文章编号:1673 - 0062(2014)02 - 0103 - 06

双参数地基上分布随从力作用下输流管道的稳定性

黄建红[1],郭长青[2*],许 锋[3]

(1. 南华大学 城市建设学院,湖南 衡阳 421001;2. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001;
3. 中南大学 铁道学院,湖南 长沙 410075)

摘 要:研究了 Pasternak 双参数地基模型基础上分布随从力作用下的两端固支输流管道的稳定性. 建立了管道运动微分方程,并采用传递矩阵法对无量纲方程进行求解. 通过研究双参数地基上输流管道的临界流速和复频率变化,分析了在四种不同地基刚度组合下,分布随从力、流速等对系统稳定性的影响. 数值计算表明:地基刚度不变时,不同分布随从力和流速作用下系统的稳定性有很大的差别;在随从力和流速相同的情况下,地基刚度对系统稳定性有很大影响,且其中的剪切刚度比线性刚度的影响更加显著.

关键词:双参数地基;分布随从力;输流管道;稳定性

中图分类号:TV134 **文献标识码**:A

Stability of Pipes Conveying Fluid with Distributed Follower Force on Two-parameter Foundation

HUANG Jian-hong[1], GUO Chang-qing[2*], XU Feng[3]

(1. School of Urban Construction, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China;
2. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China;
3. Railway Campus, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China)

Abstract: Stability of clamped pipes conveying fluid with distributed follower force on Pasternak two- parameter foundation is studied. The differential equation of the pipe movement is established, and transfer matrix method is employed for solving the dimensionless equation. Based on the critical flow velocity and the variation of the complex frequency, the influences of the distributed follower force and the flow velocity on the stability of pipes conveying fluid on two-parameter foundation are analyzed for four foundation stiffness combinations. Numerical calculation shows that: the stability of the system with the same foundation stiffness varies greatly for different distributed follower forces and different flow velocities; the foundation stiffness has great effects on the stability of the system with the same fluid velocity and the same distributed

收稿日期:2013 - 11 - 04

作者简介:黄建红(1987 -),男,江西上饶人,南华大学城建学院硕士研究生. 主要研究方向:流固耦合力学. * 通讯作者.

follower force, and the effects of the shear stiffness is greater than the linear stiffness.

key words: two-parameter elastic foundation; distributed follower force; fluid-conveying pipe; stability

0 引 言

输流管道被应用于石油、水利等工程领域时,管道常常是埋设在地下土壤中的,这就相当于把输流管道置于具有一定刚度参数的地基上. 为研究方便,国内外学者引入了不同的地基模型,例如单参数模型[1]和双参数模型[2],其中 Winkler 模型[3-4]就能很好地模拟这种比较简单的单参数模型. 最典型的双参数模型就是 Pasternak 地基模型,而目前国内外对双参数地基上输流管道的稳定性研究不是很多[5-8],尚未见有考虑随从力作用的报道. 本文在 Pasternak 双参数地基模型的基础上考虑了分布随从力作用下两端固支输流管道的稳定性并运用传递矩阵法对管道运动微分方程进行求解.

1 运动方程

图 1 所示为双参数地基上两端固支输流管道在分布随从力作用下的计算模型,管内流体以恒定流速流动,在运动过程中分布随从力始终保持与输流管道挠度相切,管道计算模型采用 Bernoulli-Euler 梁模型.

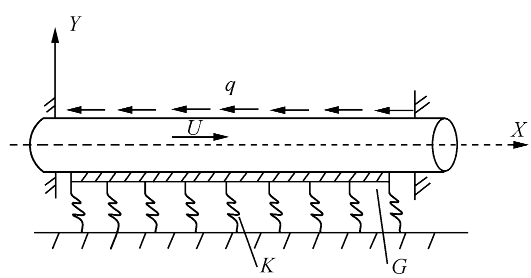


图 1 双参数弹性地基上分布随从力作用下两端固支输流管道模型

Fig. 1 A clamped pipe conveying fluid with distributed follower force on two-parameter elastic foundation

最简单的输流管道在分布随从力作用下的运动微分方程为[9]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q(L-x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + MU^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M+m)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

其中: $w(x,t)$ 为管道横向位移; t 为时间; EI 为管道抗弯刚度; L 为管道长度; q 为沿管道切线方向的分布随从力; m 为管道单位长度质量; M 为单位长度上管内流体的质量; U 为管内流体流速.

在式(1)中加上 Pasternak 地基反力 F:

$$F(x) = F_k(x) + F_g(x) = Kw(x) - G\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \tag{2}$$

得双参数地基上分布随从力作用下输流管道的运动微分方程为:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + [q(1-x) - G]\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + MU^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + 2MU\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x \partial t} + (m+M)\times\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + Kw = 0 \tag{3}$$

其中 K 和 G 分别为等效线性弹簧刚度和剪切刚度.

引入如下的无量纲量:

$$\eta = \frac{w}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \tau = \sqrt{\frac{EI}{M+m}}\frac{t}{L^2}, \beta = \frac{M}{M+m}$$

$$\gamma = \frac{ql^3}{EI}, u = \sqrt{\frac{M}{EI}}LU, k = \frac{KL^4}{EI}, g = \frac{GL^2}{EI} \tag{4}$$

将方程(3)化为无量纲形式:

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + [u^2 + \gamma(1-\xi) - g]\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2u\sqrt{\beta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + k\eta = 0 \tag{5}$$

2 传递矩阵法

采用传递矩阵法[10]来求方程(5)的解,取

$$\eta_n(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{4} A_n e^{i w_n \xi} \tag{6}$$

把式(6)代入方程(5)中,得

$$\omega_n^4 - [u^2 + \gamma(1-\xi) - g]\omega_n^2 + 2u\sqrt{\beta}\omega_n + k = 0 \tag{7}$$

由梁弯曲理论可知:梁截面转角 θ 、弯矩 M 、剪力 Q 和挠度 $w(x,t)$ 之间的关系为:

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} \\ M = EI\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = EI\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \\ Q = -\dfrac{\partial M}{\partial x} = -\dfrac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3} \end{cases} \tag{8}$$

把式(6)代入式(8)中并联立(6)式得 4 个方程,写成矩阵形式如下:

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ M \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 d_1 & a_2 d_2 & a_3 d_3 & a_4 d_4 \\ b_1 d_1 & b_2 d_2 & b_3 d_3 & b_4 d_4 \\ c_1 d_1 & c_2 d_2 & c_3 d_3 & c_4 d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

其中

$$d_n = e^{\mathrm{i}\omega_n \xi}, a_n = \mathrm{i}\omega_n, b_n = -EI\omega_n^2,\ c_n = -EI\mathrm{i}\omega_n^3$$

方程(9)简写成如下形式:

$$[Z] = [Q(x)][A] \tag{10}$$

假设对于输流管道第 n 段元素当:

$$x = 0, z = z_{n-1} \qquad x = l, z = z_n$$

在方程(10)中令 $x = 0$ 时得:

$$[A] = [Q(0)]^{-1}[Z]_{n-1} \tag{11}$$

把式(11)代入式(10)中得:

$$[Z]_n = [Q(l)][Q(0)]^{-1}[Z]_{n-1} \tag{12}$$

两端固支管道的边界条件为:

$$w(0,t) = w(1,t) = 0$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

假定 $[R_L]$ 和 $[R_R]$ 分别为输流管道左右两边的边界条件,把边界条件代入到式(12)中得:

$$[S][Z] = [0] \tag{14}$$

其中 $[S] = [R_R][B][R_L]$

上式有非零解的条件为:

$$\mathrm{Det}|S| = 0$$

此式即为系统的频率方程.

3　计算结果与分析

3.1　发散失稳临界流速

通过对频率方程进行特征值求解,得 $g = 10$,$k = 10$;$g = 100$,$k = 100$;$g = 1000$,$k = 100$;$g = 100$,$k = 1000$ 时输流管道发散失稳无量纲临界流速 u_c 随无量纲分布随从力 γ(γ 小于零时表明流速方向与随从力方向相同)的变化关系,如图 2 所示.

从图 2 中可以看出当保持 g 和 k 为恒值时,管道发散失稳的无量纲临界流速总体上随分布随从力 γ 的增大而减小;当随从力值在[2,20]这个范围时,临界流速受随从力的影响剧烈,当随从力值超过 20 后,对于 $g = 10$,$k = 10$;$g = 100$,$k = 100$;$g = 100$,$k = 1000$ 而言,随从力越大,对临界流速的影响越小,当随从力值超过 100 时,临界流速接近于零,即任意的与随从力方向相反的流体流速都将使管道发生失稳;而对于 $g = 1000$,$k = 100$ 而言,随从力超过 20 后,其对临界流速的影响仍然较大,可以推测该地基刚度组合对预防输流管道失稳是比较有利的.

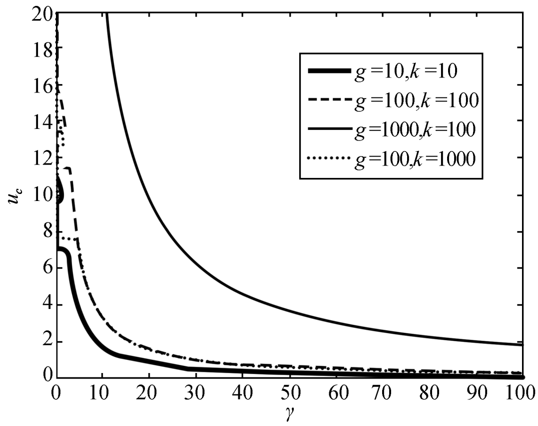


图 2　不同地基刚度下无量纲临界流速随无量纲分布随从力的变化

Fig. 2　Dimensionless critical velocity vs dimensionless distributed follower force for different foundation stiffness coefficients

3.2　不同参数对振动与稳定性的影响

给定不同的无量纲流速 u、无量纲分布随从力 γ 和质量比 β 以及不同的剪切刚度 g 等效弹簧刚度 k,可求出矩阵 S 的两对特征值 H.

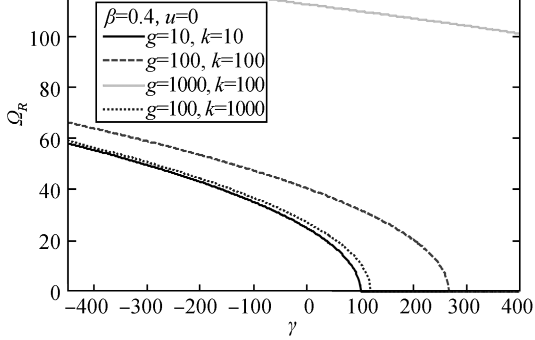
特征值也可用无量纲复频率 Ω 替代表示:

$$\Omega = -\mathrm{i}H = \omega - \alpha\mathrm{i} \equiv \Omega_R + \mathrm{i}\Omega_I \tag{15}$$

由于 S 为实矩阵,其特征值 H 总是成对出现相应的 Ω 是一对虚部相同、实部不同或虚部不同、实部为零的复频率.

3.2.1　复频率随分布随从力的变化

图 3、图 4、图 5 分别给出了 $\beta = 0.4$,$u = 0$、$u = 5$、$u = 15$ 时,不同地基刚度组合下系统复频率随分布随从力的变化情况.



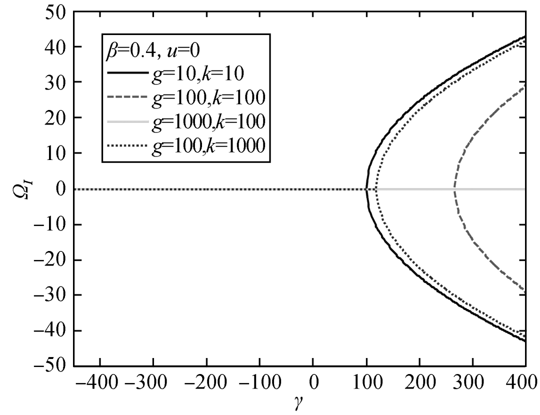


图 3 $\beta=0.4$、$u=0$,不同地基刚度下无量纲复频率实部、虚部随无量纲分布随从力的变化

Fig. 3 Real and imaginary parts of dimensionless complex frequency vs dimensionless distributed follower force with different foundation stiffness coefficients for $\beta=0.4$, $u=0$

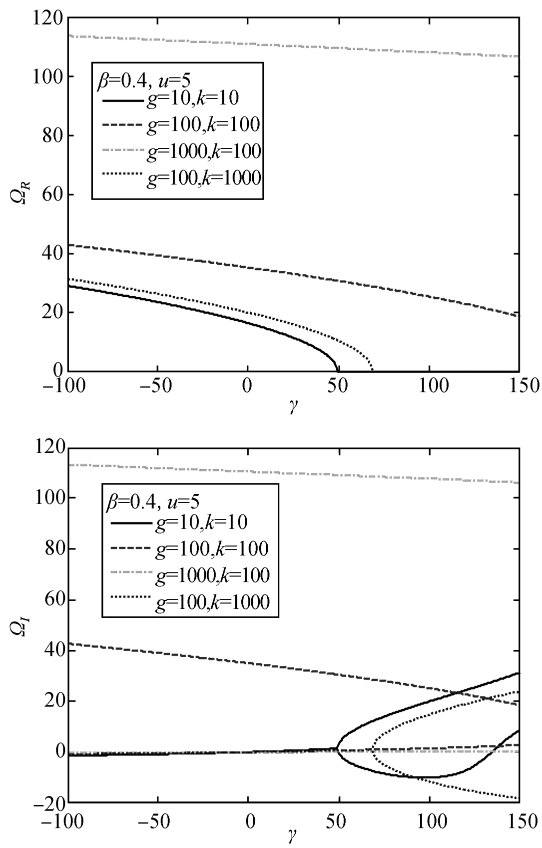


图 4 $\beta=0.4$、$u=5$,不同地基刚度下无量纲复频率实部、虚部随无量纲分布随从力的变化

Fig. 4 Real and imaginary parts of dimensionless complex frequency vs dimensionless distributed follower force with different foundation stiffness coefficients for $\beta=0.4$, $u=5$

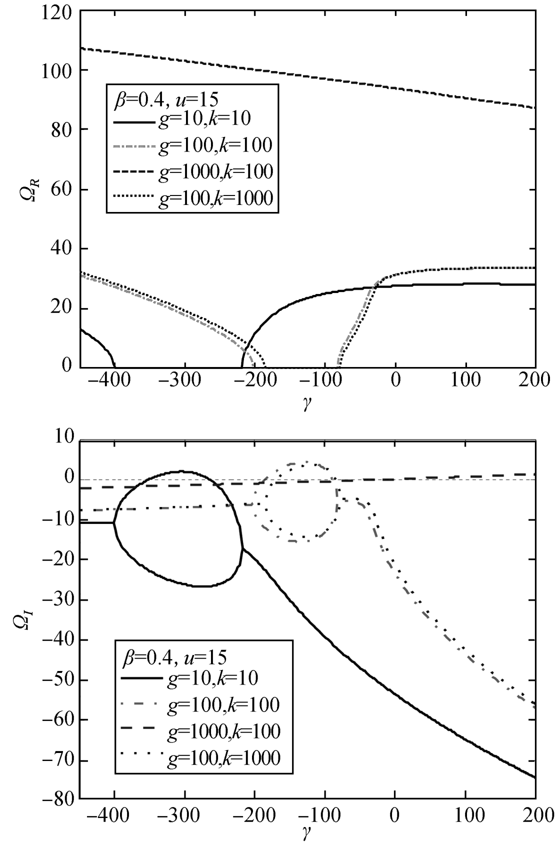


图 5 $\beta=0.4$、$u=15$,不同地基刚度下无量纲复频率实部、虚部随无量纲分布随从力的变化

Fig. 5 Real and imaginary parts of dimensionless complex frequency vs dimensionless distributed follower force with different foundation stiffness coefficients for $\beta=0.4$, $u=15$

从图 3 中可以看出:当 $\beta=0.4$、$u=0$,g 和 k 取不同值时系统的失稳方式均为发散失稳(复频率实部由正减小为零,虚部由零分成一正一负两支,正负两支完全对称);对于 $g=100$,$k=100$;$g=1000$,$k=100$ 而言,当 k 保持不变 g 由 100 增大到 1000 时,无量纲复频率的实部变为零,虚部出现分支时所需的分布随从力越大;对于 $g=10$,$k=10$;$g=100$,$k=1000$ 而言,当 k 由 10 增大到 1000、g 由 10 增大到 100 时两线基本重合,说明剪切刚度 g 对系统稳定性的影响比线性刚度 k 更加显著.

从图 4 中可以看出:当 $\beta=0.4$、$u=5$ 时对 $g=10$,$k=10$;$g=100$,$k=1000$ 来说,系统的失稳方式均为发散失稳,但当 $g=10$,$k=10$ 分布随从力 $\gamma=140$ 左右时,复频率虚部由负变为正,系统完全进入静态发散失稳状态;对 $g=100$,$k=100$;$g=1000$,$k=100$ 而言,系统复频率实部和虚部全

为正值,系统振动不断增大,系统将发生动态颤振失稳,随着无量纲分布随从力的增大,系统复频率实部和虚部都逐渐减小,系统将从颤振失稳状态进入到发散失稳状态.

从图 5 中可以看出:$\beta=0.4$、$u=15$ 时对于 $g=10$,$k=10$ 而言,当分布随从力 γ 在[-400,-200]范围内时,系统复频率实部为零,虚部分为正负两支,但正的很短暂,系统有发生发散失稳的趋势,系统以静态稳定为主;当随从力 γ 在[-200,200]范围内时,复频率实部再次变为正值,虚部仍然为负值,系统再次进入动态稳定状态,振动逐渐衰减,对于 $g=100$,$k=100$;$g=100$,$k=1000$ 而言,系统振动稳定性和前面所述一样,只是发生转变的临界分布随从力不同.

3.2.2　复频率随流速的变化

图 6、图 7 分别给出了 $\beta=0.4$,$\gamma=15$ 和 $\gamma=50$ 时,不同地基刚度组合下系统复频率随流速的变化情况.

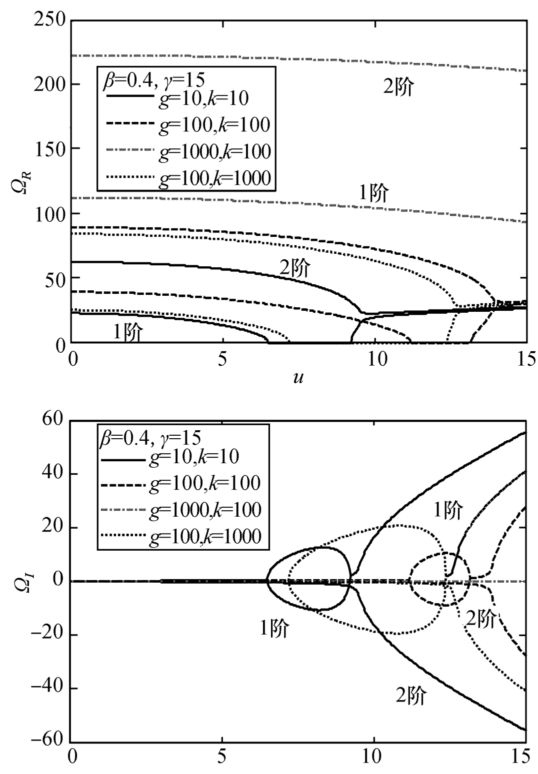


图 6　$\beta=0.4$、$\gamma=15$,不同地基刚度下无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速的变化

Fig. 6　Real and imaginary parts of dimensionless complex frequency vs dimensionless velocity with different foundation stiffness coefficients for $\beta=0.4$,$\gamma=15$

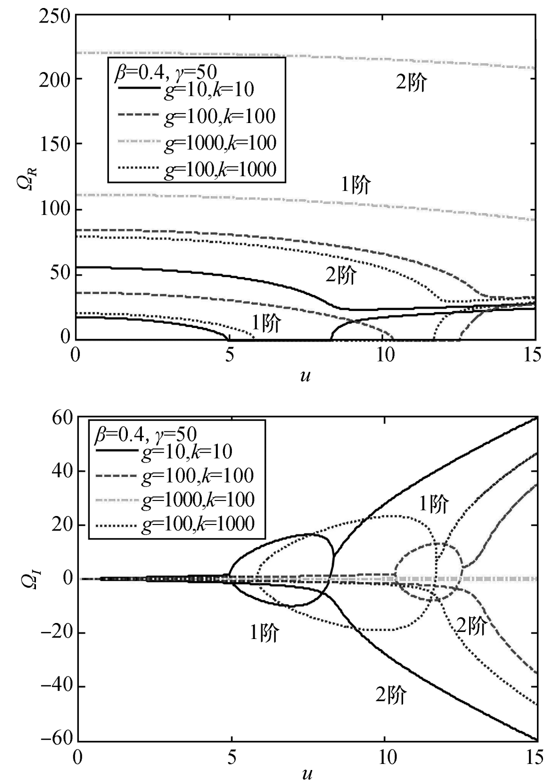


图 7　$\beta=0.4$、$\gamma=50$,不同地基刚度下无量纲复频率的实部、虚部随无量纲流速的变化

Fig. 7　Real and imaginary parts of dimensionless complex frequency vs dimensionless velocity with different foundation stiffness coefficients for $\beta=0.4$,$\gamma=50$

从图 6,图 7 中看出:$\beta=0.4$、$\gamma=15$,$\gamma=50$ 当 $g=10$,$k=10$;$g=100$,$k=100$;$g=100$,$k=1000$ 时,系统一阶模态的失稳方式均为发散失稳,而虚部处于负值的时间很短暂,负值频率很快与正的频率汇合成一条曲线,且汇合点是正值,说明系统由一阶模态发散失稳转变为稳定状态;系统二阶模态一直处于动态稳定状态(复频率实部为正,虚部为负).

4　结　论

本文研究了双参数地基上分布随从力作用下输流管道的稳定性,重点讨论了四种不同地基刚度组合下系统的稳定性,得出的结论如下:

1)不同地基刚度组合下,系统发散失稳的临界流速总体上随分布随从力的增大而减小,但随着随从力的变大,临界流速变化很小;相比于弹性刚度临界流速对剪切刚度更加敏感.

2)质量比一定时,同种地基刚度组合下随着流速的增大系统稳定性有很大的变化;当流速一定时,随从力增大,不同刚度组合下系统的失稳方

式不同.

3)地基剪切刚度对系统稳定性的影响比线性刚度更加显著,所以在类似于石油运输等工程的管道设计中应重点考虑剪切刚度的影响.

参考文献:

[1] Winkler E. Die lehre von der elastigitat und festigkeit [M]. Dominicus:prague,1867.

[2] Selvadurai A P S. Elastic analysis of soil foundation interaction [M]. London: Elesvier scientific publishing co,1979.

[3] 梁峰,李伟杰,杨晓东,等. Winkler 地基上输流管道的临界流速分析[J]. 机械强度,2011,33(1):20-23.

[4] Dutta S C, Roy R. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system[J]. Computer & Structure, 2002, 80(20/21): 1579-1594.

[5] 梁峰,金基铎,杨晓东,等. 弹性地基上输流管道的静态和动态稳定性研究[J]. 工程力学,2011,27(11): 166-171.

[6] 吴男,金基铎. 弹性地基两端铰支输流管的模态和固有频率[J]. 沈阳航空工业学日学报,2008,25(2): 42-46.

[7] 马小强,向宇,黄玉盈. 求解弹性地基上任意支承输液直管稳定性问题的传递矩阵法[J]. 工程力学,2004, 21(4):194-198.

[8] Chellapilla K R, Simhab H S. Critical velocity of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 302(1/2): 387-397.

[9] 郭长青. 输流管道在分布随从力作用下的振动和稳定性[J]. 工程力学,2010,27(4):190-196.

[10] Lee D M, Choi M J, Oh T Y. Transfer matrix modeling for the 3-dimensional vibration analysis of piping system containing fluid flow[J]. Journal of KSME, 1996, 10 (2):180-189.

(上接第 98 页)

[8] Brahmi N E, Kazzouli S E, Mignani S M, et al. Original multivalent copper (II)-conjugated phosphorus dendrimers and corresponding mononuclear copper(II) complexes with antitumoral activities[J]. Mol. Pharmaceutics, 2013,10(4):1459-1464.

[9] Cairns A J, Perman J A, Woitas L, et al. Supermolecular Building Blocks (SBBs) and Crystal Design:12-Connected Open Frameworks Based on a Molecular Cubohemioctahedro[J]. J. A. M. Chem. Soc., 2008, 130 (5): 1560-1561.

[10] Gao B j, Fang L, Men J. Studies on preparation, structure and fluorescence emission of polymer-rare earth complexes composed of aryl carboxylic acid-functionalized polystyrene and Tb(Ⅲ) ion[J]. Polymer, 2012, 53(21):4709-4717.

[11] Marsac R, Davranche M, Gruau G, et al. Metal loading effect on rare earth element binding to humic acid: experimental and modelling evidence[J]. Geochimica et Cosmochimica Acta, 2010, 74(6):1749-1761.

[12] Boggioni L, Tritto I. Polyolefins with Cyclic Comonomers [J]. Advances in Polymer Science, 2013, 258: 117-141.

[13] 杨睿,周啸,罗传秋,等. 聚合物近代仪器分析[M]. 3 版. 北京:清华大学出版社,2010.

[14] 黄君礼,鲍治宇. 紫外吸收光谱法及应用[M]. 1 版. 北京:中国科学技术出版社,1992:35-43.

[15] 泉美治,小川雅弥,加腾俊二,等. 仪器分析导论:第一册[M]. 2 版. 北京:化学工业出版社,1995:18-22.

[16] Kutyreva M P, Usmanova G S, Ulakhovich N A, et al. Metal-polymer complexes of cobalt(II) and Copper(II) with hyperbranched polyester polycarboxylic acids[J]. Polymer Science Series B, 2013, 55(3/4):201-212.