文章编号:1673-0062(2017)03-0077-04

一类具 R-S 积分边界条件的分数阶微分方程的正解

王　琳[1],王会兰[2*],周承芳[2]

(1.湖南工商职业学院 基础部,湖南 衡阳 421001;2.南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:研究了一类包含 p-拉普拉斯算子、并具有 Riemann-stieljes 积分边界条件的分数阶微分方程的正解存在性.通过构造锥上全连续算子,采用单调迭代法得到了系统存在正解的充分条件.

关键词:分数阶微分方程;R-S 积分;边值问题;正解;单调迭代法

中图分类号:O175　　　**文献标志码**:A

The Positive Solutions for a Class of Fractional Differential Equation with Riemann-Stieljes Integral Boundary Condition

WANG Lin[1],WANG Hui-lan[2*],ZHOU Cheng-fang[2]

(1.Basic Department,Hunan Vocational College of Industry and Commerce,Hengyang,Hunan 421001,China;
2.School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China)

Abstract:The paper focuses on the existence of positive solutions for a class of fractional equation,which involves a p-Laplacian operator and Riemann-Stieljes integral boundary condition.By constructing a completely continuous map defined on a cone and employing monotone iterative technique,the sufficient existence conditions are obtained.

key words:fractional order differential equation;Riemann-Stieljes integral;boundary value problem;positive solution;monotone iterative technique

0　引　言

分数阶微分方程相比于整数解微分方程,更能精确地描述具有长时记忆特性的生物、物理等各方面现象.近年,分数阶微分方程边值问题已成为一个重要的研究方向,并有了一些重要成果[1-9],但对于具有 Riemann-Stieljes 积分边界条件的非局部问题的结果并不多见.Jeff Webb 较早地运用拓扑度方法研究了 R-S 积分边值问题[10-11],张运等[12]用混合单调算子的不动点定理

收稿日期:2017-08-01

基金项目:湖南省教育厅科学研究项目(16C425)

作者简介:王　琳(1978-),女,讲师,硕士,主要从事于微分方程的定性理论的研究.E-mail:1668963605@qq.com.

*通讯作者:王会兰,E-mail:huilan07@163.com

得到了一类高阶的包含有 p-Laplace 算子的 R-S 积分边值问题的正解唯一性条件.

受上述文献启发,考虑如下一类非局部的包含有 p-拉普拉斯算子的分数阶微分方程

$$\begin{cases} -D_t^{\beta}(\phi_p(-D_t^{\alpha}x))(t)=f(t,x(t)),t\in(0,1),\\ x(0)=0,D_t^{\alpha}x(0)=D_t^{\alpha}x(1)=0,\\ x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}A(s). \end{cases} \tag{1}$$

其中,$1<\alpha,\beta<2$;D_t^{α},D_t^{β} 为 Riemann-Liouville 分数阶导数,A 是具有界变差的函数,$\int_0^1 x(s)\mathrm{d}A(s)$ 代表 R-S 积分,ϕ_p 是 p-Laplace 算子且满足:$\phi_p=|s|^{p-2}s,p>1,\phi_p^{-1}(s)=\phi_q(s),\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

本文通过构造锥上全连续算子并运用单调迭代法得到了非线性项 f 所应满足的较为一般的充分性条件.

1 预备知识

引理 1[1] 设 $\alpha>0$,$f(t)$ 在[0,1]可积,则

$$I^{\alpha}D^{\alpha}f(t)=f(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n},$$

其中 $c_i\in R(i=1,2,\cdots,n)$,n 为大于或等于 α 的最小正整数,其中 I^{α},D^{α} 为 Riemann-Liouville 分数阶积分、微分算子.

引理 2[10,12] 设 $h\in L^1(0,1)$,$1<\beta\leqslant 2$,边值问题

$$\begin{cases} -D_t^{\beta}v(t)=h(t),t\in(0,1)\\ v(0)=v(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

有唯一解 $v(t)=\int_0^1 G_{\beta}(t,s)h(s)\mathrm{d}s$, 其中

$$G_{\beta}(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\begin{cases} [t(1-s)]^{\beta-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\\ [t(1-s)]^{\beta-1}-(t-s)^{\beta-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

且满足

$$\frac{t^{\beta-1}(1-t)s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\leqslant G_{\beta}(t,s)\leqslant \frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}s(1-s)^{\beta-1}. \tag{3}$$

引理 3[12] 设 $h\in L^1(0,1)$,$1<\alpha\leqslant 2$,则非局部 R-S 积分边值问题

$$\begin{cases} -D_t^{\alpha}x(t)=g(t), & t\in(0,1)\\ x(0)=0, & x(1)=\int_0^1 s(s)\mathrm{d}A(s) \end{cases} \tag{4}$$

有唯一解 $x(t)=\int_0^1 H(t,s)g(s)\mathrm{d}s$,

其中

$$H(t,s)=\frac{t^{\alpha-1}}{1-\Lambda}\bar{G}_A(s)+G_{\alpha}(t,s),$$

$$\bar{G}_A(s)=\int_0^1 G_{\alpha}(t,s)\mathrm{d}A(s),\Lambda=\int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{d}A(s),$$

且存在两常数 a,b 使得

$$at^{\alpha-1}\bar{G}_A(s)\leqslant H(t,s)\leqslant bt^{\alpha-1},s,t\in[0,1].$$

注:不难看出 b 可取 $\frac{2}{\Gamma(\alpha)}$.

引理 4 设 $h\in L^1(0,1)$,且 $h\geqslant 0$,则边值问题

$$\begin{cases} -D_t^{\beta}(\phi_p(-D_t^{\alpha}x))(t)=h(t),t\in(0,1),\\ x(0)=0,D_t^{\alpha}x(0)=D_t^{\alpha}x(1)=0,\\ x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}A(s), \end{cases} \tag{5}$$

有唯一正解

$$x(t)=\int_0^1 H(t,s)\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s.$$

证明 令 $-D_t^{\alpha}x=w,\phi_p(w)=v$,由引理 2 知

$$\begin{cases} -D_t^{\beta}v(t)=h(t),t\in(0,1)\\ v(0)=v(1)=0 \end{cases}$$

有唯一解

$$v(t)=\int_0^1 G_{\beta}(t,s)h(s)\mathrm{d}s.$$

而 $-D_t^{\alpha}x=w=\phi_p^{-1}(v)$,故问题(5)的解满足

$$\begin{cases} -D^{\alpha}x(t)=\phi_q(\int_0^1 G_{\beta}(t,s)h(s)\mathrm{d}s),t\in(0,1)\\ x(0)=0,x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}A(s). \end{cases}$$

又由引理 3 知此方程的解为

$$x(t)=\int_0^1 H(t,s)\phi_q\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

由于 $G_{\beta}>0,h\geqslant 0$,故有

$$x(t)=\int_0^1 H(t,s)\left(\int_0^1 G_{\beta}(s,\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s. \tag{6}$$

假设:(H_0) $f(t,u)$:$[0,1]\times[0,\infty]\to(0,+\infty)$连续,关于两个变量单调不减,存在常数 $0<\delta<\frac{1}{q-1}$ 和 $M>0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,1],u>0}\left(\frac{f(t,u)}{(u+1)^{\delta}}\right)\leqslant M. \tag{7}$$

(H_1)有界变差函数 A 满足:

$$0\leqslant\Lambda\leqslant 1,\text{且 }\forall s\in[0,1],\bar{G}_A(s)\geqslant 0.$$

设巴拿赫空间 $E=C[0,1]$ 具有范数

$$\|x\| = \max\{x(t): t \in [0,1]\}.$$

令子空间 $P=\{x\in E$:存在两个非负数 l_x, L_x 使得 $l_x t^{\alpha-1} \leqslant x(t) \leqslant L_x t^{\alpha-1}, t\in[0,1]\}$,则 P 是 E 上的锥.又定义算子 T 满足:

$$Tx(t)=\int_0^1 H(t,s)\left(\int_0^1 G_\beta(s,\tau)f((\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s.$$

于是,T 在 E 上的不动点就是边值问题(1)的解.

引理 5　假设$(\mathrm{H}_0)\sim(\mathrm{H}_1)$成立,则 $T:P\to P$ 是连续紧算子.

证明 $\forall x\in P$,由(H_0)和引理 2、3 得

$$T(x(t)) \leqslant bt^{\alpha-1}\int_0^1\left(\int_0^1 G_\beta(s,\tau)f(1,x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$bt^{\alpha-1}\int_0^1\left(\int_0^1 G_\beta(s,\tau)M[x(\tau)+1]^\delta\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$bM^{q-1}(1+L_x)^{\delta(q-1)}\left(\int_0^1\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}\tau(1-\tau)^{\beta-1}\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}t^{\alpha-1} \leqslant$$
$$bM^{q-1}(1+L_x)^{\delta(q-1)}t^{\alpha-1} = L_x^* t^{\alpha-1},$$

这里 $L_x^* = bM^{q-1}(1+L_x)^{\delta(q-1)}\left(\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}\right)^{q-1}$.

同时,结合不等式(3)有

$$T(x(t) \geqslant at^{\alpha-1}\int_0^1\overline{G}A(s)\left(\int_0^1 G_\beta(s,\tau)f(0,0)\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s \geqslant$$
$$at^{\alpha-1}[f(0,0)]^{q-1}\int_0^1\overline{G}_A(s)\times$$
$$\left(\int_0^1\frac{s^{\beta-1}(1-s)\tau(1-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s \geqslant$$
$$a\left(\frac{f(0,0)}{\Gamma(\beta+2)}\right)^{q-1}t^{\alpha-1}\times$$
$$\int_0^1\overline{G}_A(s)s^{(\beta-1)(q-1)}(1-s)^{q-1}\mathrm{d}s = l_x^* t^{\alpha-1},$$

其中

$$l_x^* = a\left(\frac{f(0,0)}{\Gamma(\beta+2)}\right)^{q-1}\times\int_0^1\overline{G}_A(s)s^{(\beta-1)(q-1)}(1-s)^{q-1}\mathrm{d}s.$$

于是,$\forall x\in P$,存在两常数 l_x^* 和 L_x^* 使得

$$l_x^* t^{\alpha-1} \leqslant Tx(t) \leqslant L_x^* t^{\alpha-1}, t\in[0,1],$$

即 T 将有界集映为有界集.由 Arzela-Ascoli 定理和 Lebesgue 控制收敛定理即可得 $T:P\to P$ 是连续紧算子.

2　主要结果与证明

定理 6　在假设$(\mathrm{H}_0)\sim(\mathrm{H}_1)$之下,若

$$\gamma < \min\left\{\frac{r}{(f(1,0))^{q-1}},\frac{1}{M^{q-1}}\right\},\tag{8}$$

则边值问题(1)必存在正解,其中

$$\gamma = b\left(\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta+2)}\right)^{q-1}, r == \frac{\gamma M^{q-1}}{1-\gamma M^{q-1}}, b=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}.$$

证明　首先证明存在一常数 r 使得

$$T(P[0,r]) \subset P[0,r].$$

当 $x(t)\equiv 0$ 时,$f(t,0)$关于 t 连续且单调不减,故在 $t\in[0,1]$上必有最大值 $f(1,0)$,为有限数.此时有

$$\|Tx(0)\| = \max_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1 H(t,s)\left(\int_0^1 G_\beta(s,\tau)f(\tau,0)\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s\right\} \leqslant$$
$$b\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}\tau(1-\tau)^{\beta-1}f(1,0)\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$b\left(\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta+2)}\right)^{q-1}(f(1,0))^{q-1} < r.$$

反之,只要 $\|x\|\leqslant r$,则有 $\|Tx(t)\| =$

$$\max_{t\in[0,1]}\left\{\int_0^1 H(t,s)\left\{\int_0^1 G_\beta(s,\tau)f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s\right\} \leqslant$$
$$b\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}\tau(1-\tau)^{\beta-1}M(r+1)^\delta\mathrm{d}\tau\right)^{q-1}\mathrm{d}s \leqslant$$
$$b\left(\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta+2)}\right)^{q-1}(r+1)^{\delta(q-1)} <$$
$$b\left(\frac{\beta-1}{\Gamma(\beta+2)}\right)^{q-1}M^{q-1}(r+1) = r.\tag{9}$$

可见 $T(P[0,r])\subset P[0,r]$.

下证存在一迭代序列$\{u^{(n)}(t)\}$,单调递增且有上界,即有极限.令

$$u^{(0)}(t)=0, u^{(1)}(t)=Tu^{(0)}(t)=0,$$
$$u^{(n)}(t)=Tu^{(n-1)}(t), n=1,2,\cdots.$$

由于 $T(P[0,r])\subset P[0,r]$且 $u^{(0)}(t)=0\in P[0,r]$,故 $u^{(1)}(t)\in P[0,r]$,即有

$$u^{(1)}(t)=Tu^{(0)}(t) \geqslant u^{(0)}(t).$$

同时,由(H_0)知 Tu 关于 u 单调不减,故有

$$u^{(2)}(t)=Tu^{(1)}(t) \geqslant Tu^{(0)}(t)=u^{(t)}(t).$$

运用数学归纳法得到

$$u^{(n)} > u^{(n-1)}, n=1,2,\cdots.$$

因此,存在 $x^*\in P[0,r]$使得

$$u^{(n)}\to x^*.$$

由 T 的连续性及 $u^{(n)}=Tu^{(n-1)}$知 $Tx^*=x^*$,即 x^* 是边值问题(1)的解.

注:　事实上,由于 $x^*\in P[0,r]$,故存在两常数 l_0 和 L_0 使得

$$l_0 t^{\alpha-1} \leqslant x^*(t) \leqslant L_0 t^{\alpha-1}, t\in[0,1]$$

3　结论与例子

本文考虑了含有 p-拉普拉斯算子及 R-S 积分

边界条件的非局部边值问题,引进了更为一般的非线性函数$f(t,u)$.通过运用锥上全连续算子的不动点理论及单调迭代方法,得到边值问题存在正解的充分条件.如果$f(t,u)$关于两变量单调不减,且满足不等式(7)和(8),则问题(1)必存在正解$x^*(t)$.

例 考虑边值问题

$$\begin{cases} -D_t^{\frac{3}{2}}(\phi_{\frac{3}{2}}(-D^{\frac{4}{3}}x))(t)=\ln(2+t+x(t)), \\ t\in(0,1), \\ x(0)=0, D_t^{\frac{4}{3}}x(0)=D_t^{\frac{4}{3}}x(1)=0, \\ x(1)=\int_0^1 x(s)\mathrm{d}A(s), \end{cases}$$

其中

$$A(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,\frac{1}{2}], \\ 2, & t\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}], \\ 1, & t\in[\frac{3}{4},1]. \end{cases}$$

对应方程(1)有:$\beta=\frac{3}{2},\alpha=\frac{4}{3},p=\frac{3}{2}f(t,u)=\ln(2+t+u)$.不难验证:

$$\Lambda=\int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{d}A(s)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<1$$

且$\forall s\in[0,1]$,$\bar{G}_A(s)\geqslant 0$.经计算得$q=\frac{5}{3}$,$b=\frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})}=2.239\ 5$,$\Gamma(\beta+2)=\Gamma(\frac{7}{2})\approx 3.323\ 4$,$\gamma\approx 0.633\ 5$,取$\delta=1$,则$M=0.55$,$r=0.739\ 9$,$[f(1,0)]^{\frac{2}{3}}=(\ln 3)^{\frac{2}{3}}=1.065\ 3$,$\gamma M^{\frac{2}{3}}=0.425\ 3<1$.

显然$\gamma\approx 0.633\ 5<\frac{0.739\ 9}{1.065\ 3}\approx 0.694\ 6$.定理中的条件均满足,故在区间[0,0.7399]上存在正解.

参考文献:

[1] MILLER K, ROSS B. An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: Wiley, 1993.

[2] TARASOV V.Lattice model of fractional gradient and integral elasticity: long-range interaction of Grünwald-Letnikov- Riesz type[J]. Mechanics of Material, 2014, 70: 106-114.

[3] PAOLA M, PINNOLA F, ZINGALE M.Fractional differential equations and related exact mechanical models [J].Computers & Mathematics with Applications, 2013, 66(5): 608-620.

[4] BAI Z, LV H.Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 311(2): 495-505.

[5] ZHOU Y, JIAO F.Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(5): 4465-4475.

[6] JIANG W. Solvability of fractional differential equations with p-Laplacian at resonance[J]. Applied Mathematics & Computation, 2015, 260(C): 48-56.

[7] 姜小霞,欧阳自根,彭湘凌.非线性分数阶微分方程耦合系统三点边值问题解的存在性[J].南华大学学报(自然科学版),2015,29(1):94-99.

[8] KONG L. Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, 2010, 72(5): 2628-2638.

[9] TENG R, LI S, ZHANG X, et al. Maximum and minimum solutions for a nonlocal p-Laplacian fractional differential system from eco-economical processes [J]. Boundary Value Problems, 2017, 118(1): 118.

[10] WEBB J R L. Nonlocal conjugate type boundary value problems of higher order[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications, 2009, 71(5/6): 1933-1940.

[11] WEBB J R L, INFANTE G. Nonlocal boundary value problems of arbitrary order[J]. London Mathematical Society, 2009, 79(2): 238-258.

[12] ZHANG X, HAN Y. Existence and uniqueness of positive solutions for higher order nonlocal fractional differen tial equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25 (3): 555-560.

[13] ZHANG X, LIU L, WU Y. The uniqueness of positive solution for a fractional order model of turbulent flow in a porous medium [J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 37: 26-33.