

文章编号:1673-0062(2016)01-0043-04

竞争模型下连续发酵的最优控制问题

许友军,李良兵*,杜百知

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘要:发酵法生产合生元的工业过程中,通过培养曲霉与酵母菌两个微生物,使其代谢产物达到最大值.本文将底物的补充速度看作是一个控制变量的控制函数,底物流出速度看做另一个控制变量的控制函数,在原 monod 动力学模型的基础上,提出了一个新的发酵模型,并对模型进行了数值模拟,解决了发酵的最优控制问题.

关键词:monod 方程;bang-bang 控制;Hamilton 函数

中图分类号:O174 **文献标识码:**B

Optimal Control Problem of Continuous Fermentation under Competition Model

XU You-jun, LI Liang-bing*, DU Bai-zhi

(School of Mathematics and Physics, University of South China,
Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In industrial processes of synbiotics fermentative production, its metabolites can reach the maximum value by cultivating these two micro-organisms, *Aspergillus* and yeast. In this paper we see the added speed of the substrate as a function of a controlled variable and the outflow speed as a function of the other controlled variable. Based on the original Monod kinetic model, we came up with a new model of fermentation and conducted numerical simulations on it. In this way, we solved the optimal control problem of fermentation.

key words: monod equation; bang-bang control; Hamilton function

0 引言

随着人们生活水平的提高以及环保意识的加强,无公害、无污染的绿色产品逐渐成为餐桌上的

主要消费产品.养殖业长期进行不合理的抗生素使用引发细菌耐药性,使得畜禽体内菌群失调并造成二度感染,引起畜禽机体免疫力下降,且常有药物残留于动物产品及环境当中的状况发生.针

收稿日期:2015-06-15

作者简介:许友军(1976-),男,湖南永兴人,南华大学数理学院副教授,博士.主要研究方向:偏微分方程、分布参数系统.* 通讯作者.

对养殖业使用抗生素等饲料添加剂所造成的危害,研究开发新型绿色饲料添加剂就显得尤为重要.

红曲霉—酵母菌发酵能用来生产合生元能的,文献[1]通过实验证明了该方法的可行性,并且找到了两种微生物最佳配比,为本文研究奠定了基础,文献[2]中,作者构造了以下方法,并且采用了打靶法求解了 Monod 方程^[3]数值解

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = -\frac{1}{Y}u_m C(t)X(t) + u(t) \\ \frac{dX(t)}{dt} = u_m C(t)X(t) - k_d X_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

本文从 Monod 方程出发,运用最优控制原理,对文献[1]的红曲霉—酵母菌发酵,建立了模型,给出了最优问题存在性的证明并进行了数值模拟.

1 控制系统的设立

在用红曲霉和酵母菌生产合生元的过程中,现作如下假设:

1) 营养底物初始条件下为单一的 PDE 培养基(单一土豆培养基).

2) 发酵过程中不考虑时滞及空间的不均匀性.

文献[1]的研究表明,两种微生物能够兼容共生,且两种微生物的比例为红曲霉:酵母菌=1:3时,产物合生元达到最为理想的水平.现在我们的目的是找到最优的底物补充速度与混合底物流出速度.

令 $X_1(t)$, $X_2(t)$ 分别表示 t 时刻生物量红曲霉和酵母菌的浓度.设底物的浓度为 $C(t)$,底物补充速度 $u_1(t)$,底物流出速度 $u_2(t)$,通过改进 Monod 方程得到如下的模型:

$$\begin{cases} \frac{dC(t)}{dt} = -\frac{1}{Y_1}u_m^1 C(t)X_1(t) - \frac{1}{Y_2}u_m^2 C(t)X_2(t) + u_1(t) \\ \frac{dX_1(t)}{dt} = u_m^1 C(t)X_1(t) - \alpha_1 u_2(t)X_1(t) \\ \frac{dX_2(t)}{dt} = u_m^2 C(t)X_2(t) - \alpha_2 u_2(t)X_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中 Y_i 表示生产得率常数, u_m^i 为最大生长速率常数, α_1 , α_2 分别是两种生物的比例.

2 无状态约束的最大值原理.

设控制集 $\mathfrak{R} = \{u(\cdot) : [0, T] \rightarrow [a, b]\}$, 定

义目标泛函 $J(u(\cdot)) = \int_0^T X(t) dt$, 寻找最优控制 $u^*(\cdot) \in (0, T)$, 使得 $u^*(\cdot)$ 在 $(0, T)$ 上最大化性能指标 $J(\cdot)$, 即 $J(u^*(\cdot)) = \max_{u(\cdot) \in \mathfrak{R}} J(u(\cdot))$.

定理 1^[4] 设 f^0, f 关于 y 和 u 有连续的一阶偏导, f_y, f_u, f_y^0, f_u^0 一致有界.若 $(\bar{y}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ 是一个最优对,则存在 $\bar{\psi}(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^n$ 满足

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\psi}}{dt} = -f_y(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\bar{\psi}(t) + f_y^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)), \\ \bar{\psi}(T) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

使得

$$f_u(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))\bar{\psi}(t) + f_u^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad (4)$$

在 $[0, T]$ 上几乎处处成立.特别地,如果记

$$H(t, y, u, \psi) = \langle \psi, f(t, y, u) \rangle - f^0(t, y, u) \quad (5)$$

则最优轨线满足的方程可写成

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi}(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)) \quad (6)$$

运用最大值条件则有

$$H(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{y}(t), u, \bar{\psi}(t)) \quad (7)$$

式(7)为 Hamilton 系统, H 称为 Hamilton 函数^[5], 方程(3)为伴随方程^[6].

3 微分方程数值解的转化

利用无状态约束的最优控制问题^[7], 写出相应的 H 函数.

$$\begin{aligned} H(t, y, \psi) = & \lambda_1 \left(-\frac{1}{Y_1}u_m^1 C(t)X_1(t) - \frac{1}{Y_2}u_m^2 C(t)X_2(t) + \right. \\ & \left. u_1(t) \right) + \lambda_2 (u_m^1 C(t)X_1(t) - \alpha_1 u_2(t)X_1(t)) + \\ & \lambda_3 (u_m^2 C(t)X_2(t) - \alpha_2 u_2(t)X_2(t)) + \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\psi = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T, y = (C, X_1, X_2)^T \quad (9)$$

系统方程和目标泛函不显式依赖于 t , 故 H^* 为常数, 由不带状态的最大值原理, 以及控制的条件可以知道

$$u_1^*(t) = \begin{cases} a & \text{如果 } \lambda_1(t) < 0 \\ \text{不定} & \text{如果 } \lambda_1(t) = 0 \\ b & \text{如果 } \lambda_1(t) > 0 \end{cases} \quad (10)$$

从上面对偶方程可以看出, 最优控制实际上

是一个 bang-bang 控制^[8], 最优解 $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ 取决于 $\lambda_i(t)$ 的符号, 因此可以将问题转化为边值问题的微分方程组的求解. 将上面的 $\lambda_i(t)$ 具体写出来有:

$$\begin{cases} (\lambda_1(t)) = \lambda_1 \left(\frac{1}{Y_1} u_m^1 X_1(t) + \frac{1}{Y_2} u_m^2 X_2(t) \right) - \\ \lambda_2 u_m^1 X_1(t) - \lambda_3 u_m^2 X_2(t) \\ (\lambda_2(t)) = \lambda_1 \frac{1}{Y_1} u_m^1 C(t) - \lambda_2 u_m^1 C(t) + \lambda_2 \alpha_1 u_2(t) - \alpha_1 \\ (\lambda_3(t)) = \lambda_1 \frac{1}{Y_2} u_m^2 C(t) - \lambda_3 u_m^2 C(t) + \lambda_3 \alpha_2 u_2(t) - \alpha_2 \end{cases} \quad (11)$$

设定为单调递增的有界函数 $u_2(t) = -\frac{6}{t+1} +$

6, 比较符合现实控制设备的情况, 因此可以将问题转变为研究上述微分方程组的数值解以及存在性.

4 最优控制的数值求解

求解边值问题的微分方程组的方法很多, 主要有: 打靶法^[9], 插值法^[10] 以及变量法^[11] 和伪线性化法^[12], 根据具体的方程形式采用龙格—库塔方法^[13].

1) 考虑常微分方程组的初值问题^[14], 为方便书写, 这里将 $C(t), X_1(t), X_2(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 分别记作 $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, 因此得到方程组为

$$\begin{cases} y_1' = \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' = \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2) \\ y_3' = \frac{dy_3}{dt} = f_3(t, y_1, y_3) \\ y_4' = \frac{dy_4}{dt} = f_4(t, y_2, y_3, y_4) \\ y_5' = \frac{dy_5}{dt} = f_5(t, y_1, y_4, y_5) \\ y_6' = \frac{dy_6}{dt} = f_6(t, y_1, y_4, y_6) \end{cases} \quad (12)$$

2) 其中初值分别记 $y_1(a), y_2(a), y_3(a), y_4(a), y_5(a), y_6(a), a \leq t \leq b$.

3) 将方程组向量化, 则可化为

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (13)$$

其中 $y \in R^m, f: R' \times R^m$.

4) 假设函数 $f(t, y)$ 满足 Lipschitz 条件, 即对

$x \in [a, b], y, z \in R^m$, 总存在常数 $0 \leq L \leq 1$, 使得 $\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L \|y - z\|$ 成立, 则该方程有唯一解.

5) 将 $[a, b]$ 区间离散化, 即在 $[a, b]$ 区间插入节点 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, 取 $h_i = t_i - t_{i-1}$ 称为步长, 通常为等距节点, 即取 $h = (b - a)/n$, 在这些节点上用离散化的方法将微分方程转为为离散型的, 这样运用数值积分^[8] 和 Lagrange 插值^[9] 得到, 四阶 RK 公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (13)$$

运用 matlab 编程^[10] 得到, 当 Monod 方程选取不同的参数时, 控制将呈现不同, 当 $Y_1 = 0.5, Y_2 = 0.5, u_m^1 = 0.3, u_m^2 = 0.3$ 时, 初值为 $C(0) = 1, X_1(0) = 1, X_2(0) = 0.5$, 得到 λ_1 的系数如图 1.

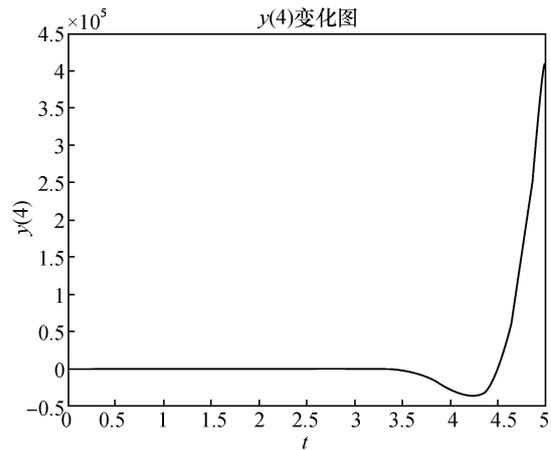


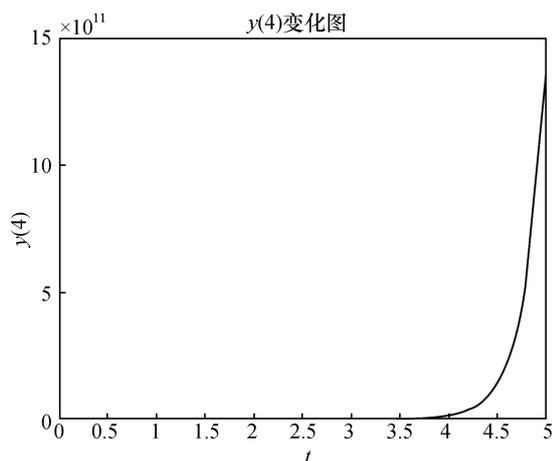
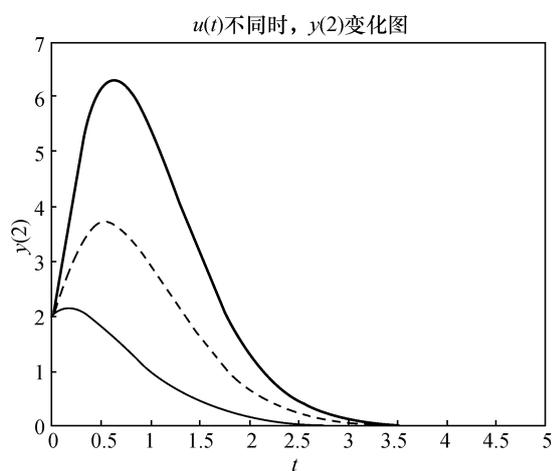
图 1 λ_1 的系数图

Fig.1 The coefficient diagram 1 of λ_1

由图 1 可知当 $3.5 < t < 4.5$ 时, $\lambda_1 < 0$, 因此 $u_1(t)$ 取最小值, 而当 $t > 4.5$ 时, $u_1(t)$ 取最大值.

当 $Y_1 = 0.1, Y_2 = 0.1, u_m^1 = 0.3, u_m^2 = 0.3$ 时, 初值为 $C(0) = 2, X_1(0) = 2, X_2(0) = 1$, 得到 λ_1 的系数如图 2.

由图 2 看出 $\lambda_1 > 0$, 最优控制为 $u_1(t)$ 一直取最大值. 为了验证上述结果, 选取不同的 $u_1(t)$, 由图 3 可知, 只有在 $u_1(t)$ 取最大值时, $X_1(t)$ 才达到最大.

图2 λ_1 的系数图Fig.2 The coefficient diagram 2 of λ_1 图3 $u(t)$ 变化图Fig.3 The variation diagram of $u(t)$

5 结论

通过本文研究可得,酵母菌—红曲霉生产合生元的过程中,当底物流出速度是一个单调变量时,底物补充速度为一个 bang-bang 控制,且控制的转变取决于参数的选取,本文在运用 matlab 解方程组时, $u_2(t)$ 是一条双曲线,其存在渐进性,如果将 $u_2(t)$ 改为其他函数形式时,控制的结论也将变得完全不同。

参考文献:

- [1] 陈天龙,张敏.红曲霉和酵母菌混合发酵制备合生元的条件研究[J].饲料工业,2013,31(13):32-34.
- [2] 邹学娇.连续培养发酵中的最优控制问题[D].上海:复旦大学,2012.
- [3] 吕旭聪,翁星,韩妙坤,等.福建红曲中红曲菌的分离鉴定及菌株特性研究[J].中国食品学报,2012,12(2):88-97.
- [4] 刘双杰.基于 MATLAB 的微分方程组的数值计算[J].科技资讯,2009(6):238.
- [5] 黄晓红,胡振华.浅析龙格—库塔方法[J].黑龙江科技信息,2012(23):28.
- [6] 胡云卿.基于控制变量参数化的带约束最优控制问题计算方法[D].杭州:浙江大学,2013.
- [7] 马之恩,周义仓.常微分方程的定性及稳定性方法[M].北京:科学出版社,2001.
- [8] Lu L. Optimal inputs and sensitivities for parameter estimation in bioreactors [J]. Math Chem, 2010, 47(3): 1154-1176.
- [9] Polak E. On the role of optimality functions in numerical optimal control [J]. Annual Reviews in Control, 2011, 35(2): 247-253.
- [10] Feng Y Z, Cui C, Zhao H F, et al. Effect of koji fermentation on generation of volatile compounds in soy sauce production [J]. Int J Food Sci Technol, 2012, 48(3): 609-619.
- [11] Giri A, Osako K, Okamoto A, et al. Olfactometric characterization of aroma active compounds in fermented fish paste in comparison with fish sauce, fermented soy paste and sauce products [J]. Food Research International, 2010, 43(4): 1027-1040.
- [12] Kumar G, Lin C Y. Bioconversion of de-oiled Jatropha Waste (DJW) to hydrogen and methane gas by anaerobic fermentation; Influence of substrate concentration, temperature and pH [J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2013, 38(1): 63-72.
- [13] 黄晓红,胡振华.浅析龙格—库塔方法[J].黑龙江科技信息,2012(23):28.
- [14] Castillo L F D, da Silva A R F, Hernández S I, et al. Diffusion and Monod kinetics model to determine in vivo human corneal oxygen-consumption rate during soft contact lens wear [J]. Journal of Optometry, 2015, 8(1): 12-18.