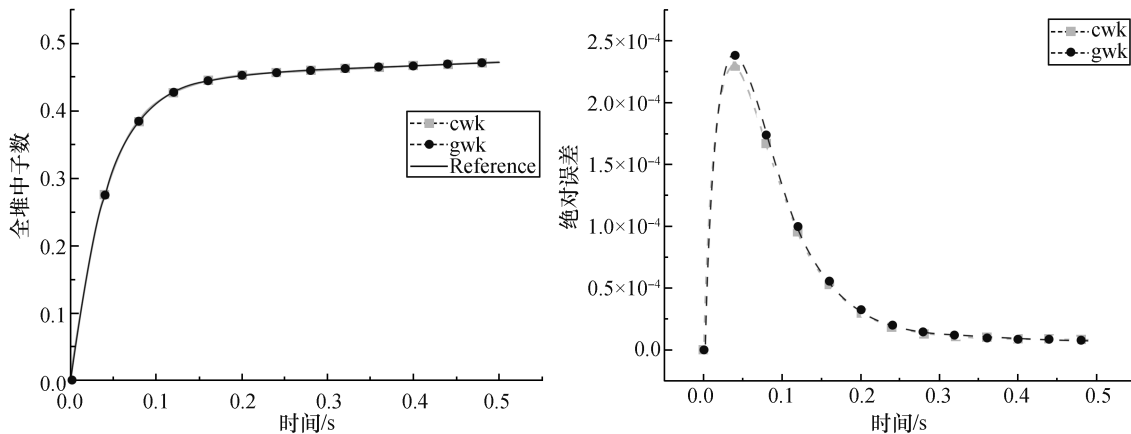


图 2 一维次临界平板堆启堆过程中子动力学结果及其绝对误差

Fig.2 The kinetic results and their absolute errors of the starting process in 1D slab subcritical reactor

3.2 断束情况中子动力学模拟

外源驱动的一维次临界平板堆断束工况动力学结果及其与基准值的误差绝对值见图 3。

从图 3 可以看到, IQS 中子动力学结果与基准值之间的误差先急剧增长然后迅速降低,在经过一个较小的增长后最终趋于稳定:在 0~0.025 s,误差的绝对值急剧变化,先增大后减小;

在 0.025~0.05 s 之后,误差绝对值略微上升;在 0.05 s 后,误差的绝对值缓缓减小并维持在稳定阶段.总体来说,采用全局稳态权重函数模型(gwk)计算的动力学结果误差比采用临界权重函数模型(cwk)的误差小,因此,对于断束工况,采用全局稳态权重函数模型能使中子动力学结果更加精确。



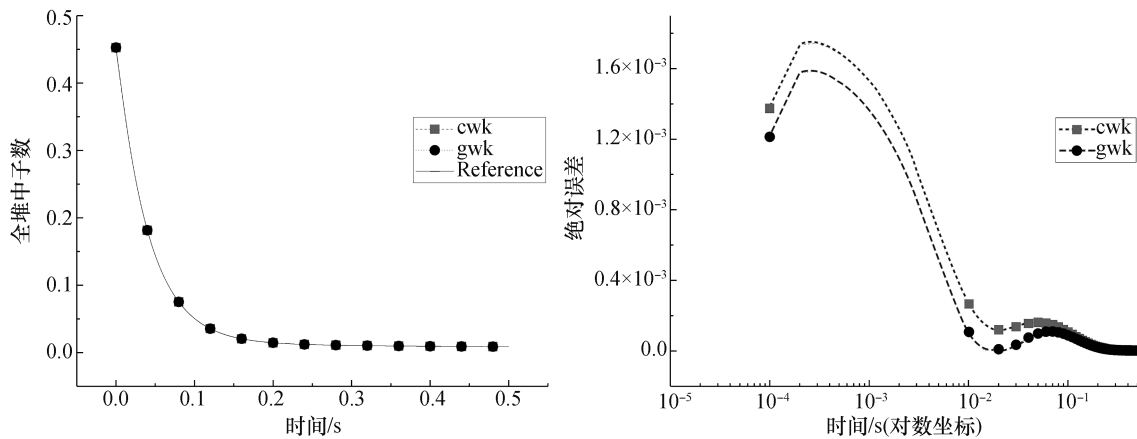


图3 一维次临界平板堆断束工况中子动力学结果及其绝对误差

Fig.3 The kinetic results and their absolute errors of the beam-loss condition in 1D slab subcritical reactor

### 3.3 次临界堆中子价值的物理意义

从物理意义上讲,在外源驱动次临界系统中,应采用“次临界堆中子价值”充当权重函数,其物理意义可以表达为,向次临界堆持续引入强度为 $1/\text{秒}$ 的中子源产生的稳定中子数.相对于“临界堆中子价值”,“次临界堆中子价值”更强调了次临界堆内某一位置对外源中子的响应:堆内某一位置是否存在外源中子,以及外源中子是否易引发裂变,都将影响“次临界堆中子价值”的分布;在动态参数的计算中,这表现为,不同的外源驱动模式应有与之对应的、物理意义适合的权重函数.

然而,图2和图3的结果体现出这样的矛盾:对于启堆过程,堆内已经引入外源驱动,而最适用的权重函数却是通过共轭外源项 $S^*=0$ 的临界权重函数模型获取的;在断束工况下,外源驱动已经消失,但最适用的权重函数是通过全局稳态权重函数模型获取,这意味着,在断束情况下外源对中子价值的影响依然存在.

考虑到外源中子在堆内空间的运动,可以提出如下假设来解释上述矛盾:外源对全堆中子价值分布的影响,随着外源中子在堆内的慢化和扩散,同样存在一个逐步扩大或消退的过程:在启堆过程中,外源中子对中子价值的影响(在数学上即为共轭外源项 $S^*$ )从外中子源处向外围逐步扩散,在启堆后极短时间内这种影响仅能覆盖到外中子源附近区域,此时对应的权重函数更偏向于临界权重函数模型结果;在发生断束后,外源中子对中子价值的影响从外中子源处向外围逐渐衰减,在极短时间,其对应的权重函数更接近全局稳态权重函数模型的结果.因此,严格意义上讲,在外源驱动次临界系统中,权重函数应该是一个随

时间变化的量.

在IQS方法中,为了提高计算效率,一般将权重函数设置为一个常量.考虑到IQS中子动力学计算误差主要集中在外中子源发生突变后的短时间内,本文针对这一时间段,尝试建立一种介于临界权重函数模型(cwk)和全局稳态权重函数模型(gwk)之间的局部稳态权重函数模型(local weighting function of kinetic, lwk),以求提高IQS中子动力学计算精度.

## 4 局部稳态权重函数模型

不同权重函数模型的主要差别在于共轭外源项 $S^*$ 的选取. $S^*$ 描述了次临界堆内某一位置对外源中子的响应,包含两个方面:外源中子能否引发裂变,这可以由宏观裂变截面来描述;该位置是否存在外源中子,这是局部稳态权重函数模型所需要描述的主要内容.

假设在零时刻,堆芯外中子源处发射一束脉冲源,这束外源中子在堆内经历慢化、扩散等过程,直至被介质吸收.因为不考虑外源中子次生粒子的影响,外源中子在堆芯中的衰减行为可以用非增殖介质内中子扩散方程来描述:

$$\nabla \cdot D(r, E) \nabla \phi(r, E) - \Sigma_a(r, E) \phi(r, E) + S(r, E) = 0 \quad (17)$$

将总的外源中子稳态注量率进行归一化处理,即可得到权重系数 $\omega(r)$ 见图4(a). $\omega(r)$ 描述了在启堆瞬间外源中子在堆芯的分布,权重系数越高的位置,外源中子存在的几率越高,也越容易对次临界堆维持稳态运行做出贡献;权重函数极小的位置,则可视为此处不存在外源中子.通过权重系数 $\omega(r)$ 对共轭外源项进行修正,可以得到启堆过

程的权重函数模型:

$$-L^* \varphi_i^*(r, E) + (\chi F)^* \varphi_i^*(r, E) + \omega(r) \cdot \nu \Sigma_f(r, E) = 0 \tag{18}$$

对于断束工况,其权重函数的变化过程应与启堆过程权重函数的变化相反,因此,断束工况的权重系数可以设置为  $1-\omega$ ,见图 4(b);断束工况的权重函数模型则为:

$$-L^* \varphi_i^*(r, E) + (\chi F)^* \varphi_i^*(r, E) + [1 - \omega(r)] \cdot \nu \Sigma_f(r, E) = 0 \tag{19}$$

结合权重系数  $\omega$  的结果以及公式(18)、(19)可以看到,权重函数的引入使得共轭外源项  $S^*$  在堆芯呈现一定的分布,在权重系数  $\omega$  极小的位置, $S^*$  可视为 0,即  $S^*$  仅覆盖堆芯的部分区域,故称改进的权重函数模型为局部稳态权重函数。

采用局部稳态权重函数计算中子动力学结果,将其误差与临界权重函数、全局稳态权重函数的误差进行对比,见图 5。

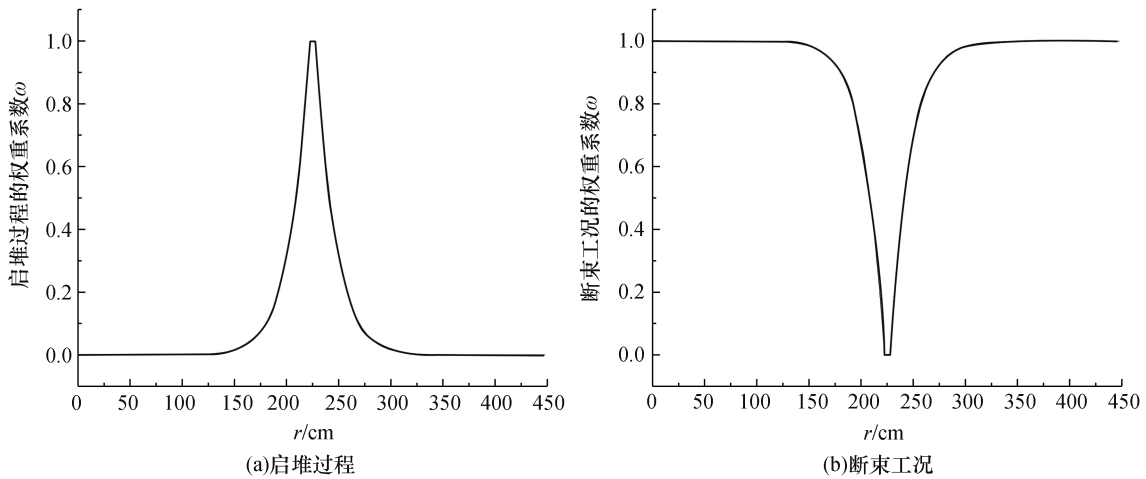


图 4 局部稳态权重函数模型权重系数 ω 结果

Fig.4 The coefficient ω of the local weighting function of kinetic

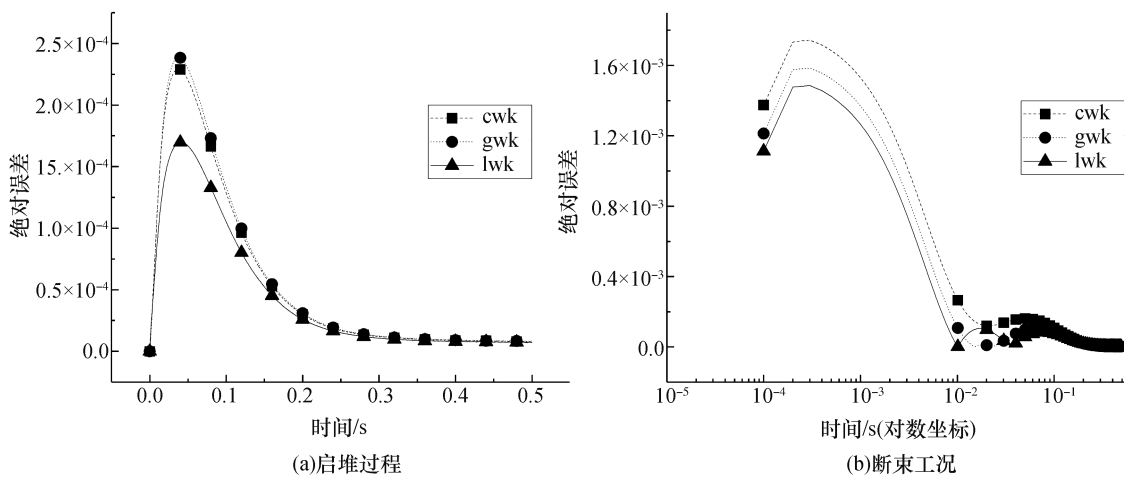


图 5 不同权重函数模型结果误差的绝对值

Fig.5 The absolute value of the errors between results by different weighting functions and the reference

从图 5 中可以看到:对于启堆过程,采用局部稳态权重函数模型的结果误差明显小于采用其他两种权重函数模型的结果误差,尤其在  $0 \sim 0.1$  s 时间段内,局部稳态权重函数的优势非常显著;对于断束情况,尽管在  $0.005$  s 前的部分时段,采用

局部稳态权重函数的结果误差略大于采用全局稳态权重函数模型的结果误差,但总体来说,采用局部稳态权重函数模型比采用其他两种模型更有优势,尤其是对临界权重函数模型的优势非常明显。综上,本文所建立的改进模型——局部稳态权重

函数模型,是非常有效的。

## 5 结 论

本文分别采用临界权重函数模型和全局稳态权重函数模型计算了 IQS 中子动力学结果,通过分析计算值与基准值的误差发现,在临界权重函数模型和全局稳态权重函数模型中,前者适用于启堆过程,后者适用于断束工况;从权重函数的物理意义“次临界堆中子价值”以及外源中子对权重函数影响的滞后现象出发,可以推断,在临界权重函数模型和全局稳态权重函数模型之间,可能存在一种局部稳态权重函数,可以使得计算误差进一步减小。

在局部稳态权重函数模型中,在共轭外源项中引入权重系数  $\omega(r)$  对模型修正,使得局部稳态权重函数模型能满足对“堆芯某一位置是否存在外源中子”和“外源中子能否引发裂变”这两方面意义的描述,其中,归一化的权重系数  $\omega(r)$  通过非增殖介质内中子扩散方程求取,用于描述堆芯某位置存在外源中子的概率。将采用局部稳态权重函数模型的计算误差与其他两种权重函数的计算误差进行对比,结果表明局部稳态权重函数模型能够有效提高 IQS 中子动力学结果的准确性。

### 参考文献:

- [1] 李泽霞,刘小平,朱相丽,等.加速器驱动次临界系统发展态势分析[J].科学观察,2011,6(3):32-43.  
[2] 于涛,谢金森,刘紫静.加速器束流瞬变 ADS 次临界

反应堆动态特性分析方法研究[J].核动力工程,2014(增刊2):48-51.

- [3] 奥特.核反应堆动力学导论[M].北京:原子能出版社,1992:58-61.  
[4] 于涛.加速器驱动次临界系统(ADS)束流瞬变动态响应的微机仿真研究[D].北京:中国原子能科学研究院,2005.  
[5] 于涛,李吉根,凌球,等.ADS 加速器束流瞬变分析程序开发[J].核动力工程,2007,28(2):124-127.  
[6] RINEISKI A, MASCHEK W, RIMPAULT G. Performance of neutron kinetics models for ADS transient analyses [J]. Accapp/adta, 2001, 1: 11-15.  
[7] 宋英明,高庆瑜,徐宇超,等.基于 IQS/MC 方法的 ADS 次临界反应堆中子时空动力学模拟分析[J].原子能科学技术,2017,51(3):450-456.  
[8] RINEISKI A, MASCHEK W. On application of quasistatic and point-kinetics schemes for subcritical systems with-external neutron source [J]. Pharmacopsychiatry, 2003, 5(1):1-12.  
[9] 黄祖洽.核反应堆动力学基础[M].2版.北京:北京大学出版社,2007:175-180.  
[10] 王苏,沈峰.ADS 次临界反应堆的中子共轭方程[J].原子能科学技术,2011,45(7):775-779.  
[11] DULLA S, RAVETTO P. Interpretation of Local Flux Measurements in Subcritical Systems and Reactivity Determination [J]. Science and technology and nuclear installations, 2012(2012):347-359.  
[12] 谢金森.ADS 次临界反应堆物理特性的谐波展开法研究[D].北京:中国原子能科学研究院,2016.

(责任编辑:扶文静)

(上接第 29 页)

- [12] 张海飞,包小军,王佳眉,等.推广的液滴模型及其应用[J].原子核物理评论,2013,30(3):241-259.  
[13] 许昌,任中洲.奇 Z 超重核的禁戒  $\alpha$  衰变(英文)[J].原子核物理评论,2013,30(3):308-311.  
[14] 包小军,张海飞,李君清,等.超重核<sup>292-310</sup>122 同位素链的  $\alpha$  衰变和自发裂变的竞争[J].原子核物理评论,2013,30(3):318-323.  
[15] GURVITZ S A, SEMMES P B, NAZAREWICZ W, et al. Modified two-potential approach to tunneling problems [J]. Physical review A, 2004, 69(4): 361-367.

- [16] 任中洲,许昌.密度依赖的结团模型研究原子核的  $\alpha$  衰变和结团放射性[J].原子核物理评论,2005,22(4):344-350.  
[17] ROYER G. Alpha emission and spontaneous fission through quasi-molecular shapes [J]. Journal of physics g: nuclear and particle physics, 2000, 26(8): 1149-1170.  
[18] AUDI G, KONDEV F G, WANG M, et al. The NU-BASE2016 evaluation of nuclear properties [J]. Chinese physics C, 2017, 41(3): 30001.

(责任编辑:扶文静)