

文章编号:1673-0062(2016)01-0052-03

随机利率下双复合 Poisson 风险模型的破产概率

魏 飞,廖基定

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:考虑随机利率因素下,将经典风险模型推广到保费收入和索赔支出相互独立的双复合 Poisson 风险模型,得到该风险模型的最终破产概率的精确表达式和一般不等式.

关键词:随机利率;风险模型;相互独立;破产概率

中图分类号:O211 **文献标识码:**A

Ruin Probability of Two Compound Poisson Risk Model with Random Rate

WEI Fei, LIAO Ji-ding

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In the paper, we extend the classical risk model to two compound Poisson risk model with random rate, in which the arrival of the premium incomes and the arrival of the claims are mutually independent. Then the accurate expression of the ruin probability and the inequality of the ruin probability are derived.

key words: random rate; risk model; mutual independence; ruin probability

0 引 言

在经典风险模型^[1]中,保险公司在单位时间收取的保费是一样的.但在实际情形下,不同时间所收取的保费是不一样的.文献[2]讨论了双 Poisson 风险模型;文献[3]研究了二项索赔下索赔收取为 Poisson 过程的风险模型.本文在上述工作的基础上,将文献[4]的风险模型推广为考虑随机利率因素的双复合 Poisson 风险模型.

1 建立模型

定义 1 设 (Ω, F, P) 为一给定的完备概率空间, $u \geq 0, t \geq 0$,建立风险模型

$$U(t) = u(1 + A) + S(t),$$
$$S(t) = (1 + A) \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - \sigma W(t).$$

其中:

(1) u 为保险公司的初始资本, A 为随机利

收稿日期:2015-05-13

作者简介:魏 飞(1989-),男,湖南岳阳人,南华大学数理学院硕士研究生.主要研究方向:保险精算.

率且 $E(A) = a$; (2) X_i 表示第 i 份保单收取的保费, 且 $E(X_i) = \alpha$; Y_j 表示第 j 次的理赔额, 且 $E(Y_j) = \beta$; (3) $M(t)$, $N(t)$ 分别表示到时刻 t 为止保险公司收到的保单总数和发生的理赔总次数, 分别服从参数为 λ, μ 的 Poisson 过程; (4) $\sigma > 0$, $\{W(t); t \geq 0\}$ 为标准的 Brown 运动, 表示其他的支出额; (5) $X_i, Y_j, M(t), N(t)$ 相互独立.

称盈余过程 $\{U(t); t \geq 0\}$ 为随机利率下双复合 Poisson 风险模型. 为保证公司的正常稳定的运营, 需要满足 $E[S(t)] = [(1+a)\alpha\lambda - \beta\mu]t > 0$.

定义 2 最终破产时刻 $T = \min\{t; t \geq 0, U(t) < 0\}$, 破产概率 $\psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\}$, 安全负荷系数 $\theta = \frac{(1+a)\alpha\lambda}{\beta\mu} - 1 > 0$.

2 主要结果

引理 1 方程 $\lambda[M_X(-r(1+A)) - 1] + \mu[M_Y(r) - 1] + (\frac{1}{2}r^2\sigma^2) = 0$ 存在唯一的正解 R , 其中 R 为调节系数, 方程中 $M_X(r)$, $M_Y(r)$ 分别是 X, Y 的矩母函数.

证明 令 $g(r) = \lambda[M_X(-r(1+A)) - 1] + \mu[M_Y(r) - 1] + (\frac{1}{2}r^2\sigma^2)$,
 $g'(r) = -\lambda(1+A)M'_X(-r(1+A)) + \mu M'_Y(r) + (r\sigma^2)$,
 $g''(r) = \lambda(1+A)^2 M''_X(-r(1+A)) + \mu M''_Y(r) + \sigma^2 > 0$.

从而有 $g'(0) = -(1+a)\alpha\lambda + \beta\mu < 0$, 所以 $g(r)$ 是一个凸函数, 至多有两个解.

显然 $g(0) = 0$, $r = 0$ 是平凡解.

由凸函数的性质知, $g(r) = 0$ 存在唯一的正根 R .

引理 2 对于盈余过程 $\{S(t), t \geq 0\}$, 存在 R , 使得 $E[e^{-RS(t)}] = 1$.

证明 $E[e^{-rS(t)}] = E\{\exp[-r(1+A)\sum_{i=1}^{M(t)} X_i + r\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j + r\sigma W(t)]\} =$
 $E\{\exp[-r(1+A)\sum_{i=1}^{M(t)} X_i]\} \times$
 $E\{\exp[r\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j]\} E[\exp(r\sigma W(t))],$

由于 $E\{\exp[-r(1+A)\sum_{i=1}^{M(t)} X_i]\} =$
 $\sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(-r(1+A)\sum_{i=1}^{M(t)} X_i) | M(t) =$

$$n] P[M(t) = n] = \sum_{n=0}^{\infty} \{E[\exp(-r(1+A)X)]\}^n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \exp\{[M_X(-r(1+A)) - 1]\lambda t\},$$

同理

$$E\{\exp[r\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j]\} = \exp\{[M_Y(r) - 1]\mu t\},$$

$$E[\exp(r\sigma W(t))] = \exp(\frac{1}{2}r^2\sigma^2 t),$$

$$\text{从而有 } E[e^{-rS(t)}] = \exp\{[M_X(-r(1+A)) - 1]\lambda t + [M_Y(r) - 1]\mu t + (\frac{1}{2}r^2\sigma^2 t)\},$$

由引理 1 知, 存在函数 $g(r)$, 使得

$$E[e^{-RS(t)}] = e^{-tg(R)} = 1$$

定理 1 对于随机利率下双复合 Poisson 风险模型, 最终破产概率满足的不等式为

$$\psi(u) \leq e^{-Ru(1+A)}, \text{ 其中 } R \text{ 为调节系数.}$$

证明

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P\{\inf_{t \geq 0} U(t) \leq 0\} = P\{\inf_{t \geq 0} [u(1+A) + S(t)] \leq 0\} = P\{\sup_{t \geq 0} [-u(1+A) - S(t)] \geq 0\} \\ &= P\{\sup_{t \geq 0} [-S(t)] \geq u(1+A)\} \\ &= P\{\sup_{t \geq 0} [\exp(-RS(t))] \geq \exp[Ru(1+A)]\}, \end{aligned}$$

根据引理 1 和 2, 以及 Doob's 不等式^[6]得

$$\begin{aligned} P\{\sup_{0 \leq t \leq v} [\exp(-RS(t))] \geq \exp[Ru(1+A)]\} \\ \leq \frac{E(e^{-2RS(v)})}{e^{2Ru(1+A)}} \\ \leq e^{-Ru(1+A)}, \end{aligned}$$

当 $v \rightarrow \infty$ 时, 从而可得 $\psi(u) \leq e^{-Ru(1+A)}$.

定理 2 风险模型的最终破产概率的精确表达式为

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru(1+A)}}{E[\exp(-RU(T)) | T < \infty]}$$

证明对任意 $t > 0, r > 0$ 有

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(t)}] &= E[e^{-rU(t)} | T \leq t] P(T \leq t) + \\ &E[e^{-rU(t)} | T > t] P(T > t) \end{aligned}$$

由引理 2 可得

$$E[e^{-rU(t)}] = E[e^{-Ru(1+A)}] E[e^{-RS(t)}] = e^{-Ru(1+A)}$$

从而有

$$\begin{aligned} e^{-Ru(1+A)} &= E[e^{-rU(t)} | T \leq t] P(T \leq t) + \\ &E[e^{-rU(t)} | T > t] P(T > t) \end{aligned}$$

当 $T \leq t$ 时, 则有

$$\begin{aligned} U(t) &= U(T) + [U(t) - U(T)] = U(T) + \\ &u(1+A) + (1+A)\sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - \sigma W(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(1+A) - (1+A) \sum_{i=1}^{M(T)} X_i + \sum_{j=1}^{N(T)} Y_j + \sigma W(T) \\
= U(T) + (1+A) \sum_{i=M(T)}^{M(t)} X_i - \sum_{j=N(T)}^{N(t)} Y_j - \\
[\sigma W(t) - \sigma W(T)]
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
E[e^{-RU(t)} | T \leq t] P(T \leq t) = \\
E[e^{-RU(T) - R(S(t) - S(T))} | T \leq t] P(T \leq t) = \\
E[e^{-RU(T)} | T \leq t] P(T \leq t)
\end{aligned}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned}
e^{-Ru(1+A)} = E[e^{-RU(T)} | T < \infty] \psi(u) + \\
\lim_{t \rightarrow \infty} E[e^{-RU(t)} | T > t] P(T > t)
\end{aligned}$$

当 $T > t$ 时, $U(t) > 0$, 从而 $e^{-RU(t)} < 1$.

由强大数定理知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = +\infty \quad \text{a.s.}$$

因此由控制收敛定理可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[e^{-RU(t)} | T > t] P(T > t) = 0 \quad \text{a.s.}$$

所以

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru(1+A)}}{E[\exp(-RU(T)) | T < \infty]}$$

参考文献:

- [1] Grandell J. Aspects of risk theory [M]. New York: Springer Verlag, 1991.
- [2] 龚日朝, 李风军. 双 Poisson 风险模型下的破产概率 [J]. 湘潭师范学院学报: 自然科学版, 2001, 23(1): 55-57.
- [3] 王治强, 刘冬元. 二项索赔下保费收取为 Poisson 过程的破产概率研究 [J]. 南华大学学报(自然科学版), 2013, 27(4): 68-70.
- [4] 方世祖, 罗建华. 双复合 Poisson 风险模型 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2): 271-277.
- [5] 董英华, 张汉君. 带干扰的双 Poisson 风险模型的破产概率 [J]. 数学理论与应用, 2003, 23(1): 98-101.
- [6] Øksendal B. Stochastic differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 2000.

(上接第 51 页)

- [13] Ahmad B, Nieto J J. Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58(9): 1838-1843.
- [14] 程玲玲, 刘文斌, 叶晴晴. 带 p-Laplace 算子的分数阶

微分方程耦合系统边值问题解的存在性 [J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2013, 36(4): 22-25.

- [15] Chen T Y, Liu W B, Bai C Z. Solvability of Some boundary value problems for fractional p-Laplacian equation [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013(54): 1-13.