

文章编号:1673-0062(2016)01-0071-06

爱尔兰分布与指数分布并联系统的可靠度比较与经济分析

谢超凡,徐鲁雄,徐 琳

(福建师范大学福清分校 电信学院,福建 福清 350300)

摘 要:在构建复杂系统时,为了提高系统的运行可靠度,决策者往往采取冗余备份或者将元件并联.但在采取冗余备份时,需要增加系统检测设备与开关零件,这又显著地增加了经济费用;此外,开关的可靠度也会对系统的可靠度造成影响.本文将对服从指数分布的并联系统可靠度与爱尔兰分布式冗余备份系统进行比较,首先分析元件个数的增加或者并联个数的增加所带来的系统边际可靠度的提高,进而研究在经济费用约束的条件下是实行并联还是实行爱尔兰分布式的冗余备份,以及对开关经济成本等变量作最优可靠度灵敏度分析.

关键词:可靠度;爱尔兰分布;指数分布;并联系统

中图分类号:TB114.3

文献标识码:B

The Reliability and Economic Analysis Comparison Between Parallel System and Erlang Distribution System

XIE Chao-fan, XU Lu-xiong, XU Lin

(Electronic Information Engineering Institute, Fuqing Branch of Fujian Normal University, Fuqing, Fujian 350300, China)

Abstract: In order to improve the reliability of complex system, decision makers tend to take redundant backup or parallel the components. However, taking redundant backup would increase the number of system detection equipment and switch parts, which has great effect on the cost and the reliability of the system. This paper attempts to compare the reliability of the exponential distribution of the parallel system with that of the redundancy systems, analyze increase of the number of components in the two system, which brings improvement of marginal reliability of system, and study whether to apply parallel or Erlang distribution redundant backup in the economic cost constraints, to further analyze the impact of the economic cost of the switch.

收稿日期:2015-09-19

基金项目:福建省教育厅基金资助项目(JB14134)

作者简介:谢超凡(1984-),男,福建福清人,福建师范大学福清分校电信学院实验师,硕士.主要研究方向:数据挖掘.

key words: reliability; Erlang distribution; exponential distribution; parallel system

0 引言

可靠性理论是分析那些能表征产品规定功能的随机事件发生概率的一门学科.可靠性理论建立在概率论基础上,最早以机器维修问题作为其研究领域^[1].目前,可靠性理论主要研究系统的可靠性指标,以及在可靠性指标基础上的最优检测时间,以避免故障的发生,减少故障带来的损失,例如国内的研究文献[2-4],国外的研究文献[5-8].在N元服从指数分布并联系统中,谢超凡和徐鲁雄已经对可靠度极值度作了相关分析,他们认为,在不考虑经济约束情况下,所有元件失效率相等时,系统可靠性达到最小值;在考虑经济约束情况下,且故障率为单位弹性时,得到的结论也是相同的.在运行过程中,根据实际情况,如果故障率在下包络线上,那么整个系统的元器件应该通通换掉;如果故障率距离下包络线还比较远,那么出于经济性能考虑,只要更新故障率最高的几个原件即可^[9].在对并联系统下包络线分析时,借助Cauchy-Schwarz不等式、对称性和Kuhn-Tucker条件给出最优值分布,即可靠度达到最大值所满足的K-T条件;如果在功能约束可行域的内部,要使可靠度达到最大值,那么单位费用所产生的各个元件可靠度增量应该相等,即费用-故障率均衡;在功能约束可行域边界上,则必须进行修正以得到边界费用-故障率均衡,并且使用无差异曲线分析在不同的边际替代率情况下的最优解的情况.不管何种情况,元部件的故障率相等时,得到可靠度最大值的一个可接受下界,并依此对系统运行的过程进行划分^[10].本文将对服从指数分布的并联系统可靠度与爱尔兰分布式冗余备份系统进行比较,分析元件个数的增加或者并联个数的增加所带来的系统边际可靠度的提高,以及在经济费用约束条件下寻找最优可靠度值,进而分析并联系统与爱尔兰分布系统的优劣以及开关的经济成本对最优值可靠度规划的影响.

1 可靠性主要指标

A :表示系统正常工作事件.

A_i :表示第*i*个单元正常工作事件.

λ_i :表示第*i*个元件的失效率.

$R_s(t)$:表示系统可靠度,即 $P(A)=R_s$.

$R_i(t)$:表示第*i*个单元的可靠度,即

$$P(A)=R_i.$$

m_s :表示系统的平均寿命, $m_s=\int_0^{+\infty} R_s(t) dt$.

并联系统,一个系统由*n*个元件组成,若只要由一个元件工作,系统就正常工作,或者说,只有当所有单元都失效时,系统才失效.则称这样的系统为并联系统,由概率的性质可知,系统可靠度为

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad (1)$$

冗余备份系统,一些元件工作,其它单元不工作,处于备用或等待状态,当工作的单元失效时,备用单元才接替工作,且备用单元的失效率在备用期为零,换句话说,在备用期间可靠度为百分百.一个工作,*n*-1个备用的冗余系统框架如图1所示,其中,*K*为检测器和开关.

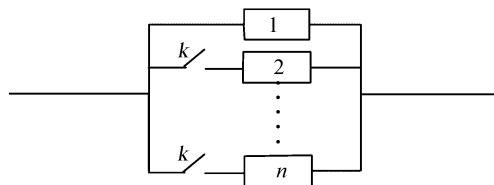


图1 爱尔兰系统逻辑框图

Fig.1 The logical block diagram of Erlang distribution system

当假定开关是绝对可靠时有以下的引理:

引理1 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是*n*个相互独立的随机变量,服从相同参数 λ 的负指数分布,那么 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 服从*n*阶爱尔兰分布,其概率密度函数是:

$$b_n(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} \quad (2)$$

证明 设 $p(u)$ 为随机变量 X_i 的概率密度函数,由于 X_i 是独立同分布的随机变量且服从指数分布,则 $p(u)$ 是服从指数分布的概率密度函数,令 $\varphi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it u} p(u) du$ 是随机变量 X_i 的特征函数,则 $\varphi(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-1}$.由于 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$,则可知 X 的概率密度函数为 X_i 做了*n*重卷积运算,由于傅里叶变换能把卷积运算变成乘法运算.因

此 X 的特征函数为:

$$\varphi_n(t) = \varphi(t)^n = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-n}$$

则 X 的概率密度函数为, 当 $u \geq 0$ 时 $b_n(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \varphi_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-n} dt$, 由分部积分可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-n} dt &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\lambda}{(n-1)i} e^{itu} \times \right. \\ &\left. \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-n+1} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\lambda u}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-n+1} dt = \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda u}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-n+1} dt &= \dots = \frac{1}{2\pi} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \times \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} dt &= \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

因此对于 $n-1$ 个冗余备份元件, 并且元件寿命服从指数分布的系统, 其分布服从 n 阶爱尔兰分布, 证毕。

引理 2 当系统寿命服从 n 阶爱尔兰分布时, 其系统可靠度为:

$$R_s(t) = \left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] e^{-\lambda t} \quad (3)$$

证明 由引理 1 可知系统寿命 X 的概率密度函数为:

$$b_n(u) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}$$

由于 $R_s(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \times \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} du$, 由分部积分可得:

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} du &= - \int_0^t \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} d e^{-\lambda u} = \\ - e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \Big|_0^t &+ \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} du = \\ - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} &+ \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-2}}{(n-2)!} du = \dots = \\ - \left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] e^{-\lambda t} &+ 1 \end{aligned}$$

由此可得结论, 证毕。

2 并联系统与爱尔兰分布可靠度比较

引理 3 对于服从指数分布的并联系统, 并联个数与爱尔兰阶数相等时候, 其两个系统的可

靠度有如下的不等式:

$$1 - (1 - e^{-\lambda t})^n < \left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right] e^{-\lambda t} \quad (4)$$

即 $R_s^p(t) \leq R_s^l(t)$, 爱尔兰分布的可靠度始终大于并联系统的可靠度。

证明 令 $F(x) = \left[1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \dots + \frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!}\right] e^{-x} -$

$1 + (1 - e^{-x})^n$, 可得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \dots + \frac{(x)^{n-2}}{(n-2)!}\right] e^{-x} - \left[1 + x + \frac{(x)^2}{2!} + \dots + \frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!}\right] e^{-x} \\ &+ n(1 - e^{-x})^{n-1} e^{-x} = -\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} \\ &+ n(1 - e^{-x})^{n-1} e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

时, 可求得驻点方程为:

$$(1 - e^{-x})^{n-1} = \frac{(x)^{n-1}}{n!}$$

由于在 $x \geq 0$ 范围内考虑, 方程等价于: $(1 - e^{-x}) = \frac{x}{\sqrt[n-1]{n!}}$, $0 < \frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}} < 1$, 令 $\alpha = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}}$ 则方程为:

$(1 - e^{-x}) = \alpha x$, $(0 < \alpha < 1)$, 令 $G(x) = 1 - e^{-x} - \alpha x$, 由于 $G^*(x) < 0$, 可知 $G(x)$ 在定义域上是凹函数, 则

$G(x)$ 的单调区间为: $[0, \ln(\frac{1}{\alpha})] \nearrow, [\ln(\frac{1}{\alpha}), +\infty] \searrow$, 且 $G(\ln(\frac{1}{\alpha})) > 0, G(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow +\infty)$, 从而可知方程 $(1 - e^{-x}) = \alpha x$, $(0 < \alpha < 1)$ 有两个根, 一个为 0, 另外一个在 $[\ln(\frac{1}{\alpha}), +\infty]$, 标记为 x^* 。

从而可知对于 $F'(x)$ 的单调区间为: $[0, x^*] \nearrow, [x^*, +\infty] \searrow$, 由 $F(0) = 0, F(+\infty) = 0$, 可知 $F(x) > 0, (x > 0)$, 并且在 x^* 处两者的可靠度之差得到最大值, 最后差距越来越小, 直到 0, 证毕。

n 阶爱尔兰分布与 n 个并联系统之间的可靠度差距如图 2 所示, 随着冗余和并联元件个数的增多, 两者之间的可靠度线越来越远, 根据系统的平均寿命定义, 可知夹在两条线之间的面积代表平均寿命的差异, 因此有必要研究平均寿命随着爱尔兰阶数或者说并联个数的增长所带来的渐进性质, 有如下的定理。

引理 4 对于服从指数分布的并联系统和爱尔兰分布系统, 并联个数与爱尔兰阶数相等时, 其两个系统的平均寿命差异随着并联个数的增加逐渐增大, 增量方程如下:

$$\Delta S_n = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \quad (5)$$

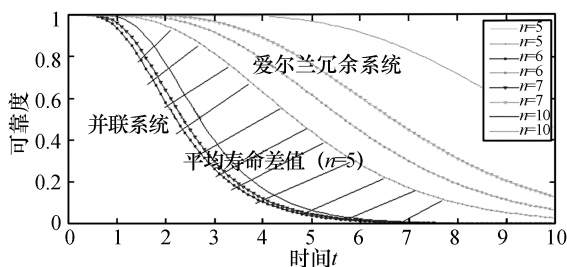


图2 爱尔兰系统与并联系统可靠度比较

Fig.2 The reliability comparison between Erlang system and parallel system

证明 $R_s^P(t)$, $R_s^I(t)$ 分别为相应的并联系统和爱尔兰系统的可靠度, 则:

$$R_s^P(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n, R_s^I(t) = [1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}]e^{-\lambda t}$$

$$\Delta S_n = \int_0^{+\infty} (R_s^I(t) - R_s^P(t)) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n dt$$

由于伽玛函数 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$, 则

$$\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} \frac{(x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda(k-1)!} \times$$

$$\int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(k)}{\lambda(k-1)!} = \frac{n}{\lambda} \int_0^{+\infty} 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n dt = \int_0^{+\infty} (1 - (1 - e^{-\lambda t})) (1 + (1 - e^{-\lambda t}) + \dots + (1 - e^{-\lambda t})^{n-1}) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 + (1-x) + \dots + (1-x)^{n-1}) dx = \frac{1}{\lambda} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$$

$$\text{故 } \Delta S_n = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}),$$

证毕.

现在用边际分析法分析 ΔS_n 随 n 变化的情况, $\Delta S_{n+1} - \Delta S_n = \frac{1}{\lambda} (1 - \frac{1}{n+1})$, 由可知 ΔS_n 是 n 的单调递增序列, 但是 ΔS_n 并不是 Cauchy 列, 因此不会收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta S_n = +\infty$. 那么接下来就必须考虑 ΔS_n 增长的阶数, 有如下定理:

引理5 对于服从指数分布的并联系统和爱尔兰分布系统, 并联个数与爱尔兰阶数相等时, 其

两个系统的平均寿命差异 ΔS_n 增长的阶为 $O(n)$.

证明 由定理4可知, $\Delta S_n = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$, 根据欧拉定理, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, 其中 $C = 0.577216 \dots$ 称为欧拉常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, 也就是说 ε_n 是无穷小量. 因此, ΔS_n 可改写成如下的式子:

$$\Delta S_n = \frac{1}{\lambda} (n - \ln n - C + \varepsilon_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \ln n - C + \varepsilon_n}{\lambda n} = \frac{1}{\lambda}$$

由此可知, ΔS_n 的阶为 $O(n)$.

由 $\Delta S_{n+1} - \Delta S_n = \frac{1}{\lambda} (1 - \frac{1}{n+1})$ 可知其两个系统

的平均寿命差异 ΔS_n 变化速度 $\Delta^2 \Delta S_n = \frac{1}{n(n+1)}$,

其阶数为 $O(\frac{1}{n^2})$.

3 并联系统与爱尔兰分布可靠度经济比较分析

3.1 不考虑故障率对费用的影响

现以系统一个生命周期运营所得的收入为经济指标, 爱尔兰系统在生命周期内平均收益为 L' , 则

$$L' = \frac{n}{\lambda} s - nc - (n-1)k \quad (6)$$

对于并联系统来说, 系统的平均收入为:

$$L^P = \frac{S}{\lambda} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - nc) \quad (7)$$

由于 L' 和 L^P 都含有元件成本的部分, s 代表单位时间运行收益, c 代表单位元件成本, k 代表单位开关成本, 则比较两个方案的收益时, 只需比较 $\frac{n}{\lambda} s - (n-1)k$ 与 $\frac{s}{\lambda} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$ 大小关系,

由欧拉定理可知 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, 由于 L' 的阶数为 $O(n)$, 而 L^P 的阶数为 $O(\ln n)$, 因此总存在某个数 n^* , 当 $n > n^*$ 时, $L' > L^P$, 其收益曲线如图3所示.

在不考虑经济费用约束的情况下, 爱尔兰系统的经济收益肯定优于并联系统. 如果经费有限, 或者检测开关的成本过大时, 那么最优方案选择并联系统.

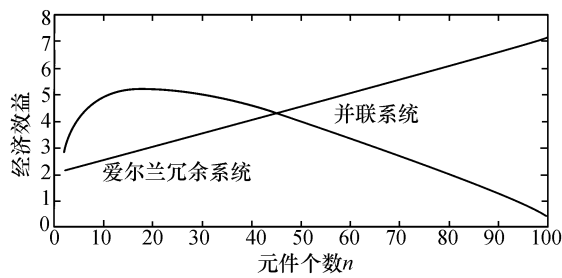


图3 爱尔兰系统与并联系统经济效益比较(不考虑故障率)

Fig.3 The reliability comparison between Erlang system and parallel system(Do not consider failure rate)

3.2 考虑故障率对费用的影响

在前面分析中,只是把 λ 当做一个参数,是把有限经费投入冗余备份或并联,还是把经费投入到选择 λ 较低的元件,都是决策者要考虑的问题,现考虑如下的模型:

$$\max L^I = \frac{n}{\lambda} s - nc - (n-1)k$$

$$s.t. nf(\lambda) = u \quad (8)$$

$$\max L^P = \frac{s}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - nc$$

$$s.t. nf(\lambda) = u \quad (9)$$

其中 $f(\lambda)$ 为故障率与费用相关函数,该函数为凸函数且 $f'(\lambda) < 0$ ^[6],由约束条件可知, $\lambda = f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)$.

代入目标函数可得:

$$L^I = \frac{n}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} s - nc - (n-1)k \quad (10)$$

同理可得

$$L^P = \frac{s}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - nc \quad (11)$$

$$L^I - L^P = \frac{n}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} s - (n-1)k - \frac{s}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

现将 $L^I - L^P$ 分为两个部分,

$$L^I - L^P = \left(\frac{s}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} - k \right) (n-1) - \frac{s}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$f'(\lambda) < 0$ 则 f^{-1} 也是单调递减,

随着 $n \uparrow$, $\frac{s}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} - k \downarrow$, 因此 n 足够大的时候 $L^I -$

$L^P < 0$, 其转折点的大小 n_0 与 $f^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)$ 的曲线变化

快慢相关,由泰勒公式可知 $\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} = \left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \right)' \times$

$\frac{u}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, 要使得 n 在比较大时有等式

$\left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \right)' \frac{u}{n} = k + \varepsilon$ 成立(ε 为剩余项),且为了抵

消 $\frac{s}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ 带来的影响,则费用 u

要足够大,检测开关 k 要比较小, $\frac{1}{f^{-1}(x)}$ 在0点附

近的变化很大,则得到 $n \approx \left(\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \right)' \frac{u}{k}$. 否则, n

只能取较小的值或者无解.下面通过差分法来计算爱尔兰分布情况下达到最优值要满足的条件,由于 n^* 是其最优值,则有:

$$(a) L'(n^*) \geq L'(n^* - 1)$$

$$(b) L'(n^*) \geq L'(n^* + 1)$$

$$\text{由第一个式子可得 } \frac{n}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} - \frac{(n-1)}{f^{-1}\left(\frac{u}{n-1}\right)} \geq \frac{c+k}{s},$$

$$\text{由第二个式子得 } \frac{n+1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n+1}\right)} - \frac{n}{f^{-1}\left(\frac{u}{n}\right)} \leq \frac{c+k}{s}, \text{ 两个式}$$

子合并可得如下不等式:

$$\frac{c+k}{us} \geq \frac{1}{\frac{u}{n^*} f^{-1}\left(\frac{u}{n^*}\right)} - \frac{1}{\frac{u}{n^*-1} f^{-1}\left(\frac{u}{n^*-1}\right)} \quad (12)$$

n^* 为第一次出现满足上述不等式的值,由上式不等式(12)可以看出 $c+k$ 越大 n^* 也必须越大,要想弥补成本的开销,爱尔兰分布的阶数必须增大;费用与单位时间收入越大,反而爱尔兰分布的阶数反而较小就可以取得很好的收益,此外还跟函数 $\frac{1}{xf^{-1}(x)}$ 的曲线变化相关.

$L^I - L^P \geq 0$ 有解的情况下,并不意味着最优方案

就选择了爱尔兰分布系统,因为有可能出现以下三种情况,如图4所示。

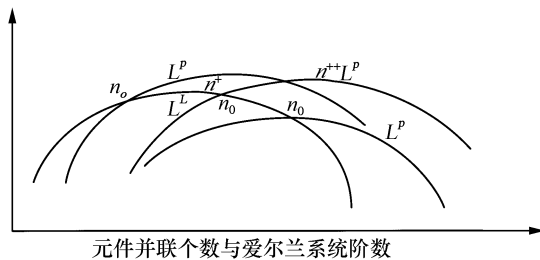


图4 爱尔兰系统与并联系统经济效益比较(考虑故障率)

Fig.4 The reliability comparison between Erlang system and parallel system (Consider failure rate)

图4中 n_0 代表爱尔兰系统和并联系统可靠度的交点, n^* 代表爱尔兰系统最优可靠度, n^{**} 代表并联系统最优可靠度,根据图4可以看出 $n^* \geq n_0$ 时,选择并联系统为最优方案, $n^* < n_0$ 时,要比较两个方案的最优值,还必须计算并联系统的最优值.可通过如下的差分法求解,其最优值必须满足如下条件:

$$(a) L^P(n^{**}) \geq L^P(n^{**} - 1)$$

$$(b) L^P(n^{**}) \geq L^P(n^{**} + 1)$$

最后得到近似不等式:

$$\frac{c}{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)s} \geq$$

$$\frac{1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n^{**}}\right)} - \frac{1}{f^{-1}\left(\frac{u}{n^{**}-1}\right)},$$

从该不等式可以看出 n^{**}

与函数 $\frac{1}{f^{-1}(x)}$ 的曲线变化相关,最后最后比较, $L^I(n^*)$ 和 $L^P(n^{**})$,如果 $L^I(n^*) > L^P(n^{**})$ 选择爱尔兰系统,反之选择并联系统。

4 结 论

本文对服从指数分布的并联系统可靠度与爱尔兰分布式冗余备份系统进行比较,由此得出在任何时间点,爱尔兰分布的可靠度始终大于并联系统的可靠度,并且两个系统的平均寿命差异随着并联个数的增加逐渐增大,其两个系统的平均寿命差异 ΔS_n 增长的阶为 $O(n)$.在对两个系统做

经济优化和灵敏度分析时,在不考虑经济费用约束的情况下,爱尔兰系统的经济收益肯定优于并联系统.如果经费有限,且不考虑故障率选择对系统费用的经济影响或者检测开关的成本过大时,那么最优方案选择并联系统.在考虑故障率选择对系统经济费用的影响时,当爱尔兰分布的最优值点在并联系统和它相交点的右侧时候,选择爱尔兰分布系统;当最优值点在相交点左侧时,通过边际方法则比较两个系统的最优值大小,并且给出实际运用中所满足的计算不等式。

参考文献:

- [1] Luss H. An inspection policy model for production facilities [J]. Management Science, 1983, 29 (1): 110-119.
- [2] 苏保河.被检测系统的可靠性和最优检测策略[J].运筹学学报,2007,11(1):93-101.
- [3] 苏保河.基于可靠性的最优检测策略研究[J].工程数学学报,2008,25(6):989-997.
- [4] 徐东阳,董秋仙,张芳,等.N部件串联可修复系统的可靠性分析[J].南昌大学学报(理科版),2013,37(5):422-427.
- [5] 谢超凡,徐琳,徐鲁雄.服从指数分布的并联系统可靠性分析[J].福建师大福清分校学报,2015(2):25-30.
- [6] Safari J. Multi-objective reliability optimization of series-parallel systems with a choice of redundancy strategies[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2012, 10 (8): 10-20.
- [7] Taboada H A, Coit D W. A new multiple objective evolutionary algorithm for reliability optimization of series-parallel systems[J]. International Journal of Applied Evolutionary Computation, 2012, 3(2): 1-18.
- [8] Boddu P, Xing L. Reliability evaluation and optimization of series-parallel systems with k-out-of-n; G subsystems and mixed redundancy types[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O Journal of Risk & Reliability, 2013, 22(7): 187-198.
- [9] Ardakan M A, Hamadani A Z. Reliability optimization of serie Reliability optimization of series-parallel systems with mixed redundancy strategy in subsystemss-parallel systems with mixed redundancy strategy in subsystems [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2014, 130 (1): 132-139.
- [10] Xu L, Xie C F, Xu L X. Reliability Envelope Analysis [J]. Journal of Computers, 2014, 25(4): 26-34.