文章编号:1673-0062(2017)03-0072-06

一类 2n 阶非线性奇异边值问题的对称正解

胡　萍,王会兰,周承芳,欧阳自根*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:考虑一类 2n 阶非线性奇异边值问题.应用不动点定理,在非线性条件下给出合适的条件并获得对称正解.将一些最近的结果进行扩展和改进.此外,还给出了一个示例来演示新的结果.

关键词:奇异边值问题;对称正解;极值点

中图分类号:O175.8　　　**文献标志码**:A

Symmetric Positive Solutions for a Class of 2n-order Nonlinear Singular Boundary Value Problems

HU Ping, WANG Hui-lan, ZHOU Cheng-fang, OUYANG Zi-gen *

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper deals with a class of 2n-order nonlinear singular boundary value problems. Applying a fixed-point theorem, the symmetric positive solution is obtained under some suitable conditions imposed on the nonlinearity. Some recent results are extended and improved. Moreover, an example is also given to demonstrate the new results.

key words: singular boundary value problems; symmetric positive solutions; extreme point

0　引　言

近年来,高阶非线性奇异边值问题引起了相当的关注[1-6],一些学者致力于寻找对称的正解.例如,Y. Luo[1] 和 X. Lin[2] 采用迭代方法,研究了以下 $2n$ 阶非线性奇异边值问题(BVPs 的简称)

$$\begin{cases} (-1)nu^{(2n)}(t) = f(t,u(t)), t \in (0,1) \\ u^{(2k)}(0) = u^{(2k)}(1) = 0, k = 0,1,2,\cdots,n-1, \end{cases} \tag{1}$$

其中:$f(t,u)$ 相对于 u 是非递增或非递减的, $n \geq 2$, $f(t,u) \in C((0,1) \times [0,+\infty), [0,+\infty))$,他们进一步对 $f(t,u)$ 进行以下假设:

(H)f: $(0,1) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续的.当 $(t,u) \in (0,1) \times [0,\infty)$, $f(t,u)$ 在 t 中是对称的,即 f 满足 $f(1-t,u) = f(t,u)$, $t \in (0,1)$.

(H_A) 当 $(t,u) \in (0,1) \times [0,\infty)$, $f(t,u)$ 在 u 上是非减的,并且存在常数 $\lambda_1 \in (0,1)$ 使得

收稿日期:2017-07-16

作者简介:胡　萍(1991-),女,硕士研究生,主要从事微分方程与动力系统方向的研究.E-mail:912079577@qq.com.
*通讯作者:欧阳自根,E-mail:zigenouyang@163.com

$$\sigma_1^{\lambda_1} f(t,u) \leqslant f(t,\sigma_1 u)\ ,当\ \sigma_1 \in (0,1].$$

(H_B) 当 $(t,u) \in (0,1)\times[0,\infty)$,$f(t,u)$ 在 u 上是非增的,并且存在常数 $\lambda_2 \in (0,1)$ 使得

$$f(t,\sigma_2 u) \leqslant \sigma_2^{\lambda_2} f(t,u)\ ,当\ \sigma_2 \in (0,1].$$

将文献[1]和文献[2]中主要结论复述如下:

定理 1[1]　假设(H) 和(H_A)成立,BVPs(1)至少具有一个对称正解当且仅当

$$0 < \int_0^1 f(t,e(t))\,\mathrm{d}t < \infty. \qquad (2)$$

定理 2[2]　假设(H) 和(H_B)成立,BVPs(1)至少具有一个对称正解当且仅当式(2)成立.

定义 1　u^* 是 BVPs(1)的一个对称正解,当且仅当 u^* 是 BVPs(1)的解和满足

$$u^*(t) = u^*(1-t)\ ,t \in [0,1],$$
$$u^*(t) > 0, t \in (0,1).$$

考虑另外一种情况,对 u 来说, $f(t,u)$ 不需要在 $[0,\infty)$ 单调.更进一步地说,满足以下条件:

($\widetilde{\mathrm{H}}$) $f:(0,1)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的.当 $(t,u)\in(0,1)\times[0,\infty)$ 时, $f(t,u)$ 关于 t 对称,即 f 满足

$$f(1-t,u) = f(t,u)\ ,t \in [0,1]. \qquad (3)$$

此外, $f(t,u)$ 相对于 u 有唯一的极值点 $\widetilde{u}(t)$,当 $(t,u)\in(0,1)\times[0,\infty)$ 时,并且存在数 $L > 1$ 使得

$$0 \leqslant Le(t) \leqslant \widetilde{u}(t)\ ,t \in (0,1).$$

(H_1) $\widetilde{u}$ 是 $f(t,u)$ 关于 u 的一个极大值点,对任意 $t\in(0,1)$ 时.当 $(t,u)\in(0,1)\times[0,\widetilde{u})$,存在一个常数 $\lambda_1\in(0,1)$ 使得

$$\sigma_1^{\lambda_1} f(t,u) \leqslant f(t,\sigma_1 u)\ 当\ \sigma_1 \in (0,1] \qquad (4)$$

以及,

$$0 < \int_0^1 f(s,e(s))\,\mathrm{d}s \leqslant 4^{n-1} L^{1+\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}, \qquad (5)$$

其中 L 是定义在($\widetilde{\mathrm{H}}$)上的.

(H_2) $\widetilde{u}$ 是 $f(t,u)$ 关于 u 的一个极小值点,对任意 $t\in(0,1)$ 时.当 $(t,u)\in(0,1)\times[0,\widetilde{u})$,存在一个常数 $\lambda_2\in(0,1)$ 使得

$$f(t,\sigma_2 u) \leqslant \sigma_2^{\lambda_2} f(t,u)\ 当\ \sigma_2 \in (0,1] \qquad (6)$$

以及,

$$0 < \int_0^1 f(s,e(s))\,\mathrm{d}s \leqslant 4^{n-1} L^{1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}}, \qquad (7)$$

其中 L 是定义在($\widetilde{\mathrm{H}}$)上的.

1　主要结果

现在给出主要结果:

定理 3　假设($\widetilde{\mathrm{H}}$)和(H_1)成立.那么 BVPs(1)至少具有一个对称正解.

定理 4　假设($\widetilde{\mathrm{H}}$)和(H_2)成立.那么 BVPs(1)至少具有一个对称正解.

注 1:从条件(H_A)和(H_B)可以看出函数 $f(t,u)$ 在 $[0,+\infty)$ 被限制为单调的.在本文中,只需要函数 $f(t,u)$ 对于 u 有唯一的极值点.如果函数 $f(t,u)$ 相对于 $u\in(0,\infty)$ 是单调的,那么可以认为极点 $\widetilde{u}$ 是趋于 ∞,这意味着 $\widetilde{\mathrm{H}}$ 中定义的常数 L 可能是 ∞.因此, 式(5) 和 式(7) 可以写为

$$0 < \int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s) f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < \int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s) f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < \infty, \qquad (8)$$

这意味着式 (2) 成立.也就是说,如果考虑到无限大的极值点,本文的条件就是 (H_A) 和 (H_B).因此,定理 3 和定理 4 在此意义上拓展了定理 1 和定理 2.

2　初步结果

现在定义一类格林函数

$$G_i(t,s) = \int_0^1 G(t,\tau)\, G_{i-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau, i = 2,3,\cdots,n, \qquad (9)$$

其中

$$G_1(t,s) = G(t,s) = \begin{cases} t(1-s)\ ,0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1, \\ s(1-t)\ ,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1, \end{cases} \qquad (10)$$

以及

$$e(t) = G(t,t) = t(1-t)\ ,t \in [0,1] \qquad (11)$$

因此,由文献[2]可得如果 $u(t)$ 是 BVPs(1)的一个解,则也是式(12)的解.

$$u(t) = \int_0^1 G_n(t,s) f(s,u(s))\,\mathrm{d}s. \qquad (12)$$

为了证明主要结果,引入以下引理.

引理 1[1]　对任意 $t,s \in (0,1)$,有

$$e(t)e(s) \leqslant G(t,s) \leqslant G(t,t) = e(t) \leqslant \frac{1}{4}, \qquad (13)$$

以及

$$G_n(1-t,1-s) = G_n(t,s)\ ,n \geqslant 1. \qquad (14)$$

引理 2 假设 $0 < \lambda < 1$.则

$$1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda} > 0$$

以及

$$\frac{1}{2} \leqslant 1 + 2\lambda - 2\sqrt{\lambda} \leqslant 1. \tag{15}$$

证明 令

$g_1(\lambda) = 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}, g_2(\lambda) = 1 + 2\lambda - 2\sqrt{\lambda}$

那么,对任意 $\lambda \in (0,1)$,有

$$g'_1(\lambda) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} < 0 \text{ 和} g'_2(\lambda) = 2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \tag{16}$$

其中当 $\lambda \in (0,1)$ 时, $g_1(\lambda)$ 是递减的.因此,对任意 $\lambda \in (0,1)$ 有 $g_1(\lambda) > 0$,因为 $g_1(1) = 0$.

另一方面,由 式(16) 可以得出 $\lambda = \frac{1}{4}$ 是 $g_2(\lambda)$ 的唯一最小点,且 $g_2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $g_2(0) = g_2(1) = 1$,表示式 (15) 成立.证明完毕.

引理 3 假设 $(\widetilde{\mathrm{H}})$ 和 (H_1) 成立.则

$$\int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < L^{1+\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}, \tag{17}$$

并存在正常数 $l_1 < 1$ 使得

$$l_1^{\,1+\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}} < \int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s) \times f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau, \tag{18}$$

其中 L,λ_1 是分别定义在 $(\widetilde{\mathrm{H}})$ 和 (H_1) 上的.

证明 从式 (9) ~ 式(11), 式(5) 和 式(13) 可以得出

$$\int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f(s,e(s))\cdot\left(\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 f(s,e(s))\,\mathrm{d}s \leqslant L^{1+\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}$$

表示 式(17) 成立.

从 式(9) ~ 式(11) 和 式(13) 可以得到:

$$G_2(t,s) \geqslant \int_0^1 e(\tau)e(t)e(\tau)e(s)\,\mathrm{d}\tau = e(t)e(s)\int_0^1 e^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = e(t)e(s)\int_0^1 \tau^2(1-\tau)^2\mathrm{d}\tau = \frac{1}{30}e(t)e(s).$$

通过数学归纳法,可得:

$$G_{n-1}(t,s) \geqslant \left(\frac{1}{30}\right)^{n-2} e(t)e(s).$$

则

$$\int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \geqslant \left(\frac{1}{30}\right)^{n-2}\int_0^1 e^2(\tau)\int_0^1 e(s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \left(\frac{1}{30}\right)^{n-1}\int_0^1 e(s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \tag{19}$$

由式 (5) 很容易得到:

$$\int_0^1 e(s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s > 0$$

令

$$0 < l_1 < \min\left\{1, \left[\left(\frac{1}{30}\right)^{n-1}\int_0^1 e(s) \times f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{1+\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}}\right\}. \tag{20}$$

则,从 式(19) 可以得到式 (18) 成立.

引理 4 假设 $(\widetilde{\mathrm{H}})$ 和(H_2)成立.那么

$$\int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < L^{1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}},$$

并且存在正常数 $l_2 < 1$ 使得

$$l_2^{\,1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}} < \int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,$$

其中 L,λ_2 是分别定义在$(\widetilde{\mathrm{H}})$ 和(H_2)上的.

证明 从式 (9) ~ 式(11), 式(7) 和式(13) 可以得出

$$\int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f(s,e(s))\cdot\left(\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}\int_0^1 f(s,e(s))\,\mathrm{d}s \leqslant L^{1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}}$$

表示 $\int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < L^{1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}}$ 成立.

从式(9)~式(11)和式(13)可以得到:

$$G_2(t,s) \geqslant \int_0^1 e(\tau)e(t)e(\tau)e(s)\,\mathrm{d}\tau = e(t)e(s)\int_0^1 e^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = e(t)e(s)\int_0^1 \tau^2(1-\tau)^2\mathrm{d}\tau = \frac{1}{30}e(t)e(s).$$

通过数学归纳法,可得:

$$G_{n-1}(t,s) \geqslant \left(\frac{1}{30}\right)^{n-2} e(t)e(s).$$

则

$$\int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \geqslant$$
$$\left(\frac{1}{30}\right)^{n-2}\int_0^1 e^2(\tau)\int_0^1 e(s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau =$$
$$\left(\frac{1}{30}\right)^{n-1}\int_0^1 e(s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

由式 (5) 很容易得到:

$$\int_0^1 e(s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s > 0$$

令

$$0 < l_2 < \min\left\{1,\left[\left(\frac{1}{30}\right)^{n-1}\int_0^1 e(s)\times f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}}}\right\}.$$

则, $l_2^{1+\lambda_2-2\sqrt{\lambda_2}} < \int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$, 成立.完成了证明.

3　结果的证明

令 E 为 Banach 空间 $C^{(2n)}[0,1]$ 以及定义

$$P_1=\left\{\begin{array}{c}u\in E:u(0)=u(1)=0,\\ u(t)\geqslant 0,t\in(0,1),\\ u(t)=u(1-t),\\ l_1e(t)\leqslant u(t)\leqslant Le(t),\\ t\in[0,1]\end{array}\right\},\quad(21)$$

其中 L,l_1 分别定义在$(\widetilde{\mathrm{H}})$和引理 3 上.很显然集合 P_1 是非空的.实际上,函数 $e(t)\in P_1$.

由于定理 4 的证明与定理 3 最相似,所以只给出定理 3 的证明的细节.

定理 3 的证明: 定义算子 $T:E\to E$ 有

$$Tu(t)=\int_0^1 G_n(t,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s,\quad(22)$$

其中 $G_n(t,s)$ 是由 式(9) 和 式(10) 定义的.如果能证明 式(22) 有不动点 $u(t)$,那么 BVPs(1)至少具有一个对称正解.因此将证明分为以下两个步骤.

第一步:首先证明算子 $T:P_1\to P_1$ 是完全连续的.

很显然当 $u\in P_1$ 时, $Tu\in E$,有 $Tu(0)=Tu(1)=0$,以及 $Tu(t)>0,t\in(0,1)$.

由 式(3),式(14) 和 式(22) ,以及参考文献 [1] 中 (3.7) 的方法,可以得

$$Tu(1-t)=Tu(t),t\in[0,1].$$

对任意 $u\in P_1$,由式(9), 式(6) , 式(5) , 式(15) , 式(22) ,$(\widetilde{\mathrm{H}})$ 和 (H_1) 可以得到

$$Tu(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,\tau)\,G_{n-1}(\tau,s)\,\mathrm{d}\tau f(s,u(s))\,\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\int_0^1 G(t,t)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$\int_0^1 e(t)\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,Le(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$L^{\lambda_1}\int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau e(t) \leqslant$$
$$L^{1+2\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}e(t)\leqslant Le(t),t\in[0,1].$$

同理,由式 (19) 和式 (20) 可以得到

$$Tu(t)\geqslant l_1^{1+2\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}e(t)\geqslant l_1e(t),\quad t\in[0,1].\quad(23)$$

因此, $T:P_1\to P_1$.通过一个标准的方法,可以证明 $T:P_1\to P_1$ 是完全连续的.

第二步: 证明算子 $Tu(t)$ 有一个不动点 $u(t)\in P_1$.

令

$$\delta=l_1^{\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_1}}},\gamma=L^{\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_1}}}\quad(24)$$

则

$$\delta>l_1,\gamma<L.$$

定义

$$u_0=\delta e(t),v_0=\gamma e(t),$$
$$u_n=Tu_{n-1},v_n=Tv_{n-1},n=1,2\cdots.$$

则

$$l_1e(t)\leqslant u_0\leqslant v_0\leqslant Le(t).$$

可说明

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots u_n\cdots v_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0\quad(25)$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0\quad(26)$$

由式 (4) ,式(19) ,式(20) ,式(22) ,式(23) 和式 (24) 可以得到

$$u_1=Tu_0(t)=\int_0^1 G_n(t,s)f(s,\delta e(s))\,\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\delta^{\lambda_1}\int_0^1 G_n(t,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\delta^{\lambda_1}\int_0^1 e(\tau)\int_0^1 G_{n-1}(t,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau e(t)\geqslant$$
$$\delta^{\lambda_1}\,l_1^{1+\lambda_1-2\sqrt{\lambda_1}}e(t)=$$
$$\delta^{\lambda_1}\,\delta^{1-\lambda_1}e(t)=u_0\geqslant l_1e(t)$$

同理,可以证明

$$u_1\leqslant v_0\leqslant Le(t)\leqslant\tilde{u},$$

这意味着 $u_1 \in P_1$. 由于在 $u \in (0,\tilde{u})$ 时, $f(t,u)$ 是非减的,则

$$u_2 = Tu_1(t) = \int_0^1 G_n(t,s)f(s,u_1(s))\,\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 G_n(t,s)f(s,u_0(s))\,\mathrm{d}s = u_1.$$

同理,可得

$$u_k \in P_1, u_k \geqslant u_{k-1}, k = 1,2,\cdots, \quad (27)$$

$$v_k \in P_1, v_k \leqslant v_{k-1}, k = 1,2,\cdots. \quad (28)$$

另一方面, 由式 (27) , 式(28) 以及数学归纳法和 $f(t,u)$ 在 $u \in [0,\tilde{u}]$ 上的单调性,可得:

$$u_n \leqslant v_n, n = 1,2,\cdots.$$

因此,式(25)成立.令 $c_0 = \dfrac{\delta}{\gamma}$,则, $0 < c_0 < 1$. 参考文献[1]中(3.15)的方法,可以得到

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant (1 - c_0^{\lambda_1^n})\gamma e(t) \to 0, n \to \infty.$$

因此, 式(25) 和式 (26) 成立,表示存在一个 $u^* \in P_1$ 使得 $u^*(t) = Tu^*(t)$,也正好是 BVPs (1)的一个对称正解.证明完毕.

4 例 子

举例来说明主要结果.

例 1 考虑以下边值问题

$$\begin{cases} -u^{(6)}(t) = t(1-t)\dfrac{u^{\frac{1}{4}}(t)}{1+u^2(t)}, t \in (0,1) \\ u^{(2i)}(0) = u^{(2i)}(1) = 0, i = 0,1,2, \end{cases}, \quad (29)$$

其中

$$f(t,u) = t(1-t)\frac{u^{\frac{1}{4}}(t)}{1+u^2(t)}, t \in (0,1). \quad (30)$$

很容易证明 $\tilde{u} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ 是式 (30) 的一个最大点, 并且函数具有最大值 $t(1-t)\dfrac{7^{\frac{7}{8}}}{8}$. $f(t,u)$ 在 $u \in \left(0,\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$ 上是单调递增的, 在 $u \in \left(\dfrac{\sqrt{7}}{7},\infty\right)$ 是单调递减的.取 $\lambda = \dfrac{1}{4}$,则

$$f(t,\sigma u) = t(1-t)\frac{\sigma^{\frac{1}{4}}u^{\frac{1}{4}}}{1+\sigma^2 u^2} \geqslant t(1-t)\frac{\sigma^{\frac{1}{4}}u^{\frac{1}{4}}}{1+u^2} = \sigma^{\frac{1}{4}}f(t,u)$$

其中 $u \in \left(0,\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$, $\sigma \in (0,1)$.由引理 1 可令 $L = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$,则 $Le(t) \leqslant \tilde{u}$,使得$(\tilde{\mathrm{H}})$ 成立.很容易证明

$$0 < \int_0^1\int_0^1 G_{n-1}(\tau,s)f(s,e(s))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \leqslant \int_0^1\int_0^1 s^{\frac{5}{4}}(1-s)^{\frac{5}{4}}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau < \frac{4}{9} < L^{1+\lambda-2\sqrt{\lambda}},$$

使得(H_1)成立.由定理 3 可知,边值问题 29 至少具有一个对称正解.同理,如果 $g(x,u) = -f(x,u)$,那么,通过定理 4,也可获得了边值问题 29 至少具有一个对称的正解.

参考文献:

[1] LUO Y,LUO Z.A necessary and sufficient condition for the existence of symmetric positive solutions of higher-order boundary value problems[J].Applied Mathematics Letters, 2012,25(5):862-868.

[2] LIN X,ZHAO Z.Existence and uniqueness of symmetric positive solutions of 2n-order nonlinear singular boundary value problems[J].Applied Mathematics Letters,2013, 26(7):692-698.

[3] LUO Y.A necessary and sufficient condition for pseudo-symmetric positive solutions of boundary value problems [J].Journal of Mathematics Research,2014,6(4): 149-156.

[4] JIANG J,LIU L,WU Y.Symmetric positive solutions to singular system with multi-point coupled boundary conditions[J].Applied Mathematics and Computation,2013, 220(4):536-548.

[5] 王峰,张辉明.一类高阶奇异非线性共轭边值问题的正解[J].唐山师范学院学报,2016,38(5):7-9.

[6] 李秀珍,赵增勤.一类 2n 阶次线性奇异边值问题的正解[J].系统科学与数学,2010,30(3):379-391.