文章编号:1673 - 0062(2014)03 - 0073 - 03

# 偶数阶 Unitary Cayley 图的零化度

姜 琴,王红勇*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

**摘 要**:$n$ 阶 Unitary Cayley 图的顶点集是 $Z_n = \{0,1,\cdots,n-1\}$,若顶点 $a$ 与 $b$ 满足 $\gcd(a-b,n)=1$,则顶点 $a$ 与 $b$ 不相邻. 本文通过偶数阶 Unitary Cayley 图的邻接矩阵的元素排列规律,应用数学归纳法和数论中的一些常用等式,得到了偶数阶 Unitary Cayley 图的零化度.

**关键词**:Unitary Cayley 图;零化度;谱

**中图分类号**:O175.5 **文献标识码**:A

## On the Nullity of Even-Order Unitary Cayley Graphs

**JIANG Qin, WANG Hong-yong***

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

**Abstract**: The Unitary Cayley graph of order $n$ has vertex set $Z_n = \{0,1,\cdots,n-1\}$. Vertices $a,b$ are adjacent, if $\gcd(a-b,n)=1$, otherwise, $a,b$ are nonadjacent. The nullity of Unitary Cayley graph with order even is obtained by mathematical induction and some well-known equations in number theory.

**key words**: Unitary Cayley graph; nullity; spectrum

图 $G$ 的邻接矩阵的特征值 0 的重数称为图 $G$ 的零化度[1-2],记作 $\eta(G)$. 邻接矩阵的秩称为图 $G$ 的秩,记作 $r(G)$. 对于 $n$ 阶图 $G$,$\eta(G)=n-r(G)$. 由于分子图的零化度大于 0 时,对应的化合物活性很强,不稳定,甚至不存在. 所以 19 世纪 70 年代分子图的零化度开始应用在量子化学的研究中.

图的邻接矩阵是循环矩阵,称为循环图. 邻接矩阵的特征值全为整数的图称为整图,$n$ 阶 Unitary Cayley 图是最简单的整循环图, 我们记为 $UCG_n$. 设图 $UCG_n$ 具有顶点集 $Z_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$ 和边集 $E(UCG_n)=\{(a,b)\mid a,b\in Z_n,\gcd(a-b,n)=1\}$ (gcd( · , · )是最大公因子). Unitary Cayley 图有非常好的对称性,并且有很多相关结论把图论与数论联系了起来. 关于 $UCG_n$ 的相关性质可参看参考文献[3-8]. W. klotz, T. Sander 在文献[8]中研究了 Unitary Cayley 图色数,团数,独立集,直径和点连通度. 在文献[9]中,J. W. Sander 得到了阶数为素数幂的整循环图的能量.

**收稿日期**:2014 - 06 - 05

**基金项目**:湖南省自然科学基金资助项目(14JJ6020);衡阳市科技局基金资助项目(2011KJ4;2013KJ20)

**作者简介**:姜 琴(1980 - ),女,湖南益阳人,南华大学数理学院讲师,硕士. 主要研究方向:化学图论. *通讯作者.

## 1 相关命题和引理

对于正整数 $n$,欧拉函数是小于或等于 $n$ 的数中与 $n$ 互质的数的个数. 用 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数,则有 $\varphi(n)=n\prod_{p}(1-1/p)$,这里 $p$ 取遍 $n$ 的所有素因子.

众所周知,当 $n$ 为素数时,$UCG_n$ 是 $n$ 阶完全图,此时,$UCG_n$ 的特征值为 $\lambda_1=n-1,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=-1$,于是,

**命题 1** 如果 $n$ 是素数,那么 $\eta(UCG_n)=0$.

另外,若 $n=2^k(k\in Z^+)$,因为 $\varphi(2^k)=2^{k-1}=n/2$,因此 $UCG_n$ 是 $\varphi(n)$ - 正则的完全二部图. 于是得到下面的结论.

**命题 2** 如果 $n=2^k(k\in Z^+)$,那么 $\eta(UCG_n)=n-2$.

下面介绍后面将要用到的两个重要引理.

**引理 3**[10] 设 $C_n=circ(c_n,c_1,\cdots,c_{n-1})$ 是 $n$ 阶循环矩阵,$p_n(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$ 是最高次数为 $n-1$ 的多项式. 若记方程 $\lambda^n-1=0$ 的 $n$ 阶幂等根为 $\lambda_k,0\leqslant k\leqslant n-1$,则 $C_n$ 的特征值为 $p_n(\lambda_k)$.

**引理 4**[11] 当 $0\leqslant r\leqslant n-1$ 时,如果 $n/\gcd(r,n)$ 有 $s$ 个不同的值,分别记为:$m_1,m_2,\cdots,m_s$,那么

$$\varphi(m_1)+\varphi(m_2)+\cdots+\varphi(m_s)=n.$$

## 2 主要结论

以下均假设图 $UCG_n$ 是偶数阶的. 由于两个偶数的最大公因子不是 1,因此考虑把 $UCG_n$ 的顶点集 $Z_n$ 分成两个集合:$Y_1=\{1,3,\cdots,n-1\}$ 和 $Y_2=\{0,2,\cdots,n\}$. 当 $n$ 只有两个不同的素因子时,我们令 $n=2^{k_1}p^{k_2}=2pq$,其中 $p$ 是素数,$k_1,k_2\in Z^+$. 不难知道,对 $UCG_n$ 的邻接矩阵做第一种行,列初等变换可以表示为下面的形式

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & B\\ B^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}.$$

其中矩阵 $B$ 称为二部图 $UCG_n$ 顶点集 $Y_1$ 与 $Y_2$ 的“关联”矩阵. 矩阵 $B$ 的列对应的顶点为 $1,3,\cdots,n-1$. 矩阵 $B$ 的行对应顶点为 $0,2,\cdots,n$,因为图 $UCG_n$ 的邻接矩阵 $A$ 是循环矩阵,所以 $B$ 也是循环矩阵.

**定义 5** 若循环矩阵 $A$ 可以表述为 $A=circ(a_1,\cdots,a_p,a_1,\cdots,a_p,a_1,\cdots,a_p)$,则称 $p$ 是 $A$ 的循环周期.

记 $B=circ(b_0,\cdots,b_{p-1},b_p,\cdots,b_{2p-1},\cdots,b_{(q-1)p},\cdots,b_{pq-1}$,将矩阵 $B$ 的第一行元素按照从左到右的顺序分成 $q$ 个部分,那么每一部分有 $p$ 个元素. 于是,可以得到

**命题 6** 设 $n=2^sp^t,p\neq 2$ 是素数,$s,t\in Z^+$,$s\geqslant 2$ 或者 $t\geqslant 2$. 那么对于式(1)中的关联矩阵 $B$,下面的结论成立.

(i) $p$ 是 $B$ 的循环周期;

(ii) $b_i=\begin{cases}0, i=\dfrac{p-1}{2}\\ 1,其他\end{cases}$.

**证明** (i) 设 $m$ 是奇数,显然 $\gcd(m,n)\neq 1$ 成立当且仅当 $p|m$. 由于 $\gcd(j,n)$ 与 $\gcd(j+2p,n)$ 同时等于 1,或同时不等于 1,$(j=1,3,\cdots,n-2p-1)$. 因此,

$$b_0=b_p=\cdots=b_{n/2-p},\cdots,b_{p-1}=b_{2p-1},\cdots=b_{(q-1)}p,\cdots=b_{n/2-1},$$

所以 $p$ 是 $B$ 的循环周期.

(ii) 根据 $UCG_n$ 的定义,有

$$b_i=\begin{cases}1,\gcd(2i+1,p)=1;\\ 0,\gcd(2i+1,p)=p.\end{cases}(i=0,1,\cdots,p-1).$$

设 $2i+1=kp,k\in Z^+$,则有 $0\leqslant i=\dfrac{kp-1}{2}\leqslant p-1$,即 $k\leqslant 2-1/p$,所以 $k=1$,进一步可得 $i=\dfrac{p-1}{2}$,$b_i=0$;否则,对于 $0\leqslant i\leqslant p-1$ 有 $b_i=1$. 所以(ii)成立.

**例 7** 对于 $UCG_{12}$,12 有素因子 2,3,式(1)中的“关联”矩阵 $B=circ(1,0,1,1,0,1)$. 这样可以很容易计算 $B$ 的秩,从而得到 $UCG_{12}$ 的零化度. 对 $B=circ(1,0,1,1,0,1)$ 的做行初等变换和列初等变换,得

$$circ(1,0,1,1,0,1)=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&1\\1&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

对命题 6 中的矩阵 $B$ 做矩阵的初等变换,都有下面的形式

$$B\rightarrow\begin{bmatrix}C_{p\times p} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $C_{p\times q}$ 是一个循环矩阵,每一行和每一列只有一个0,其余元素为1. 因此 $r(B)=p$,$r(A)=2p$. 所以 $\eta(A)=n-2p$.

**命题8**　设 $n=2p$,$p\neq 2$ 是素数. 若记 $UCG_n$ 的邻接矩阵 $A$ 中的关联矩阵为 $B=circ(b_0,\cdots,b_{(p+1)/2},\cdots,b_p)$ 的元素,则有 $b_{(p+1)/2}=0$;$b_i=1$ $(i\neq\frac{p+1}{2}$,因为 $r(B)=p$ 所以有 $r(A)=2p$. 如果 $n$ 只有2个不同的素因子2和 $p$,可以用命题6和命题8得到 $UCG_n$ 的零化度. 于是有下面的结论

**引理9**　如果 $n$ 只有2个不同的素因子2和 $p$,那么 $\eta(UCG_n)=n-2p$.

类似地,所有的偶数阶 Unitary Cayley 图邻接矩阵的元素都有这样的排列规律. 如果 $n$ 有 $t+1$ 个不同的素因子 $2,p_1,\cdots,p_t$,不难得到下列结论:(a)若 $n=2p_1\cdots p_t$,则 $UCG_n$ 的邻接矩阵 $A$ 中的关联矩阵 $B$ 是次对称循环矩阵. (b)若 $n=2^m p_1^{n_1}\cdots p_t^{n_t}$,$m\geqslant 2$ 或者 $n_i\geqslant 2(i=1,\cdots,t)$,则 $p_1\cdots p_t$ 是 $B$ 的循环周期.

Unitary Cayley 图的零化度在参考文献[7]中已经得到,在这里我们用数学归纳法计算 Unitary Cayley 图的零化度.

**定义10**[11]　Möbious 函数 $\mu(n)$ 的定义域是 $N$;$\mu(1)=1$;当 $n$ 存在平方因子时,$\mu(n)=0$;当 $n$ 是素数或奇数个不同素数之积时,$\mu(n)=-1$;当 $n$ 是偶数个不同素数之积时,$\mu(n)=1$.

**定理11**　若 $n$ 有 $j$ 个不同的素因子:$2,p_1,\cdots,p_{j-1}$,则 $\eta(UCG_n)=n-2p_1\cdots p_{i-1}(j\geqslant 2)$.

**证明**　对 $j$ 用数学归纳法. 当 $j=2$ 时,根据引理9结论成立. 假设 $j=k>2$ 时结论成立,下面证明结论对于 $j=k+1$ 也成立.

由引理3,知 $UCG_n$ 的特征值 $\lambda_r=p_n(w^r)$ $(0\leqslant r\leqslant n-1$,$w$ 是 $n$ 次本原单位根,并且

$$\lambda_r=\sum_{1\leqslant m<n,\gcd(m,n)=1} w^{rm}=c(r,n)=\mu\left(\frac{n}{\gcd(r,n)}\right)\frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{\gcd(r,n)}\right)},$$

其中 $c(r,n)$ 是 Ramanujan's 和,$\mu$ 是 Möbious 函数.

应用上面的等式可得,只有当 $\frac{n}{\gcd(r,n)}$ 有平方因子时,才有 $\lambda_r=0$. 又在欧拉函数的和函数 $\sum_{t\mid n}\varphi(t)=n$ 中,和式取遍 $n$ 的全体正因子. 当 $0\leqslant r\leqslant n-1$ 时,设 $\frac{n}{\gcd(r,n)}$ 有 $s$ 个不同的值:$m_1,m_2,\cdots,m_s$. 根据引理4,$m_1,m_2,\cdots,m_s$ 一定是 $n$ 的所有互不相同的正因子.

令 $n=2p_1\cdots p_{k-1}q$,$n$ 只有 $k$ 个不同的素因子:$2,p_i(i=1,\cdots,k-1)$. $c_t$ 是 $\frac{n}{\gcd(r,n)}$ 的平方因子,那么当 $0\leqslant r\leqslant n-1$ 时,有 $\varphi(c_t)$ 个平方因子 $c_t$,当 $n$ 有 $k+1$ 个互异的素因子时,有 $n=2p_1\cdots p_{k-1}p_kq$,$\frac{n}{\gcd(r,n)}$ 一定有平方因子 $c_t$ 和 $p_kc_t$. 而且

$$\varphi(c_t)+\varphi(p_kc_t)=\varphi(c_t)+p_k(1-1/p_k)\varphi(c_t)=p_k\varphi(c_t).$$

由假设,当 $n$ 有 $k$ 个互异的素因子时,$\frac{n}{\gcd(r,n)}$ 有 $2p_1\cdots p_{k-1}p_k(q-1)$ 个平方因子. 那么当 $n$ 有 $k+1$ 个互异的素因子时,$\frac{n}{\gcd(r,n)}$ 有 $2p_1\cdots p_{k-1}p_k(q-1)$ 个平方因子. 所以如果 $n$ 有互异的素因子:$2,p_1,\cdots,p_{j-1}$,那么 $\eta(UCG_n)=n-2p_1\cdots p_{j-1}$,$(j\geqslant 2)$.

## 参考文献:


[1] Biggs N. Algebraic graph theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[2] Cheng B, Liu B L. On the nullity of graphs[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2007, 16: 60-67.

[3] Boesch F, Tindell R. Circulants and their connectivities[J]. Journal of Graph Theory, 1984, 8: 487-499.

[4] Dejter I J, Giudici R E. On unitary cayley graphs[J]. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 1995, 18: 121-124.

[5] Berrizbeitia P, Giudici R E. On cycles in the sequence of unitary cayley graphs[J]. Discrete Mathematics, 2004, 282(3): 239-243.

[6] Beaudrap N D. On restricted unitary cayley graphs and symplectic transformations modulo n[J]. Electronic Journal Combinatorics, 2010, 17(1): 66-69.

[7] Fuchs E D. Longest induced cycles in circulant graphs[J]. Electronic Journal Combinatorics, 2005, 12(1): 1-12.

[8] klotz W, Sander T. Some properties of unitary cayley graphs[J]. Electronic Journal Combinatorics, 2007, 14(1): 39-45.

[9] Sander J W, Sander T. The energy of integral circulant graphs with prime power order[J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2011, 5(1): 22-36.

[10] Pullman N P. Matrix Theory and its applications[M]. New York: Academic Press, 1976.

[11] Manin Y I, Panchishkin A A. Introduction to modern number theory[M]. Moscow: VINITI, 1990.