文章编号:1673-0062(2016)03-0057-04

具非对称位势二阶 Hamilton 系统的同宿轨

陈会文,廖茂新

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:运用三临界点定理研究了一类二阶 Hamilton 系统同宿轨的存在性.在位势函数是非对称假设下,建立了一个新的存在性准则,改进了已有文献的结果.

关键词:Hamilton 系统;同宿轨;临界点理论

中图分类号:O175　　**文献标识码**:A

Homoclinic Orbits for Second Order Hamiltonian Systems Possessing Asymmetric Potentials

CHEN Hui-wen, LIAO Mao-xin

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of homoclinic orbits for a class of second order Hamiltonian systems via three critical points theorems. Under the potential functions of asymmetric, we establish a new existence criterion, which greatly improve some existing results in the literature.

key words: Hamiltonian systems; homoclinic orbits; critical point theory

0　引　言

考虑二阶 Hamilton 系统

$$-\ddot{u}(t)+L(t)u(t)=\nabla W(t,u(t)),t\in\boldsymbol{R},\tag{1}$$

其中 $u\in\boldsymbol{R}^N$ 以及 $L\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^{N\times N})$ 是一个对称矩阵函数.一般地,假设 $u(t)$ 是系统(1)的一个解且满足 $u\in C^2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^N)$,$u\neq0$ 以及当 $|t|\to\infty$ 时,$u(t)\to 0$ 和 $\dot{u}(t)\to0$,那么 $u(t)$ 称为系统(1)的一个同宿解(轨).

同宿轨作为非线性动力系统的一个重要研究方向,它是用来描述时间趋于无穷大时系统解的渐近行为,能够反应系统的最终发展趋势,与此同时,对系统平衡点的性质也进行了很好的刻画,更加深刻的反应平衡点的实际意义,从而可以对系统进行更好的控制.同宿轨在生物数学、力学、化

收稿日期:2015-07-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11526111);湖南省自然科学基金资助项目(2016JJ6127);衡阳市科技局基金资助项目(2015KJ13)

作者简介:陈会文(1985-),男,湖南岳阳人,南华大学数理学院讲师,博士.主要研究方向:微分方程与动力系统.

学等科学领域中有着重要的应用.此外,同宿轨的破裂能够导致混沌.因此,同宿轨是混沌和分叉理中重要的因素之一,是非线性动力系统中产生动力行为的源泉之一.同宿轨的研究工作开始于 1892 年的一篇论文,自此人们开始认识到同宿轨对动力学行为的影响.随后,学者们主要采用 Melnikov 理论研究它,得到了丰硕的结果,见冯贝叶的综述文章[1].

众所周知,作为动力系统的特殊情形,Hamilton 系统一直作为物理学家和数学家的重要研究对象,它广泛存在于生命科学、数理科学、社会科学等各个领域,同时对 Hamilton 系统的研究对非线性分析、微分几何、数学物理和代数拓扑等学科产生的重大影响.因此,Hamilton 系统是当前热门的问题之一,而 Hamilton 系统同宿轨是 Hamilton 系统主要的研究方向之一.由于 Hamilton 系统具有变分结构,可以把求 Hamilton 系统的解转变为寻找相对应泛函的临界点.受 Morse[2] 和 Hedlumd[3] 的两篇文献的影响,学者们开始利用变分法研究 Hamilton 系统的同宿、异宿轨.随着临界点的发展,运用变分方法研究 Hamilton 系统的同宿、异宿轨开始活跃起来.在过去二十几年中,在关于和各种假设下,许多学者运用变分法研究了系统(1)同宿轨的存在性和多重性,并取得了一些较好的结果,见文献[4-9].

文献[5-9]都是在对称性条件下获得了系统(1)同宿轨的多重性.本文在没有对称性条件假设下研究了系统(1)同宿轨的多重性,得到了一些新的结果.建立了下面定理:

假设条件:

(F_0) $W(t,u)= \lambda a(n)\nabla G(u)+\mu b(n)\nabla F(u)$.

(F_1) $L(n)$ 是正定对称矩阵,$t\in \boldsymbol{R}$ 且存在函数 $\beta:\boldsymbol{R}\to 0(0,+\infty)$ 满足 $\beta(t)\to+\infty$, $|t|\to\infty$ 及

$$(L(t)u,u)\geqslant \beta(t)|u|^2,\ \forall (t,u)\in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^N.$$

(F_2) $G,F\in C^1(\boldsymbol{R}^N,\boldsymbol{R})$ 以及.$G(0)=F(0)=0$.

(F_3) $b\in L^\infty(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$,且对一些 $\gamma\in(0,1)$, $a\in L^\infty(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\cap L^{2/(1-\gamma)}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$,是一个正连续函数.

(F_4) $\lim_{u\to 0}|\nabla G(u)|/|u|=0$

(F_5) $\lim_{|u|\to\infty}|\nabla G(u)|/|u|=0$.

(F_6) 存在 $\zeta\in\boldsymbol{R}^N$ 使得 $G(\zeta)>0$.

(F_7) 存在 $T>0$ 和 $\alpha>1$ 使得

$$|\nabla F(u)|\leqslant T(|u|+|u|^\alpha),\ \forall u\in\boldsymbol{R}^N.$$

定理 1 假设(F_0)-(F_7)成立.那么存在 $\lambda_1>0$ 使得对每一个 $\lambda>\lambda_1$,存在 $\sigma>0$ 使得对每一个 $\mu\in[0,\sigma]$,系统(1)至少存在两个非平凡的同宿解.

例 1 $a(t)=[1/(1+t^2)]^{1/4}$, $G(u)=((1,1,\cdots,1),u)\ln(1+|u|^2)$.显然,$G(u)$ 不是偶函数.

1 预备知识

给出下文中所需要的一些预备知识.

设

$$E=\left\{u\in H^1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^N):\int_{\boldsymbol{R}}[|\dot{u}(t)|^2+(L(t)u(t),u(t))]\mathrm{d}t<+\infty\right\}$$

且对 $u,v\in E$,设

$$\langle u,v\rangle=\int_{\boldsymbol{R}}[(\dot{u}(t),\dot{v}(t))+(L(t)u(t),v(t))]\mathrm{d}t$$

以及相应的范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\boldsymbol{R}}[|\dot{u}(t)|^2+(L(t)u(t),u(t))]\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

那么 E 是 Hilbert 空间.E^* 表示 E 的对偶空间.因为 E 是连续嵌入 $L^p(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^N)$, $\forall p\in[2,+\infty]$,所以存在 $\delta_p>0$ 使得

$$\|u\|_p\leqslant\delta_p\|u\|,\ \forall u\in E, \tag{2}$$

其中 $\|u\|_p$ 表示 $L^p(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^N)$ 的范数.

引理 1(参看文献[10]) 假设 L 满足条件(F_1),那么对任意的 $2\leqslant p\leqslant\infty$, E 是紧嵌入 $L^p(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^N)$.

对任意的 $u\in E$,定义

$$\Phi(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2,$$

$$J(u)=\int_{\boldsymbol{R}}a(t)G(u(t))\mathrm{d}t,$$

$$\Psi(u)=\int_{\boldsymbol{R}}b(t)F(u(t))\mathrm{d}t. \tag{3}$$

引理 2 假设(F_0)-(F_7)成立,定义泛函 $I:E\to\boldsymbol{R}$,

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda\int_{\boldsymbol{R}}a(t)G(u(t))\mathrm{d}t-\mu\int_{\boldsymbol{R}}b(t)F(u(t))\mathrm{d}t$$
$$=\Phi(t)-\lambda J(u)-\mu\Psi(u),\ \forall u\in E,$$

则 I 是有定义的且 $I\in C^1(E,\boldsymbol{R})$,它的导数为

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\boldsymbol{R}}[(\dot{u}(t),\dot{v}(t))+(L(t)u(t),v(t))]\mathrm{d}t-\lambda\int_{\boldsymbol{R}}(a(t)\nabla G(u(t)),v(t))\mathrm{d}t-\mu\int_{\boldsymbol{R}}(b(t)\nabla F(u(t)),v(t)\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$\forall u,v\in E$.此外,$J',\Psi':E\to E^*$ 都是紧的且 I 在 E 的临界点 u 是系统(1)的解且满足 $u(t)\to 0$, $\dot{u}(t)\to 0$, $|t|\to\infty$.

证明　该证明类似于文献[9]中引理 2.3 的证明,省略其证明过程.

引理 3　Φ 是强制的,弱下半连续的,在的每个有界子集上有界,以及它的导数存在一个连续逆.

证明　易证 Φ 是强制的.设在 E 中 u_n 弱收敛于 u,则 $\liminf_{n\to\infty}\|u_n\|\geqslant\|u\|$.那么我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\Phi(u_n)=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{2}\|u_n\|^2\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2=\Phi(u).$$

所以 Φ 是弱下半连续的.此外,易证 Φ 在 E 的每个有界子集上有界.

证明 Φ' 存在一个连续逆.对每一个 $u\in E\backslash\{0\}$,由上式(5),有

$$\langle\Phi'(u),u\rangle=\|u\|^2.$$

所以 $\lim_{\|u\|\to\infty}<\Phi'(u),u>/\|u\|=+\infty$,也就是说,$\Phi'$是强制的.对任意的 $u,v\in E$,由上式(5),有

$$\langle\Phi'(u)-\Phi'(v),u-v\rangle=\|u-v\|^2.$$

所以 Φ' 是一致单调的.由(参考文献[12], Theorem 26.A(d)),得到 Φ'存在一个连续逆 E^*.

2　定理 1 的证明

运用文献[11]中的 Theorem 1 证明定理 1.

引理 4　$\limsup_{u\to 0}J(u)/\Phi(u)\leqslant 0$.

证明　由(F_2),(F_4)和(F_5),则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $T_\varepsilon>0$ 使得

$$|G(u)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4(1+\|a\|_\infty)}|u|^2+T_\varepsilon|u|^3. \tag{6}$$

由式(2)和式(6),有

$$\begin{aligned}J(u)&=\int_{\boldsymbol{R}}a(t)G(u(t))\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_{\boldsymbol{R}}a(t)|G(u(t))|\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_{\boldsymbol{R}}a(t)\Big[\frac{\varepsilon}{4(1+\|a\|_\infty}|u(t)|^2+\\&\quad T_\varepsilon|u(t)|^3\Big]\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\delta_2^2\|u\|^2+T_\varepsilon\delta_3^3\|a\|_\infty\|u\|^3,\forall u\in E.\end{aligned}$$

因此,对每一个 $u\in E\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{J(u)}{\Phi(u)}&\leqslant 2\frac{\frac{\varepsilon}{4}\delta_2^2\|u\|^2+T_\varepsilon\delta_3^3\|a\|_\infty\|u\|^3}{\|u\|^2}\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\delta_2^2+2T_\varepsilon\delta_3^3\|a\|_\infty\|u\|.\end{aligned}$$

当 $u\to 0$ 时,取上式的上极限,由 ε 的任意性,得到 $\mathrm{imsup}_{u\to 0}J(u)/\Phi(u)\leqslant 0$.

引理 5　$\limsup_{\|u\|\to\infty}J(u)/\Phi(u)\leqslant 0$.

证明　由(F_4)和(F_5),则对任意的$\zeta<0$,存在 $\eta_\zeta\in(0,1)$使得

$$|\nabla G(u)|\leqslant\frac{\zeta}{2(1+\|a\|_\infty)}|u|, \tag{7}$$

$$\forall|u|\geqslant\eta_\zeta^{-1},|u|\leqslant\eta_\zeta.$$

因为 $G\in C^1(\boldsymbol{R}^N,\boldsymbol{R})$,存在一个常数 $C_\zeta>0$ 使得

$$\frac{|\nabla G(u)|}{|u|^\gamma}\leqslant G_\zeta,\forall|u|\in[\eta_\zeta,\eta_\zeta^{-1}], \tag{8}$$

这里 γ 被给定在(F_3)中.由式(7),式(8)和(F_2),得

$$|G(u)|\leqslant\frac{\zeta}{2(1+\|a\|_\infty}|u|^2+C_\zeta|u|^{\gamma+1}.$$

余下的证明类似于引理 4 的证明,省略其证明过程.

引理 6　$\sup_{\Phi(u)>0}J(u)/\Phi(u)>0$.

证明　对任意的$\bar{a}>0$,选取 $v_1\in C^2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^N)$使得 $v_1(t)=\zeta,t\in[0,\bar{a}]$;$v_1(t)=0,t\in(-\infty,-2]$或者$[\bar{a}+2,+\infty)$且$|v_1(t)|\leqslant|\zeta|,t\in\boldsymbol{R}$.显然 $v_1\in E$ 以及 $\Phi(v_1)>0$.由(F_6),(F_3)以及选取足够大的$\bar{a}$,得

$$\begin{aligned}J(v_1)&=\int_{\boldsymbol{R}}a(t)G(v_1(t))\mathrm{d}t\\&\geqslant\int_0^{\bar{a}}\mathrm{a(t)G(v_1(t)d}t-\\&\quad\int_{-2}^0\mathrm{a(t)\,|\,G(v_1(t))\,|d}t-\\&\quad\int_{\bar{a}}^{\bar{a}+2}\mathrm{a(t)\,|\,G(v_1(t))\,|d}t>0\end{aligned}$$

从而有

$$\beta_0=\sup_{\Phi(u)>0}\frac{J(u)}{\Phi(u)}>0.$$

引理 7　$\lambda_1=1/\beta_0\geqslant 1/(2M\delta_2^2\|a\|_\infty)$,其中 $M=\max_{u\neq 0}|G(u)|/|u|^2$

证明　由(F_3),得

$$\begin{aligned}J(u)&=\int_{\boldsymbol{R}}a(t)G(u(t))\mathrm{d}t\\&\leqslant M\|a\|_\infty\|u\|_2^2\\&\leqslant M\delta_2^2\|a\|_\infty\|u\|^2.\end{aligned}$$

$$\beta_0 = \sup_{\Phi(u)>0} \frac{J(u)}{\Phi(u)} \leqslant 2M\delta_2^2 \| a \|_\infty.$$

证毕.

证明 显然,E 是可分的,自反的以及一致凸的 Banach 空间.由引理 2—引理 7,得到 Φ,J 以及 Ψ 满足文献[11]中的 Theorem 1 的所有条件.因此,对每一个 $\lambda>\lambda_1$,存在 $\sigma<0$ 使得对每一个 $\mu\in[0,\sigma]$,I 在 E 中至少存在三个临界点.易知 0 是系统(1)的解.因此,系统(1)至少存在两个非平凡的同宿解.

参考文献:

[1] 冯贝叶.同宿及异宿轨线的研究近况[J].数学研究与评论,1994,14(2):299-311.

[2] Morse H M.A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one[J].Trans. Amer.Math.Soc.1924,26(1):25-61.

[3] Hedlund G A.Geodesics on a two dimensional Riemammian manifold with periodic coefficients[J].Ann.Math. 1932,33(4):719-739.

[4] Ding Y H.Existence and multiplicity results for homoclinic solutions to a class of Hamiltonian systems[J].Nonlinear Anal.,1995,25(11):1095-1113.

[5] Sun J T,Chen H B,Nieto J J.Homoclinic solutions for a class of subquadratic second-order Hamiltonian systems [J].J.Math.Anal.Appl.,2011,373(1):20-29.

[6] Tang X H,Lin X Y.Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems[J].Proc.Roy.Soc. Edinburgh Sect.A.2011,141(5):1103-1119.

[7] Yang M H,Han Z Q.Infinitely many homoclinic solutions for second-order Hamiltonian systems with odd nonlinearities[J].Nonlinear Anal.,2011,74(7):2635-2646.

[8] Zhang Q Y,Liu C G.Infinitely many homoclinic solutions for second order Hamiltonian systems[J].Nonlinear Anal.,2010,72(2):894-903.

[9] Chen H W,He Z M.Infinitely many homoclinic solutions for a class of second-order Hamiltonian systems[J]. Adv.Differ.Equ.,2014(1):161.

[10] Omana W,Willem M.Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems[J].Differ.Int.Equ.,1992,5(5): 1115-1120.

[11] Ricceri B.A further three critical points theorem[J]. Nonlinear Anal.TMA,2009,71(9):4151-4157.

[12] Zeidler E.Nonlinear Functional Analysis and its Applications[M].Berlin:Springer,1990.