文章编号:1673 - 0062(2015)02 - 0081 - 03

Heston 模型下的欧式一篮子期权定价

张　敏,朱　晖,蔡秋娥

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:本文在 Heston 模型下,对资产的波动率满足 CIR 的模型的欧式一篮子期权定价进行研究,得到一篮子看涨期权的定价公式.

关键词:Heston 模型;浮动利率;欧式一篮子看涨期权

中图分类号:F830;O211.6　　**文献标识码**:

Heston Model of European Basket Options Pricing

ZHANG Min, ZHU Hui, CAI Qiu-e

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Under the Heston model, we conside European abasket options with a floating rate, obtain European abasket options pricing formula.

key words: Heston model; floating rate; European abasket options

0 引　言

欧式一篮子期权价格为期权有效期内两资产价格乘积与执行价格的差值. 一篮子期权要比单个期权的投资在费用上更有优势,同时还可以把具有负相关性的资产进行组合,这样投资更能降低风险,对一篮子期权定价问题进行研究是非常有意义.

在一篮子期权定价理论中[1-3],在不同的条件下已经有很多的定价公式了[4-5],但定价问题一直没有得到很好的解决. 本文尝试考虑基于 Heston 模型下对欧式一篮子期权进行研究. 本文在期权定价中考虑股票价格满足 Heston 模型[6-7]时,得到了两资产欧式一篮子看涨期权的价格公式.

1　Heston 模型

Heston 模型假设资产价格满足几何布朗运动,并且资产的波动率满足 CIR[8-9] 的模型,用它来刻画股票价格更接近实际.

设(Ω, F, P)是一个概率空间,$W_t^s, t\geq 0$ 为(Ω, F, P)概率空间上的布朗运动,其中 F_t 是由 W^s 与 W^V 联合生成的自然 σ 代数流.

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r\mathrm{d}t + \sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^s \tag{1}$$

$$\mathrm{d}v_t = \alpha(\beta - v_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_v\sqrt{v_t}\,\mathrm{d}W_t^v \tag{2}$$

收稿日期:2014 - 11 - 10

基金项目:衡阳市科技局基金资助项目(2012KJ17)

作者简介:张　敏(1977 -),女,辽宁沈阳人,南华大学数理学院讲师,硕士. 主要研究方向:金融数学.

$$\mathrm{d}W_t^s \mathrm{d}W_t^v = \rho \mathrm{d}t \tag{3}$$

其中 S_t 表示资产在 t 时刻的资产价格,ρ 为 W_t^s 与 W_t^v 的相关系数,r 表示无风险利率,v_t 表示资产在当前时刻的波动率,$\alpha>0,\beta>0,\sigma_v>0$ 且均为常数,其中 β 是波动率的回复速度,α/β 是波动率的长期平均水平.

定理:Heston 模型的欧式一篮子看涨期权的价格为

$$V_e^c(S,t.T,r,v) = S_t\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi_1(u)}{iu}\right]\mathrm{d}u\right\} - Ke^{-r\tau}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi_2(u)}{iu}\right]\mathrm{d}u\right\} \tag{4}$$

其中 $\phi_1(u)$ 和 $\phi_2(u)$ 分别是测度 Q 和 P 下特征函数,且有 $\tau=T-t$

$$\phi_1(u) = \left[\frac{2\gamma_v}{2\gamma_v+[\beta-\gamma_v-(1+iu)\rho\sigma\sigma_v](1-e^{-\gamma_v\tau})}\right]^{\frac{2\alpha}{\sigma_v^2}} \times \exp\left\{iu\ln S_t+\frac{\alpha(\beta-\gamma_v)\tau}{\sigma_v^2}-\frac{(1+iu)\alpha\sigma\rho\tau}{\sigma_v}+iur\tau+C_1v_t\right\} \tag{5}$$

$$\phi_2(u) = \left[\frac{2\gamma_v}{2\bar{\gamma}_v+[\beta-\bar{\gamma}_v-iu\rho\sigma\sigma_v](1-e^{-\bar{\gamma}_v\tau})}\right]^{\frac{2\alpha}{\sigma_v^2}} \times \exp\left\{iu\ln S_t+\frac{\alpha(\beta-\bar{\gamma}_v)\tau}{\sigma_v^2}-\frac{iu\alpha\sigma\rho\tau}{\sigma_v}+iur\tau+C_2v_t\right\} \tag{6}$$

其中

$$C_1 = \frac{iu(1+iu)\sigma^2(1-e^{-\gamma_v\tau})}{2\gamma_v+[\beta-\gamma_v-(1+iu)\rho\sigma\sigma_v](1-e^{-\gamma_v\tau})}$$

$$C_2 = \frac{iu(iu-1)\sigma^2(1-e^{-\bar{\gamma}_v\tau})}{2\bar{\gamma}_v+[\beta-\bar{\gamma}_v-iu\rho\sigma\sigma_v](1-e^{-\bar{\gamma}_v\tau})}$$

$$\gamma_v = \sqrt{[\beta-(1+iu)\rho\sigma\sigma_v]^2-iu(1+iu)\sigma^2\sigma_v^2}$$

$$\bar{\gamma}_v = \sqrt{[\beta-iu\rho\sigma\sigma_v]^2-iu(1-iu)\sigma^2\sigma_v^2}$$

证明:

$$V_e(S,t,r,v) = E\{e^{-r\tau}(S_t-K)^+ \mid F_t\} \triangleq E_t[e^{-r\tau}(S_t-K)^+] \tag{7}$$

将测度 P 转变为测度 Q,它的 Randon-Nikodym 导数为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = e^{-r(T-t)}\frac{S_T}{S_t}$$

为了得到 F^Q 的解需要求出其特征函数[10]

$$\phi(u) = E_t^Q[\exp\{iuX_t\}]$$

利用 Fourier 公式

$$F(x) = P(X\leqslant x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\phi(-u)e^{iux}}{iu}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi(u)}{iu}\right]\mathrm{d}u$$

Re[·]表示代数式的实部,因此式(7)中的分布函数分别为

$$F^Q(\ln S_T\geqslant \ln K) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\times\int_0^{+\infty}\frac{\phi_1(-u)e^{iu\ln K}-\phi_1(u)e^{-iu\ln K}}{iu}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\,\frac{\phi_1(u)e^{iu\ln K}}{iu}\mathrm{d}u \tag{8}$$

$$F^P(\ln S_T\geqslant \ln K) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\times\int_0^{+\infty}\frac{\phi_2(-u)e^{iu\ln K}-\phi_2(u)e^{-iu\ln K}}{iu}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\,\frac{\phi_2(u)e^{-iu\ln K}}{iu}\mathrm{d}u \tag{9}$$

将以上的结果带入式(7)得到公式(4)

$$V_e^c(S,t.T,r,v) = S_t\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi_1(u)}{iu}\right]\mathrm{d}u\right\} - Ke^{-r\tau}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}R\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi_2(u)}{iu}\right]\mathrm{d}u\right\}$$

证毕.

利用以上推导的结果可以得到,标的资产为 $w_1S_{1t}^{w_1}+w_2S_{2t}^{w_2}$,其中 $w_1+w_2=1$ 欧式一篮子期权价格

$$V_{e.g}^c = S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}F^{Qs}(X_{1T}\leqslant -c_1,X_{2T}\leqslant -c_2) - Ke^{-rT}F(X_{1T}\leqslant -c_1,X_{2T}\leqslant -c_2)$$

证明:

$$\begin{aligned} V_{e.g}^c &= E[e^{-rT}(S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}-K]I(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}-K)] \\ &= S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}E[e^{-rT}\frac{S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}}{S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}}I(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}-K)] - ke^{-rT}E[I(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}-K)] \end{aligned}$$

利用 Radon-Nikodym 导数为 $\frac{\mathrm{d}Q_s}{\mathrm{d}p}=e^{-rT}\frac{S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}}{S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}}$ 令 $-\ln S_{it}=X_{it}, i=1,2$,其中 w_1,w_2 为两种资产所占份额

$$\begin{aligned} V_{e.g}^c &= S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}E^{Qs}[I(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}-K)] - ke^{-rT}E[I(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}-K)] \\ &= S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}F^{Qs}(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}\geqslant K) - ke^{-rT}F(S_{1T}^{w_1}S_{2T}^{w_2}-K) \\ &= S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}F^{Qs}(w_1\ln S_{1T}+w_2\ln S_{2T}\geqslant \ln K) - ke^{-rT}F(w_1\ln S_{1T}^{w_1}+w_2\ln S_{2T}^{w_2}\geqslant \ln K) \\ &= S_{1t}^{w_1}S_{2t}^{w_2}F^{Qs}(X_{1T}\leqslant -c_1,X_{2T}\leqslant -c_2) - \end{aligned}$$

$$Ke^{-rT}F(X_{1T}\leqslant -c_1, X_{2T}\leqslant -c_2)$$

其中 $c_1>0, c_2>0$.

3　结　论

在 Heston 模型假设,标的资产的波动率满足 CIR 模型,利用 Fourier 逆转公式,推广得出一篮子看张期权定价公式.

参考文献:

[1] Hull J C. 期权,期货和其他衍生产品[M]. 北京:华夏出版社,2003.

[2] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

[3] 雍炯敏,刘道百. 数学金融学[M]. 上海:上海人民出版社,2003.

[4] Bladt M, Rydberg T H. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumption[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22(1): 65-73.

[5] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political Economy, 1973(81): 637-659.

[6] Deelstra G, Grasselli M, Koehl P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33(1): 189-207.

[7] Battocchio P, Menoncin F. Optimal pension management in a stochastic framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34(1): 79-95.

[8] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. An intertemporal general equilibrium model of asset prices[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 363-384.

[9] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates[J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385-407.

[10] 邓国和. 市场结构风险下双指数跳扩散模型期权定价与最优投资消费[D]. 长沙:湖南师范大学,2006.

(上接第 65 页)

[8] Zhang M, Li J, Li H, et al. Morphology-dependent redox and catalytic properties of CeO_2 nanostructures: Nanowires, nanorods and nanoparticles[J]. Catalysis Today, 2009, 148(1): 179-183.

[9] Shen G, Liu H, Wang Q, et al. Self-template hydrothermal synthesis of CeO_2 hollow nanospheres[J]. Journal of Nan-oparticle Research. 2012, 14(6): 1-8.

[10] Chen Y, Lv S H, Chen C L, et al. Controllable Synthesis of Ceria Nanoparticles with Uniform Reactive {100} Exposure Planes[J]. The Journal of Physical Chemistry C, 2014, 118(8): 4437-4443.

[11] 栾宝平. 不同形貌微/纳米氧化铈的制备及光催化性能的研究[D]. 上海:上海师范大学,2011.

[12] Li L, Chen Y S. Preparation of nanometer-scale CeO_2 particles via a complex thermo-decomposition method[J]. Materials Science and Engineering A, 2005, 406(1/2): 180-185.