

文章编号:1673-0062(2014)03-0001-04

固定边界平衡方程的数值求解

黄千红

(南华大学 核科学技术学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:采用基于能量原理的变分法求解等离子体平衡方程,在给定的压强和环向电流密度分布情况下,采用变步长默森法对平衡方程进行了数值求解,得到了 D 型截面下极向和环向磁场分布.采用 NSTX 装置参数计算所得结果与文献结果一致.开发的固定边界平衡方程求解程序具有通用性特点,可以模拟不同装置的平衡位型.

关键词:Grad-Shafranov 方程;变分法;默森法

中图分类号:TL631 **文献标识码:**A

The Solution of Equilibrium Equation with Fixed Boundary

HUANG Qian-hong

(School of Nuclear Science and Technology, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: A variational method based on an energy principle is applied to solve plasma equilibrium equation. When the plasma pressure and current density profile is given, the balance equation is solved using a variable-step-size Merson method. The poloidal and toroidal magnetic field with dee-shaped plasma are obtained. The results which adopted NSTX device parameters are achieved agreeable to those in the references. The program is universal, which can be applied to simulate the balance equilibrium configuration in the different devices.

key words: Grad-Shafranov equation; variational method; Merson method

0 引 言

磁约束受控核聚变的一个关键问题,是利用

磁场把一定密度的高温等离子体稳定的约束足够长时间,达到劳逊条件,进而产生净能量增益.等离子体平衡是指磁压强与等离子体热压强的平

收稿日期:2014-04-25

基金项目:研究生创新课题基金资助项目(2013XCX02);衡阳市科技局基础课题基金资助项目(2013KJ24);湖南省核聚变与等离子体物理创新团队建设基金资助项目(NHXTD03)

作者简介:黄千红(1977-),男,湖南湘潭人,南华大学核科学技术学院讲师,博士研究生.主要研究方向:核聚变与等离子体.

衡. 等离子体平衡位形及其性质是研究等离子体控制、自举电流的求解及 MHD 不稳定性等问题的基础, 因此精确求解平衡方程, 获得平衡位形成为磁约束受控核聚变中基本问题之一.

对等离子体平衡满足的 Grad-Shafranov (GS) 方程的求解, P. J. Mc Carthy 通过给定等离子体压强分布求出了方程在自由边界下的解析解^[1]; L. Guazzotto and J. P. Freidberg 通过选择压强与极向电流流量这两个自由变量的函数表达式给出了方程的一般解析表达式并给出了固定边界下的平衡位形^[2]; G. O. Ludwig 和 L. L. Lao, S. P. Hirshman, 以及 R. M. Wieland 分别采用变分方法对 GS 方程进行了数值求解^[3-5]. 国内, 石秉仁、查学军等分别对自由边界下 GS 方程的求解进行了研究^[6-12].

本文采用基于能量原理的变分法^[4], 根据变分原理并利用求解泛函的欧拉方程可得到平衡方程的磁面平均形式, 通过数值求解固定边界的 GS 方程获得了极向磁通和等离子体平衡位形分布, 在此基础上求得了环向与极向磁场的分布, 并对结果进行了讨论.

1 平衡方程

在轴对称的柱坐标系 (R, φ, Z) 中, 描述等离子体平衡的 Grad-Shafranov 方程如下:

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -2\pi\mu_0 R j_\varphi \quad (1)$$

ψ 为极向磁通, j_φ 为环向等离子体电流密度

$$j_\varphi = -\frac{2\pi F}{B} \frac{dP}{d\psi} - \frac{2\pi B}{\mu_0} \frac{dF}{d\psi} \quad (2)$$

$F(\psi) = RB_\varphi$ 是抗磁张力.

基于变分原理, 引入泛函^[4]

$$Q(a) = \iiint_{V(a)} d^3r L(\psi_p, \nabla\psi_p, h_\zeta) \quad (3)$$

a 为小半径, ψ_p 为极向磁通, ζ 为环向角, $h_\zeta = |\vec{\partial r} / \partial \zeta|$ 为到对称轴的距离. L 为拉格朗日函数, 定义如下:

$$L = \frac{B_p^2}{2\mu_0} - \frac{B_T^2}{2\mu_0} - p$$

$p(\psi_p)$ 为等离子体压强, $B_p = |\nabla\psi_p| / (2\pi h_\zeta)$, $B_T = \mu_0 I(\psi_p) / 2\pi h_\zeta$ 分别为极向磁场, 环向磁场, $I(\psi_p)$ 为总极向电流.

参考文献[5]中方法可求得平衡方程的磁面平均形式

$$\frac{d\psi_p}{d\rho} \frac{d}{d\rho} \left(K(\rho) \frac{d\psi_p}{d\rho} \right) = -\frac{dL}{d\rho} I(\rho) \frac{dI}{d\rho} - \frac{dV}{d\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \quad (4)$$

将(4)式分部求导, 得:

$$\begin{aligned} \frac{dK(\rho)}{d\rho} \left(\frac{d\psi_p}{d\rho} \right)^2 + K(\rho) \frac{d\psi_p}{d\rho} \frac{d^2\psi_p}{d\rho^2} = \\ -\frac{dL}{d\rho} I(\rho) \frac{dI}{d\rho} - \frac{dV}{d\rho} \frac{d\rho}{d\rho} \end{aligned} \quad (5)$$

最后化简如下:

$$\frac{dK(\rho)}{d\rho} \left(\frac{d\psi_p}{d\rho} \right)^2 + K(\rho) \frac{d\psi_p}{d\rho} \frac{d^2\psi_p}{d\rho^2} = \frac{I_T(\rho)}{K(\rho)} \frac{dI_T}{d\rho} \quad (6)$$

其中 $K(\rho)$ 、 $I_T(\rho)$ 具体形式参见文献[5], 上式为非齐次二阶常微分方程, 其求解将仍是很复杂的过程, 令 $\psi_p = y_1$, $\psi'_p = y_2$, 则 $\psi''_p = y'_2$, 可得到:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = \frac{I_T(\rho)}{K(\rho)} \frac{dI_T}{d\rho} - K'(\rho) y_2^2 \\ y_1(0) = 0.0 \\ y_2(0) = 0.0 \end{cases} \quad (7)$$

这样将二阶椭圆偏微分方程转变成一阶微分方程组的初值问题, 采用变步长默森法对其进行数值求解.

2 数值结果及分析

求解过程中, 首先采用 NSTX 装置参数进行验算^[4]: Tokamak 的大环半径 $R = 0.8$ m, 小半径 $a = 0.55$ m, 环向等离子体电流 $I_0 = 0.9$ MA, 等离子体拉长度 $k = 1.6$, 三角形变因子 $d = 0.4$, 中心磁场 $B_0 = 0.5$ T. 等离子体的压强和环向电流密度分布取如下形式:

$$p(\rho) = p_0 (1 - \rho/a^2)^{\alpha_p}$$

$$I(\rho) = I_0 \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_I} \right) - \frac{1}{\alpha_I} (\rho/a)^2 \right]^{\alpha_I} (\rho/a)^2$$

其中 $\alpha_p = 2.0$, $\alpha_I = 0.5$.

求解方程组(7), 得到极向磁通与小半径 ρ 的变化关系. 图 1 中给出了所求得极向磁通 ψ 的图像.

在对泛函 $Q(a)$ 求解的过程中, 得到磁轴满足如下关系: $[R_m - R_0(a)]/a = 0.28$, 根据此式即可求得磁轴的位置. 对于 D-型托卡马克等离子体截面 R, Z 表示如下:

$$R = R_0(\rho) + a \cos(\theta + d \sin \theta)$$

$$Z = k a \sin \theta$$

其中, $R_0(\rho) = R_m - [R_m - R_0(a)] (\rho/a)^2$. 由此可得等磁面如图 2 所示, 磁轴位于 $R_{\max} = 0.954$ m 处, 相对于中心偏移了 $\Delta r = 0.154$ m.

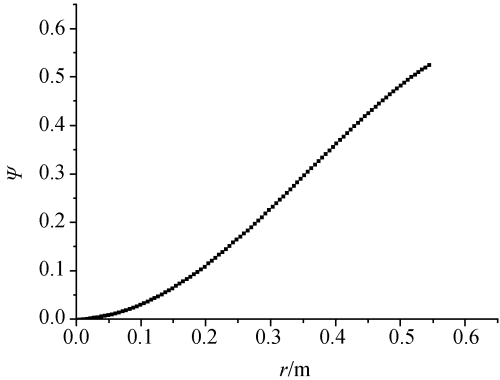


图 1 极向磁通分布

Fig.1 Profile of the Poloidal flux

根据求得的 ψ_p 的值,由 $B_p = |\nabla\psi_p|/(2\pi h_\zeta)$,其中 $h_\zeta = R \cong \rho(e - 1/2T + \cos\theta + 1/2T\cos^2\theta)$, $e = R_0(\rho)/\rho$,可求得极向磁场分布如图 3a 所示;由 $B_T = \mu_0 I(\psi_p)/2\pi h_\zeta$,可求得环向磁场如图 3b 所示,与文献[4]中给出的磁场分布比较是符合的很好的.

为检验程序的通用性,采用不同的装置参数进行计算,都获得了较好的结果,图 4 是采用 HL-2A 装置参数计算的结果. 计算参数:大半径 $R = 1.65\text{ m}$,小半径 $a = 0.4\text{ m}$,环向等离子体电流 $I_0 = 0.45\text{ MA}$,等离子体拉长度 $k = 1.6$,三角形变因子 $d = 0.4$,中心磁场 $B_0 = 2.8\text{ T}$.

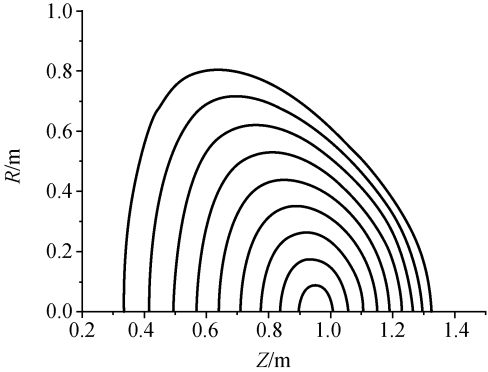
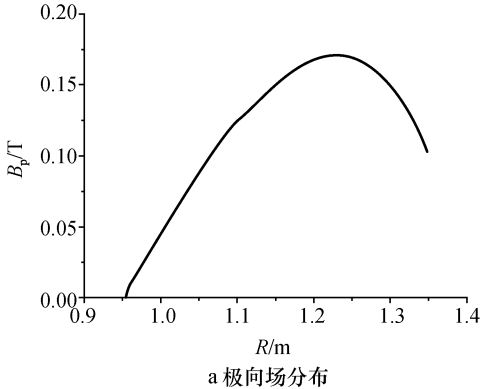
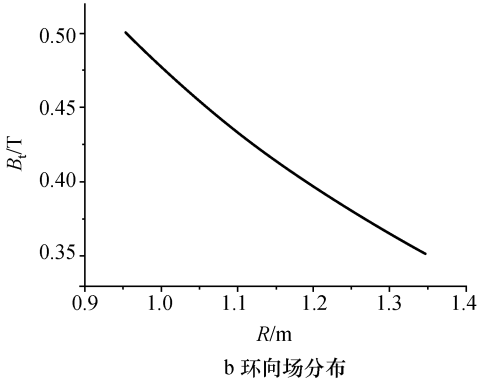


图 2 NSTX 平衡等磁面

Fig.2 Isobaric flux for the NSTX equilibrium



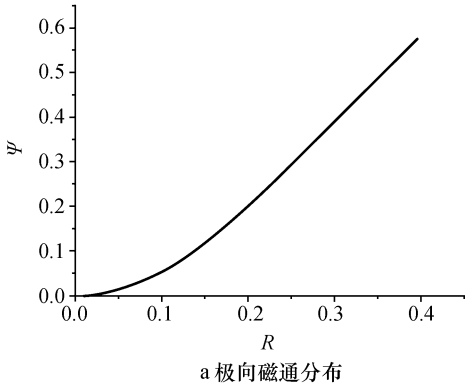
a 极向场分布



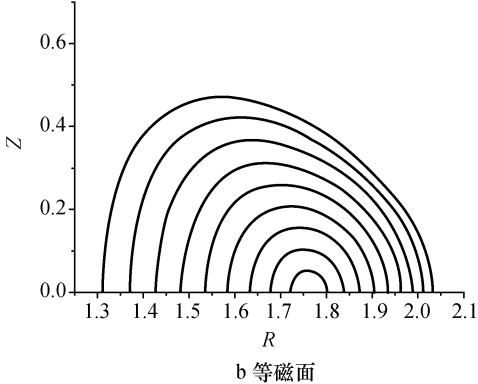
b 环向场分布

图 3 NSTX 极向和环向磁场分布

Fig.3 Poloidal and toroidal components of magnetic field for the NSTX equilibrium



a 极向磁通分布



b 等磁面

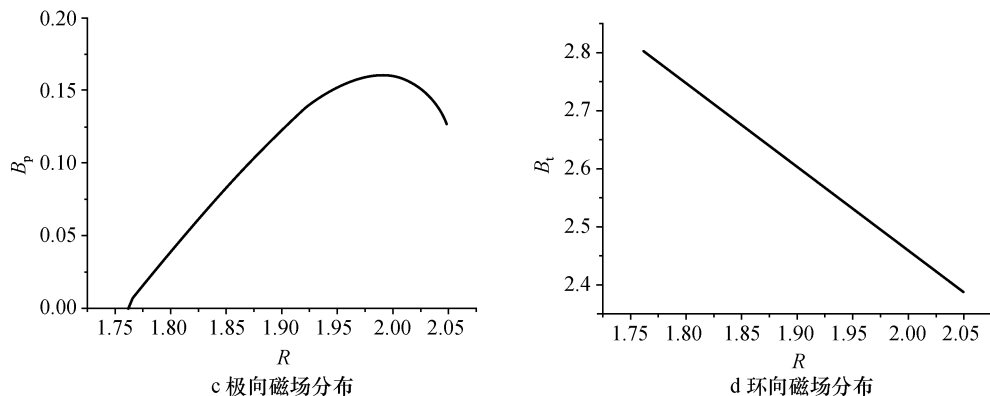


图 4 HL-2A 平衡位形

Fig. 4 Profile of magnetic field for the HL-2A

3 结 论

根据变分原理将托卡马克中等离子体二阶椭圆偏微分平衡方程的边值问题转化为一阶微分方程组的初值问题,通过数值求解获得了极向磁通与等离子体平衡位形分布,及 D-型截面等离子体的极向磁场与环向磁场分布,程序计算结果与文献进行了校验,证明是可靠的并具有一定的通用性,为进一步开展相关的等离子体理论研究打下了基础。

参考文献:

- [1] Mc Carthy P J. Analytical solutions to the Grad-Shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions[J]. Phys. Plasmas, 1999, 6(9): 3554-3560.
- [2] Guazzotto L, Freidberg J P. A family of analytic equilibrium solutions for the Grad-Shafranov equation[J]. Physics of Plasmas, 2007, 14(11): 112508.
- [3] Lao L L, Hirshman S P, Wieland R M. Variational, moment solutions to the Grad-Shafranov equation[J]. Physics of Fluids, 1981, 24(8): 1431-1440.
- [4] Ludwig G O. Direct variational solutions to the Grad-Schluter-Shafranov equation[J]. Plasma phys. Control. Fusion, 1995, 37: 633-646.
- [5] Ludwig G O. Direct variational solutions of the tokamak equilibrium problem[J]. Plasma Phys. Control. Fusion, 1997, 39: 2021-2037.
- [6] Bingren Shi. Semi-analytic approach to diverted tokamak equilibria with incompressible toroidal and poloidal flows[J]. Nucl. Fusion, 2011, 51(2): 023004.
- [7] Shi Bingren. Simple semi-analytic toroidally axisymmetric equilibria with natural D-shape separatrix[J]. Plasma Phys. control. Fusion, 2008, 50(8): 085006.
- [8] Shi Bing-Ren. Analytic description of tokamak equilibrium sustained by high fraction bootstrap current[J]. Chinese Physics, 2003, 12(6): 626-631.
- [9] 查学军, 朱思铮, 虞清泉. 托卡马克等离子体平衡的数值研究[J]. 计算物理, 2002, 19(5): 413-418.
- [10] 毛瑞, 李佳鲜, 马瑞, 等. HL-2M 装置实时等离子体平衡重建算法[J]. 核聚变与等离子体物理, 2013, 33(3): 231-238.
- [11] 刘志远, 李国强, 徐立清. 基于 TEQ 的固定边界托卡马克等离子体平衡模拟[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2012, 35(3): 412-416.
- [12] 廖敏, 张锦华, 陈燎原, 等. 基于异构平台通信的并行化等离子体平衡重建[J]. 核聚变与等离子体物理, 2008, 28(1): 85-89.