文章编号:1673-0062(2016)01-0039-04

随机 SIR 流行病模型解的渐近性态

吴小花,廖新元*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:研究了一类随机 SIR 流行病模型.构建合适的 Lyapunov 函数,利用 Itô 公式,得出了该模型正解的全局存在唯一性;在该结论的基础上,讨论了随机模型的无病平衡点的渐近行为.在一些条件下,得出随机模型解的上确极限的最大值.

关键词:Itô 公式;Lyapunov 函数;随机干扰;SIR 模型;渐近行为

中图分类号:O175　　**文献标识码**:A

The Asymptotic Behavior of Stochastic SIR Model's Solution

WU Xiao-hua, LIAO Xin-yuan*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, a stochastic SIR model is investigated. Sufficient condition for the existence of the unique global positive solution is established by constructing suitable Lyapunov function and Itô formula. Based on the result, it proves the asymptotic behavior of disease-free equilibrium of the stochastic model. Under a simple condition, the maximum value of the upper limit of the stochastic model's solution was obtained.

key words: Itô formula; Lyapunov function; random perturbatons; SIR model; asymptotic behavior

0　引　言

流行病自古就是危害人类健康、生活的天敌.为了更好地预防和治疗流行病,控制其传播,各国相关部门一直对流行病进行着深入的研究.例如马知恩等人[1-2]系统地介绍了流行病动力学的建模思想、典型研究方法和主要研究成果.随后许多学者从各个角度对流行病的确定性数学模型进行了改进并做了许多工作[3-4].设所有的新生儿都是易感者,并且不考虑染病者的因病死亡,Anderson[5]等考虑了以下模型:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu; \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \mu I(t) - \gamma I(t); \\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 分别表示 t 时刻易感者、染病者、移出者在总人口中所占的比例,且所有参数

收稿日期:2015-08-27

作者简介:吴小花(1991-),女,土家族,湖南张家界人,南华大学数理学院硕士研究生.主要研究方向:微分方程与动力系统.*通讯作者.

均为正常数, $S(t)+I(t)+R(t)=1$; β 是感染率, μ 表示易感者、染病者以及恢复者的死亡率及出生率, γ 表示恢复率, $\beta,\mu,\gamma\in R_+$.其基本再生数 $R_0=\dfrac{\beta}{\mu+\gamma}$.该模型的两个平衡点分别是无病平衡点 $(S_0,I_0,R_0)=(1,0,0)$,地方病平衡点 $(S_0,I_0,R_0)=(\dfrac{\mu+\gamma}{\beta},\dfrac{\mu}{\mu+\gamma}-\dfrac{\mu}{\beta},\dfrac{\gamma}{\mu+\gamma}-\dfrac{\gamma}{\beta})$.

由于在现实世界,各类疾病传播过程中必然会受到环境中随机因素的干扰,而在很多情况下,这些干扰都不应该被忽略,因此,一些学者[6-7]对随机因子的干扰进行了研究.目前,王克在《随机生物数学模型》[8]一书中总结了如何在种群生态学中建立随机数学模型及处理方法.文献[9]中对随机L-V竞争模型解的渐近性态进行了研究,文献[10-11]分别对 SIRS,SIR 流行病模型中的系数添加环境白噪声的干扰,建立了相应的随机流行病模型,并研究了其解的渐近行为.本文考虑环境白噪声对 SIR 模型(1)的随机干扰,得到随机模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=[-\beta S(t)I(t)-\mu S(t)+\mu]\mathrm{d}t+\\ \sigma_1S(t)\mathrm{d}B_1(t);\\ \mathrm{d}I(t)=[\beta S(t)I(t)-\mu I(t)-\gamma I(t)]\mathrm{d}t+\\ \sigma_2I(t)\mathrm{d}B_2(t);\\ \mathrm{d}R(t)=[\gamma I(t)-\mu R(t)]\mathrm{d}t+\\ \sigma_3R(t)\mathrm{d}B_3(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中σ_i^2表示噪声强度, $B(t)=(B_1(t),B_2(t),B_3(t))^{\mathrm{T}}$是标准的布朗运动.

在本文中,设 $(\Omega,\{F_t\}_{t\geq0},P)$ 是一个完备的概率空间, $\{F_t\}_{t\geq0}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数并且满足通常条件(即右连续, F_0 包含所有零测集), $B(t)=(B_1(t),B_2(t),B_3(t))^{\mathrm{T}}$ 是定义在该概率空间的布朗运动.

1 主要结论

定理 1 对于任意给定的初值 $(S(0),I(0),R(0))\in R_+^3$,当 $t\geq0$ 时,模型(2)存在唯一的全局正解 $(S(t),I(t),R(t))$.

证明 因为系统(2)的系数满足局部 Lipschtiz 连续,所以对于任意的初值 $(S(0),I(0),R(0))\in R_+^3$,系统存在唯一的局部解 $(S(t),I(t),R(t))\in R^3$, $t\in[0,\tau_e)$, τ_e 表示爆炸时间.为了证明解的全局性,只需要证明 $\tau_e=+\infty$ a.s.

设 $k_0>0$ 充分大,使得 $S(0)\in[\dfrac{1}{k_0},k_0]$, $I(0)\in[\dfrac{1}{k_0},k_0]$, $R(0)\in[\dfrac{1}{k_0},k_0]$,则对任意整数 $k\geq k_0$,定义停时:

$$\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e):S(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)$$

$$I(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right),R(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\},$$

令 $\inf\Phi=\infty$,显然,当$k\to+\infty$ 时, τ_k 是递增的.令 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k$,则 $\tau_\infty\leq\tau_e$ a.s.若证得 $\tau_\infty=+\infty$ a.s.那么 $\tau_e=+\infty$ a.s.因此,只需证明 $\tau_e=+\infty$ a.s.即对全部 $T>0$,有当$k\to+\infty$ 时$p\{\tau_k\leq T\}\to0$.

定义 Lyapunov 函数

$$V_1(S,I,R)=S-a-a\ln\frac{S}{a}+I-1-$$

$$\ln I+R-1-\ln R,$$

其中 a 是待定正常数.容易看出对于任意 $(S,I,R)^{\mathrm{T}}\in R_+^3$,满足 $V(S,I,R)\geq0$.

由 Itô’s 公式

$$\mathrm{d}V_1=LV_1\mathrm{d}t+(1-\frac{a}{S})\sigma_1S\mathrm{d}B_1(t)+$$

$$(1-\frac{1}{I})\sigma_2I\mathrm{d}B_2(t)+(1-\frac{1}{R})\sigma_3R\mathrm{d}R_3(t)$$

$$=LV_1\mathrm{d}t+\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)+$$

$$\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(R-1)\mathrm{d}R_3(t),$$

其中

$$LV_1=(1-\frac{a}{S})(-\beta SI-\mu S+\mu)+$$

$$(1-\frac{1}{I})(\beta SI-\mu I-\gamma I)+(1-\frac{1}{R})(\gamma I-\mu R)+$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{S^2}\cdot\sigma_1^2\cdot S^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{I^2}\cdot\sigma_2^2\cdot I^2+$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\sigma_3^2\cdot R^2=-(\mu+\beta)S+(a\beta-\mu)I-$$

$$\mu R+(\mu+a\mu+\frac{1}{2}a\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2+\mu)-$$

$$\frac{a\mu}{S}-\frac{\gamma I}{R}$$

则

$$\mathrm{d}V_1=[(\mu+a\mu+\frac{1}{2}a\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2+\mu)-$$

$$(\mu+\beta)S+(a\beta-\mu)I-\mu R-\frac{a\mu}{S}-\frac{\gamma I}{R}]\mathrm{d}t+$$

$$\sigma_1(S-a)\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)+$$

$$\sigma_3(R-1)\mathrm{d}B_3(t)$$

令 $a\beta-\mu=0$,即 $a=\dfrac{\mu}{\beta}$,故

$$\mathrm{d}V_1=[(\mu+\frac{\mu^2}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\mu\sigma_1^2}{\beta}+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2+\mu)-(\mu+\beta)S-\mu R-\frac{\mu^2}{\beta S}-\frac{\gamma I}{R}]\mathrm{d}t+\sigma_1(S-\frac{\mu}{\beta})\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(R-1)\mathrm{d}B_3(t)\leqslant$$
$$[(\mu+\frac{\mu^2}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{\mu\sigma_1^2}{\beta}+\frac{1}{2}\sigma_2^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2+\mu)]\mathrm{d}t+\sigma_1(S-\frac{\mu}{\beta})\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(R-1)\mathrm{d}B_3(t)=:K\mathrm{d}t+\sigma_1(S-\frac{\mu}{\beta})\times\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(R-1)\mathrm{d}B_3(t),$$

其中 $K=\mu+\dfrac{\mu^2}{\beta}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu\sigma_1^2}{\beta}+\dfrac{1}{2}\sigma_2^2+\dfrac{1}{2}\sigma_3^2+\mu.$

对上述不等式从 0 到 $\tau_k\wedge T$ 积分

$$\int_0^{\tau_k\wedge T}\mathrm{d}V_1\leqslant\int_0^{\tau_k\wedge T}K\mathrm{d}t+\int_0^{\tau_k\wedge T}[\sigma_1(S-\frac{\mu}{\beta})\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2(I-1)\mathrm{d}B_2(t)+\sigma_3(R-1)\mathrm{d}B_3(t)],$$

不等式两边同时取期望

$$EV_1(S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T))\leqslant K(\tau_k\wedge T)+V_1(S(0),I(0),R(0))\leqslant KT+V_1(S(0),I(0),R(0)).$$

令 $\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}$,由 τ_k 的定义知,$S(\tau_k,\omega)$,$I(\tau_k,\omega)$,$R(\tau_k,\omega)$ 中至少有一个等于 k 或 $\dfrac{1}{k}$,故

$$V_1(S(\tau_k),I(\tau_k),R(\tau_k))\geqslant\min\{k-a-a\ln\frac{k}{a},\frac{1}{k}-a-a\ln\frac{1}{ak},k-1-\ln k,\frac{1}{k}-1-\ln\frac{1}{k}\}=:h(k),$$

显然 $\lim\limits_{k\to\infty}h(k)=\infty$.由

$$KT+V_1(S(0),I(0),R(0))\geqslant EV_1(S(\tau_k\wedge T),I(\tau_k\wedge T),R(\tau_k\wedge T))\geqslant p\{\tau_k\leqslant T\}V_1(S(\tau_k),I(\tau_k),R(\tau_k))\geqslant p\{\tau_k\leqslant T\}h(k),$$

当 $k\to\infty$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}h(k)=\infty$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}p\{\tau_k\leqslant T\}=0$,又因为 $T>0$ 是任意的,则有 $p\{\tau_k<+\infty\}=0$,$p\{\tau_k=+\infty\}=1$,因此 $\tau_\infty=\infty$ a.s. 定理 1 得证.

定理 2　若 $R_0\leqslant1$,$2\sigma_1^2<\mu$,$\sigma_2^2<2\mu+\gamma$,$\sigma_3^2<\dfrac{4\mu^2}{2\mu+\gamma}$,则对任意初值,随机模型(2)的解有如下性质:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t[(S(r)-1)^2+I^2(r)+R^2(r)]\mathrm{d}r\leqslant\frac{2\sigma_1^2}{k}\qquad(3)$$

证明　令 $u=S-1,v=I,w=R$,即 $S=u+1$,$I=v,R=w$,代入模型,得

$$\begin{cases}\mathrm{d}u=(-\beta uv-\beta v-\mu u)\mathrm{d}t+\sigma_1(u+1)\mathrm{d}B_1(t);\\ \mathrm{d}v=(\beta uv+\beta v-\mu v-\gamma v)\mathrm{d}t+\sigma_2v\mathrm{d}B_2(t);\\ \mathrm{d}w=(\gamma v-\mu w)\mathrm{d}t+\sigma_3w\mathrm{d}B_3(t).\end{cases}\qquad(4)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V_2(u,v,w)=(u+v)^2+(u+v)w+w^2+c_1v+c_2w^2.$$

由 Itô's 公式

$$\mathrm{d}V_2=[2(u+v)+w]\mathrm{d}u+[2(u+v)+w+c_1]\mathrm{d}v+[(u+v)+2w+2c_2w]\mathrm{d}w+\sigma_1^2(u+1)^2\mathrm{d}t+\sigma_2^2v^2\mathrm{d}t+(1+c_2)\sigma_3^2w^2\mathrm{d}t=LV_2\mathrm{d}t+(2u+2v+w)\sigma_1(u+1)\mathrm{d}B_1(t)+(2u+2v+w+c_1)\sigma_2v\mathrm{d}B_2(t)+(u+v+2w+2c_2w)\sigma_3w\mathrm{d}B_3(t),\qquad(5)$$

其中

$$LV_2=[2(u+v)+w](-\beta uv-\beta v-\mu u)+[2(u+v)+w+c_1](\beta uv+\beta v-\mu v-\gamma v)+[(u+v)+2w+2c_2w](\gamma v-\mu w)+\sigma_1^2(u+1)^2+\sigma_2^2v^2+(1+c_2)\sigma_3^2w^2=-2\mu u^2-(2\mu+\gamma)v^2-(2\mu+2c_2\mu)w^2-(4\mu-c_1\beta+\gamma)uv-2\mu uw+(c_1\beta-c_1\mu-c_1\gamma)v+(\gamma-2\mu+2c_2\gamma)vw+\sigma_1^2(u+1)^2+\sigma_2^2v^2+(1+c_2)\sigma_3^2w^2.\qquad(6)$$

令 $4\mu-c_1\beta+\gamma=0$,$\gamma-2\mu+2c_2\gamma=0$,即 $c_1=\dfrac{4\mu+\gamma}{\beta}$,$c_2=\dfrac{2\mu-\gamma}{2\gamma}$,代入式(6),则

$$LV_2=-2\mu u^2-(2\mu+\gamma)v^2-(2\mu+2c_2\mu)w^2-(4\mu-c_1\beta+\gamma)uv-2\mu uw+(c_1\beta-c_1\mu-c_1\gamma)v+(\gamma-2\mu+2c_2\gamma)vw+\sigma_1^2(u+1)^2+\sigma_2^2v^2+(1+c_2)\sigma_3^2w^2$$
$$=-2\mu u^2-(2\mu+\gamma)v^2-\frac{2\mu^2+\mu\gamma}{\gamma}w^2-2\mu uw-c_1\beta(\frac{1}{R_0}-1)v+\sigma_1^2u^2+2\sigma_1^2u+\sigma_1^2+\sigma_2^2v^2+\frac{2\mu+\gamma}{2\gamma}\sigma_3^2w^2$$
$$\leqslant-\mu u^2+2\sigma_1^2u^2-(2\mu+\gamma)v^2+\sigma_2^2v^2-\frac{2\mu^2}{\gamma}w^2+\frac{2\mu+\gamma}{2\gamma}\sigma_3^2w^2+2\sigma_1^2.\qquad(7)$$

当定理中的条件满足,使得 u^2, v^2, w^2 项的系数为负时,有 $LV_2 \leqslant 0$.

将不等式(7)代入式(5),并对式(5)两边积分,求期望,

$$0 \leqslant E[V_2(u(t),v(t),w(t))] \leqslant E\int_0^t \{(-\mu u^2 + 2\sigma_1^2 u^2) - [(2\mu+\gamma)v^2 - \sigma_2^2 v^2] - [\frac{2\mu^2}{\gamma}w^2 - \frac{2\mu+\gamma}{2\gamma}\sigma_3^2 w^2] + 2\sigma_1^2\} \mathrm{d}r.$$

所以

$$\frac{1}{t}E\int_0^t \{(-\mu u^2 + 2\sigma_1^2 u^2) - [(2\mu+\gamma)v^2 - \sigma_2^2 v^2] - [\frac{2\mu^2}{\gamma}w^2 - \frac{2\mu+\gamma}{2\gamma}\sigma_3^2 w^2] + 2\sigma_1^2\} \mathrm{d}r \leqslant 2\sigma_1^2. \tag{8}$$

令 $u = S - 1, v = I, w = R$,代入式(8),且不等式两边同时除以 k,则

$$\frac{1}{t}E\int_0^t [(S(r)-1)^2 + I^2(r) + R^2(r)]\mathrm{d}r \leqslant \frac{2\sigma_1^2}{k},$$

我们选择常数 k,使得

$$k = \min\{(\mu - 2\sigma_1^2), [(2\mu+\gamma) - \sigma_2^2], [\frac{2\mu^2}{\gamma} - \frac{2\mu+\gamma}{2\gamma}\sigma_3^2]\},$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t [(S(r)-1)^2 + I^2(r) + R^2(r)]\mathrm{d}r \leqslant \frac{2\sigma_1^2}{k}.$$

2 数值模拟

下面将使用文献[12]中的著名的 Milstein 数值仿真方法来说明主要结果.首先考虑模型(2)相对应的离散化系统:

$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k + (-\beta S_k I_k - \mu S_k + \mu)\Delta t + \\ \sigma_1 S_k \sqrt{\Delta t}\xi_k + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_k^2(\xi_k^2 - 1)\Delta t; \\ I_{k+1} = I_k + (\beta S_k I_k - \mu I_k - \gamma I_k)\Delta t + \\ \sigma_2 I_k \sqrt{\Delta t}\eta_k + \frac{1}{2}\sigma_2^2 I_k^2(\eta_k^2 - 1)\Delta t; \\ R_{k+1} = R_k + (\gamma I_k - \beta R_k)\Delta t + \\ \sigma_3 R_k \sqrt{\Delta t}\vartheta_k + \frac{1}{2}\sigma_3^2 R_k^2(\vartheta_k^2 - 1)\Delta t \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\xi_k, \eta_k, \vartheta_k$ 都是服从 $N(0,1)$ 的 Gauss 随机变量,然后再使用上面所述数值方法和 Matlab 软件,做出数值仿真图(如图 1).

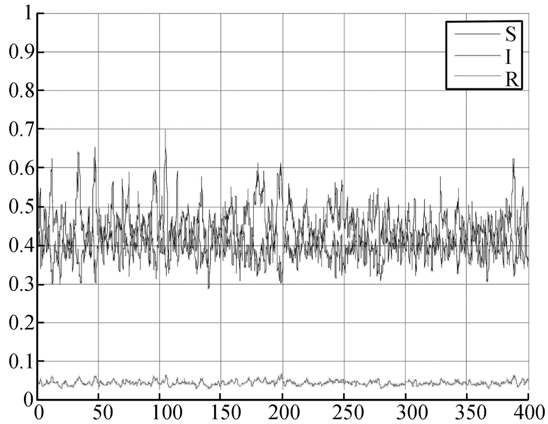

图 1 随机 SIR 模型解的变化图

Fig.1 The solution's variation of stochastic SIR model

令 $\beta = 2, \mu = 0.6, \gamma = 0.2, \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.1$,容易看出满足当 $t \geqslant 0$ 时,模型(9)存在全局正解 $(S(t), I(t), R(t))$.

参考文献:

[1] 马知恩,周义仓,王稳地,等.传染病动力学的数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004.

[2] 马知恩,周义仓,吴建宏.传染病建模与动力学[M].北京:高等教育出版社,2009.

[3] Song M, Ma W, Takeuchi Y. Permanence of a delayed SIR epidemic model with density dependent birth rate [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 201(2): 389-394.

[4] House T, Keeling M J. Deterministic epidemic models with explicit household structure[J]. Mathematical Biosciences, 2008, 213(1): 29-39.

[5] Anderson R M, May R M. Population biology of infectious diseases[J]. Nature, 1979, 280(5721): 361-367.

[6] Fan D J, Wand K, Hong L. Mathematical problems in engineering[M]. USA: Hindawi Publishing Corporation, 2009.

[7] May R M. Stability and complexity in model ecosystems [M]. NJ: Princeton University Press, 2001.

[8] 王克.随机生物数学模型[M].北京:科学出版社,2010.

[9] Liu Q. The effects of time-dependent delays on global stability of stochastic Lotka-Volterra competitive model[J]. Physica A, 2015, 420(C): 108-115.

[10] 赵亚男.随机 SIRS 模型正解的渐近性态[J].长春大学学报,2011,21(2):74-76.

[11] 孟玲玲.一类随机 SIR 流行病模型的渐近行为研究[J].生物数学学报,2013,28(1):47-52.

[12] Hu Y, Mohammed S E A, Yan F. Discrete-time approximations of stochastic delay equations: the Milstein scheme[J]. Ann. Probab, 2004, 32(1A): 265-314.