文章编号:1673-0062(2017)02-0036-03

分次自入射代数 smash 积的箭图

黄宠辉,郑立景*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:箭图的刻画是表示理论的关键问题.对于给定的分次自入射代数,刻画了它和循环群的 smash 积的箭图和关系.

关键词:分次自入射代数;smash 积;箭图

中图分类号:O154.1　　**文献标志码**:A

On the Quiver of Smash Product of Graded Self-injective Algebras

HUANG Chong-hui, ZHENG Li-jing*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The characterization of the quivers is a central problem in the representation theory. This paper, gives the quivers and relations of the smash products of a given graded self-injective algebra with a cyclic group.

key words: graded self-injective algebras; smash product; quivers

0　引　言

代数的 smash 积保持代数的许多重要的不变量,如复杂度、整体维数、稳定维数[1]等.是故, smash 积受到越来越多的表示论专家的关注,比如 Dugas 利用 smash 积证明了周期猜想在表示有限型的情况[2];郭晋云教授利用 smash 积构造了与原代数导出等价的代数[3].然而,由于 smash 积的复杂性,对于其箭图及关系的刻画还不甚明了.

从 Loewy 长度为 $l+1$ 分次自入射代数 Λ 出发,刻画了它和 $l+1$ 阶循环群 Z_{l+1} 的 smash 积的箭图及关系,推广了郭晋云教授在文献[3]中的部分结果.

1　预备知识

本文中,令 k 是一个代数闭域.设 Λ 是一个k-代数,称 Λ 为一个分次代数,如果作为向量空间 $\Lambda=\bigoplus_{t=0}^{\infty}\Lambda_t$ 且满足下面的条件:(1) Λ 由 Λ_0 和 Λ_1 生成;(2) $\Lambda_0=\bigoplus_{i=0}^{n}ke_i$ 且 $1=e_1+\cdots+e_n$.这样, $\Lambda_0\cong k^n$ 且对于任意的非负整数 s,t,都有 $\Lambda_s\Lambda_t=\Lambda_{s+t}$.

收稿日期:2017-03-06

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(2016JJ6124);衡阳市科技局基金资助项目(2015KJ14)

作者简介:黄宠辉(1978-),男,副教授,博士,主要从事代数表示论方向的研究.E-mail: huangchonghui@usc.edu.cn.
*通讯作者:郑立景, zhenglijing817@163.com

用 $Q=(Q_0,Q_1)$ 表示箭图,其中 Q_0 表示顶点集,Q_1 表示箭向集.对于给定的分次代数 Λ,由 Gabriel 定理,存在唯一的箭图 $Q=(Q_0,Q_1)$,使得 $\Lambda\cong kQ/(\rho)$,其中 ρ 是理想的生成集.

称(Q,ρ)为分次代数的界定箭图.如果 Q 中的路在 $kQ/(\rho)$ 中的像非零,则称之为界定路.称该界定箭图为齐次的,若对于生成集 ρ 中任意给的一个元素,该元素中的路的长度都相同.

给定一个正整数 l,对于一个齐次界定箭图 (Q,ρ),称它为 Loewy 长度为 $l+1$ 的稳定平移箭图,如果它满足如下条件:

1)Q 中的极大界定路的长度都为 l;

2)Q 中的顶点集 Q_0 上有一个置换 τ;

3)从同一个顶点出发的任意两条极大界定路都是线性相关的;

4)对于 Q_0 中的每一个顶点 i,都有一条从 $\tau(i)$到 i 的极大界定路,且对于异于 i 的顶点 j,不存在从 $\tau(i)$到 j 的长度为 l 的界定路.

称如上的 τ 为 Nakayama 平移.对于一个 Loewy 长度为 $l+1$ 分次代数 Λ,它的箭图为 Q,则它是自入射代数的充要条件为 Q 是 Loewy 长度为 $l+1$ 的稳定平移箭图,且其上的 Nakayama 平移是由 Λ 的 Nakayama 函子诱导的.

2　Smash 积的界定箭图

令 G 是一个有限群,Λ 是 G-分次代数,则 Λ 与 G 的 smash 积 $\Lambda\#k[G]^*=\bigoplus_{g\in G}\Lambda p_g$ 是一个 k-代数,其乘法定义为 $ap_gbp_h=ab_{gh^{-1}}ph$,其中 a,b 是 Λ 中任意的元素[4].例如,令 Λ 是与邓肯图 L_n 相对应的预投射代数,则 Λ 与 2 阶循环群 Z_2 的 smash 积 $\Lambda\#k[Z_2]^*$ 恰好是邓肯图 A_{2n}的预投射代数.

令(Q,ρ)是一个 Loewy 长度为 $l+1$ 的稳定平移箭图,构造一个新的箭图 $\overline{Q}=(\overline{Q_0},\overline{Q_1})$ 如下.

顶点集:

$$\overline{Q_0}=\{(i,n)\mid i\in Q_0,n\in Z_{l+1}\}$$

箭向集:

$$\overline{Q_1}=\{\alpha[n]:(i,n)\to(j,n+1)\mid \alpha: i\to j\in Q_1,n\in Z_{l+1}\}.$$

如果 $p=\alpha_s\cdots\alpha_1$ 是 Q 中的一条路,对于 Z_{l+1}中的每一个 n,定义.定义 $p[n]=\alpha_s[n+s-1]\cdots\alpha_1[n]$关系集如下.

$$\bar{\rho}=\{\zeta[n]\mid \zeta\in\rho,n\in Z_{l+1}\},$$

其中 $\zeta[n]=\sum_i a_ip_i[n]$,此处 $\zeta=\sum_i a_ip_i\in\rho$.于是,若$(Q,\rho)$是一个有限箭图,则 $\overline{Q}=(\overline{Q_0},\overline{Q_1},\bar{\rho})$亦为有限的.

令 $\Lambda=\Lambda_0\oplus\cdots\oplus\Lambda_l$ 是一个 Loewy 长度为 $l+1$ 的分次自入射代数,而(Q,ρ)是它的界定箭图.不难知道,Λ 是一个 Z_{l+1}-分次代数.Λ 和 Z_{l+1} 的 smash 积 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$是 Λ 的自由模,它的基$Z_{l+1}^*=\{\delta_k\mid k\in Z_{l+1}\}$,其乘法定义为

$$x\delta_ky\delta_l=xy_{k-l}\delta_m,$$

此处,$x,y\in\Lambda$,$y=\sum_{t=0}^{l}y_t$,$y_t\in\Lambda_t$.

定理　设 Λ 是一个 Loewy 长度为 $l+1$ 的分次自入射代数,其稳定平移箭图为(Q,ρ),其上的 Nakyama 平移为 τ,则 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$ 是一个 Loewy 长度为 $l+1$ 的分次自入射代数.且下列断言成立.

(1)$\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$的界定箭图为$(\overline{Q},\bar{\rho})$.

(2)$\overline{Q}$ 是稳定平移箭图.

(3)记 $\bar{\tau}$ 为 $\overline{Q}$ 的 Nakayama 平移,则 $\bar{\tau}(i,k)=(\tau i,k-l)$.

证明　由文献[3],$\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$是一个 Loewy 长度为 $l+1$ 的分次自入射代数.于是它的界定箭图是 Loewy 长度为 $l+1$ 的稳定平移箭图[3].下面说明$(\overline{Q},\bar{\rho})$是 smash 积的界定箭图.

由于 δ_k 和 Λ_0 中的元素可交换,故如$\{e_i\mid i\in Q_0\}$是 Λ 的本原正交幂等元的完全集,必有$\{e_i\delta_k\mid i\in Q_0,k\in Z_{l+1}\}$是 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$的本原正交幂等元的完全集.

令 $0\neq x\in e_j\Lambda e_i$ 是 Λ_1 中次数为 1 的齐次元素,则对于 $0\leqslant m,m',m''\leqslant l$,我们有 $e_{j'}\delta_mx\delta_{m'}e_{i'}\delta_{m''}=e_{j'}xe_{i'}\delta_{m''}\neq0$ 当且仅当 $i=i'$,$j=j'$,$m'=m''$,且 $m=m'+1$.由$(\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_l)k[Z_{l+1}]^*$是 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$的幂零理想,且 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*/(\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_l)k[Z_{l+1}]^*$是半单的.记元素 $e_i\delta_l$ 为(i,l),则对于 $\alpha: i\to j\in Q_i$,$\alpha\delta_k:=\alpha[k]:(i,k)\to(j,k+1)$是 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$箭图中的一条箭向.这表明 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$的 Gabriel 箭图恰为 $\overline{Q}=(\overline{Q_0},\overline{Q_1})$.

现设 $\alpha_l\cdots\alpha_1$ 是 Q 中的一条路,则 $\alpha_l[k+l-1]\cdots\alpha_2[k+1]\cdots\alpha_2[k+1]\alpha_1[k]=\alpha_l\cdots\alpha_1[k]$是 $\overline{Q}$ 中的一条路.并且,Λ 中的元素 $\sum a_sp_s=0$,$a_s\in k$,p_s 是 Q 中的路,当且仅当 $\sum a_sp_s[k]=0$,$k=0,1,\cdots l$.故,Q 中的路 $\alpha_l\cdots\alpha_1$是一条极大界定路的充要条件是对于所有的 $k\in Z_{l+1}$,

(下转第 46 页)

数值模拟表明:当时滞小于临界时滞 τ_0 时,系统是稳定的;当时滞大于临界时滞 τ_0 时,系统是不稳定的;系统(8)在临界时滞 τ_0 处出现 Hopf 分岔.进一步,当时滞大于临界时滞较远时,激光系统从 Hopf 分岔走向混沌.

参考文献:

[1] LV L,DU Z,LUAN L.Control of period doubling bifurcation and chaos in acousto optical bistable system by the feedback of states[J].Acta Photonica Sinica,2004,33(11):1401-1404.

[2] LV L,LUAN L,DU Z.A valid method of controlling chaos in single mode laser Haken Lorenz system[J].Acta Photonica Sinica,2004,33(4):416-419.

[3] LV L,LI CR,LU B Q.Theoretical research of chaotic behavior about single mode laser[J].Optical Technology,1998(2):35-43.

[4] LV L,SHANG J Y,ZHU J B,et al.Study on spatiotemporal chaos network synchronization of the laser Maxwell-Bloch equation[J].Acta Phys. Sin.,2012,61(14):140504.

[5] SIMONOV A N.System for stabilisation of the intensity of single mode He-Ne laser radiation[J].Quantum Electronics,1997,27(9):809-812.

[6] LI G.Chaos synchronization between single mode laser Lorenz system and 3D chaotic system[J].Acta Photonica Sinica,2007,36(5):808-811.

[7] LUAN L,FENG L J.Chaotic anti-control using single-mode laser Lorenz system[J].Acta Photonica Sinica,2007,36(10):1833-1836.

[8] HASSARD B,KAZARINO D,WAN Y.Theory and applications of Hopf bifurcation[M].Cambridge:Cambridge University Press,1981.

[9] LIAO M,TANG X,XU C.8[J].Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.,2012,17(1):183-194.

[10] MOIOLA J L,CHEN G R.Frequency domain approach to computational analysis of bifurcations and limit cycles:a tutorial[J].Int. J. Bifur. Chaos,1993,3(4):843-867.

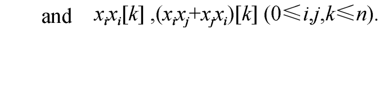
[11] MOIOLA J L,CHEN G R.Hopf bifurcation analysis:a frequency domain approach[M].Singapore:World Scientific,1996.

(上接第 37 页)

都有 $\alpha_l\cdots\alpha_1[k]$ 是 $\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$ 中的一条极大界定路.因此,$\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$ 中起于 $(\tau i,k)$ 的极大界定路,必终止于 $(i,k+l)$,$k\in Z_{l+1}$.特别地,$\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$ 中起于同一个顶点的极大界定路终止的顶点相同且这样的路都是线性相关的.

定义 $\bar{\tau}(i,k)=(\tau i,k-l)$,由如上讨论可知它诱导了 $\bar{Q}$ 的一个自同构.这表明,$\Lambda\#k[Z_{l+1}]^*$ 的关系集 $\bar{\rho}=\{\zeta[n]|\zeta\in\rho,n\in Z_{l+1}\}$,且 $\bar{Q}=(\overline{Q_0},\overline{Q_1},\bar{\rho})$ 是一个带有 Nakayama 平移 $\bar{\tau}$ 的稳定平移箭图. 证毕.

例:设 ΛV 是一个 n 维向量空间上的外代数.它是 Loewy 长度为 $n+1$ 的分次自入射代数[5],由如上定理可知,它与 Z_{n+1} 的 smash 积的箭图及关系集如下(亦可参见文献[6-8]).



and $x_ix_i[k]$,$(x_ix_j+x_jx_i)[k]$ $(0\leqslant i,j,k\leqslant n)$.

参考文献:

[1] 万前红,郑立景,郭晋云.斜群代数与平凡扩张的表示维数[J].数学学报,2015,58(3):463-468.

[2] DUGAS A.Periodic resolutions and self-injective algebras of finite type[J].Journal of Pure and Applied Algebra,2010,214(6):990-1000.

[3] GUO J Y.Coverings and truncations of graded self-injective algebras[J].Jounal of algebra,2012,355(1):9-34.

[4] JENSEN A,JØNDRUP S.Smash products,group actions,and group graded rings[J].Mathematica Scandinavica,1991,68(2):161-170.

[5] 郑立景.扭平凡扩张与表示维数[J].数学进展,2014,43(4):512-520.

[6] GUO J Y,WU Q X.Loewy matrix, Koszul cone and applications[J].Communications in Algebra,2000,28(2):925-941.

[7] GUO J Y.On the McKay quivers and m-Cartan Matrices[J].Science in China Series A:Mathematics,2009,52(3):513-518.

[8] CHEN X.Graded self-injective algebras "are" trivial extensions[J].Journal of Algebra,2009,322(7):2601-2606.