文章编号:1673 - 0062(2014)01 - 0084 - 04

具有时滞的中立型分数阶微分方程解的存在性

王　琳[1,2],熊成基[2]

(1. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001;2. 湖南工商职业学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:本文主要用压缩映射原理,和 Leray-Schauder 不动点定理来讨论具有时滞的中立型分数阶微分方程解的存在性.

关键词:分数阶微分方程;存在性;唯一性;Leray-Schauder 不动点定理;巴纳赫不动点定理.

中图分类号:O241. 8　　**文献标识码**:A

Existence Results for Fractional Order Neutral Functional Differential Equations with Infinite Delay

WANG Lin[1,2],XIONG Cheng-ji[2]

(1. School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China;
2. Hunan Administration for Industry and Commerce,Career Academy,Hengyang,Hunan 421001,China)

Abstract:In this paper,the contraction principle nonlinear alternative of Leray-Schauder type is used to investigate the existence of solutions for fractional order neutral functional equations with infinite delay

key words:fractional differential equations;existence;uniqueness;Leray-Schauder fixed point theorem;the banach fixed point theorem

考虑如下具有初始值的分数阶微分方程:

$$D^{\alpha}[x(t)-g(t,x_t)]=f(t,x_t),\quad 0<\alpha<1,t\in J=[0,b] \tag{1}$$

$$x(t)=\phi(t),t\in[-\infty,0] \tag{2}$$

其中,D^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 微分算子,$0<\alpha<1$,$f(t,x_t)$,$g(t,x_t)$:$J\times B\to R$ 是连续函数,满足后面所给的条件. $\phi\in B$, $\phi(0)=0$,且 B 是 $[-\infty,0]\to R$ 的半线性空间. 对任意函数 $y\in[-\infty,b]$, $b>0$, $t\in J$, $x_t\in B$, $x_t(\theta)=x_t(t+\theta)$, $\theta\in[-\infty,0]$.

最近,许多作者研究了分数阶微分方程,它应用于许多领域,像物理,机械,工程等方面. 很多作者获得了分数阶微分方程正解存在的充分条件[1-4],特别,一些作者获得了具有边界值的分数阶微分方程正解的存在性[5-8]. 本文考虑边界值方程(1)~(2),首先建立必要的条件,接着引入

收稿日期:2013 - 09 - 21

作者简介:王　琳(1978 -),女,湖南邵阳人,南华大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向:微分方程及其应用.

Gronwall's 不等式,然后,利用 Leray-Schauder 不动点定理,得到方程(1) ~(2)解的存在性.

为了方便,建立以下条件:

(a) $f:J\times B\to R$ 是一致连续的;

(b) $g(u,v)\leqslant p(u,v)+q(u)f(u,v)$, 其中, $q(u)$ 是连续的, $|q(t_1)-q(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^{\beta}$, $\beta>0$, $p(u,v)$ 是连续的,且 $|p(u,x)-p(u,y)|\leqslant L\|x-y\|$, 对任意的 $t\in J$, $x,y\in B$.

(c) P 是一致赫尔德连续的, $t\in J$, 也就是对所有的 $t_1>t_2$, $t_1,t_2\in B$, $\|p(t_2,x)-p(t_1,x)\|\leqslant K(t_1-t_2)^r$, 其中, K 和 r 是正常数,且 $r\leqslant 1$.

1　定义和引理

首先给出一些定义,考虑 $R^+=x\in R:x>0$, $C^0(R^+)$ 在 R^+ 中是连续的, $C^0(R_0{}^+)$ 是一个连续函数的空间,其中, $R_0{}^+=x\in R:x\geqslant 0$, 在 $J\to R$, $C(J,B)$ 是巴纳赫空间,具有如下标准

$$\|x\|_\infty=\sup|x(t)|,t\in J$$

本节首先回顾几个基本定义和引理:

定义 1[9]　函数 u 的 α 阶分数积分被定义为:如果 $\alpha>0$, $u:(0,\infty)\to R$, $I^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s$,

其中, Γ 为嘎玛函数.

定义 2[9]　函数 u 的 α 阶分数微分被定义为:如果 $\alpha>0$, $u:(0,\infty)\to R$,

$$D^\alpha u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$, Γ 为嘎玛函数.

引理 3(The nonlinear alternative of Leray Schauder type)　设集合 X 是一个巴纳赫空间, Ω 是 X 中的一个有界开集,且 $0\in\Omega$, 且 $T:\overline{\Omega}\to X$ 是连续的,那么下列两个性质成立.

(i)算子 T 在 $\overline{\Omega}$ 中有一个不动点;

(ii)存在 $x\in\partial U$ 且 $\gamma\in(0,1)$ 有 $x=\gamma Tx$.

引理 4　设 $x(t)\in R$, $f(t,x_t)\in R$, 如果方程(1) ~(2)存在一个解,那么它的解为

$$x(t)=g(t,x_t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\theta)^{\alpha-1}f(\theta,x_\theta)\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

$$x(t)=\phi(t),t\in[-\infty,0] \tag{4}$$

引理 5　(Gronwall's 不等式)设 $I=[0,b]$是一个实数空间,假设

$$u(t)\leqslant c+\int_0^t v(s)u(s)\mathrm{d}s,t\in I$$

其中 $u,v\in C[I,R^+)$, 那么

$$u(t)\leqslant c+\exp(\int_0^t v(s)\mathrm{d}s),t\in I$$

2　定　理

设 $\sup\|f(t,0)\|=N$, $\sup\|p(t,x)\|=P$, $\sup|q(t)|=Q<1$, $t\in J$

定理 6　如果条件(a)和(b)成立,并满足下列不等式

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant\lambda(t)\|x-y\| \tag{5}$$

其中 $\lambda(t)$ 在 $[0,\infty)$ 是连续的,那么方程(1) ~(2)在 $[-\infty,b)$ 存在一个解.

证明　设 $F:B\to B$,

$$(Fx)(t)=g(t,x_t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\times f(s,x_s)\mathrm{d}s,t\in J=[0,\infty] \tag{6}$$

$$(Fx)(t)=0,t\in[-\infty,0]$$

设 $\lambda(t)\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+1)}{3b^\alpha}$, 则,我们能证明 $FB_r\subset B_r$, 其 $B_r:=x\in B$ 中, $\|x\|\leqslant r$, 令 $x\in B_r$ 那么,我们得到

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)\|&\leqslant\|p(t,x_s)\|+\|q(t)\|\,\|f(t,x_s)\|+\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\theta)^{\alpha-1}f(\theta,x_\theta)\mathrm{d}\theta\leqslant\|p(t,x_s)-p(t,0)\|+\\&\|p(t,0)\|+Q[\|f(t,x_s)-f(t,0)\|+\|f(t,0)\|]+\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\theta)^{\alpha-1}[\|f(\theta,x_\theta)-f(\theta,0)\|+\|f(\theta,0)\|]\mathrm{d}\theta\\&\leqslant Lr+rQ\lambda(t)+NQ+(r\lambda(t)+N)\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\&=Ar+B+Cr<r\end{aligned}$$

其中, $A=L+Q\lambda(t)<\frac{1}{3}$, $B=P+Q\lambda(t)+\frac{Nb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<\frac{r}{3}$, $C=\frac{b^\alpha\lambda(t)}{\Gamma(\alpha+1)}<\frac{1}{3}$

对于 $x,y\in B$, 我们得到

$$\begin{aligned}\|(Fx)(t)-(Fy)(t)\|&\leqslant\|g(t,x_t)-g(t,y_t)\|+\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\theta)^{\alpha-1}\|f(\theta,x_\theta)-f(\theta,y_\theta)\|\mathrm{d}\theta\leqslant\\&\|p(t,x_t)-p(t,y_t)\|+Q(\|(Fx)(t)-(Fy)(t)\|+\\&\frac{b^\alpha\lambda(t)}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|)\leqslant[L+Q\lambda(t)+\\&\frac{b^\alpha\lambda(t)}{\Gamma(\alpha+1)}]\|x-y\|\end{aligned}$$

因为 $L+Q\lambda(t)+\frac{b^\alpha\lambda(t)}{\Gamma(\alpha+1)}<1$, 由压缩映射

原理和引理 4,方程(1) ~ (2) 有解.

评论 7 如果 $\lambda(t) = L > 0$ 是一个常数,那么式子(5)符合李普希兹条件.

定理 8 如果条件(a)和(b)成立,并满足下列条件

(c) $f(t,u) \leqslant u(t), 0 < t \leqslant b, b > 0$

(d) $f(t,u) \geqslant u(t), t < 0.$

那么方程(1) ~ (2) 在 $[-\infty, b)$ 存在唯一的解.

证明 设 $F: B \to B$, F 符合式子(6),首先证明 F 是完全连续的.

第一步:证明 F 是完全连续的. 设数列 x_{n_s} 使得 $x_{n_s} \to x_s$, $x_n \in B, n, s \in N$, $\sup\limits_{t \in J} q(t) = Q$,则

$$\|(Fx_n) - (Fx)\| \leqslant \|p(t,x_{n_s}) - p(t,x_s)\| + Q|f(t,x_{n_s}) - f(t,x_s)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (t-s)^{\alpha-1} \times |f(t,x_{n_s}) - f(t,x_s)| \, \mathrm{d}s$$

因为 F 和 p 是连续函数,由(a) ~ (c)我们有

$$\|(Fx_n) - (Fx)\| \leqslant [L + Q + \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}] \|x_{n_s} - x_s\| \to 0, n \to \infty$$

第二步:证明 F 在 B 是有界. 设 $\eta > 0$, 存在 $l > 0$ 使得 $x \in B_\eta = x \in B: \|x\|_b \leqslant \eta$, $\|f(x)\|_\infty \leqslant l$, 因为 F 和 p 是连续函数, $t \in [0, b]$,

$$\|(Fx)(t)\| \leqslant \|p(t,x_t)\| + \|q(t)\| \|f(t,x_t)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b (t-s)^{\alpha-1} \|f(s,x_s)\| \mathrm{d}s \leqslant P + Q\|x(t)\| + \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x(t)\|_b \leqslant P + (Q + \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)})\eta = l$$

第三步:证明 F 在 B 中是等度连续的. 设 $t_1, t_2 \in [0,b]$, $t_1 \leqslant t_2$, 设 B_η 在 B 中是有界的, $x \in B_\eta$, 对于 $t \in [0,b]$ 有

$$|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)| = |p(t_2,x) - p(t_1,x)| + Q|f(t,x_{n_s}) - f(t,x_s)| + |q(t_2) - q(t_1)| \|f(t,x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} |(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}| f(t,x_s)\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1} f(t,x_s)\mathrm{d}s \leqslant K|t_2 - t_1|^r + M\eta|t_2 - t_1|^\beta + \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha + (t_1)^\alpha - (t_2)^\alpha] + (t_2-t_1)^\alpha \leqslant K|t_2 - t_1|^r + M\eta|t_2 - t_1|^\beta + \frac{2\beta}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha$$

当 $t_1 \to t_2$ 时, $|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)| \to 0$. 当 $t_1 < t_2 \leqslant 0$ 和 $t_1 \leqslant 0 \leqslant t_2$ 时结果是显然的. 综合前三步, 能推出当 $F: B \to B$ 时, F 是完全连续的.

第四步,存在一个开集 $U \subseteq B$, 对于 $\lambda \in (0,1)$, $x \in \partial u$ 有 $x \neq \lambda F(x)$.

设 $x \in B$, $x = \lambda F(x)$, $\lambda \in (0,1)$, $t \in [0, b]$ 时有

$$x(t) = \lambda[g(t,x_t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x_s)\mathrm{d}s]$$

通过(b)和(c)

$$|x(t)| \leqslant |p(t,x_t)| + |q(t)| \|x(t)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)| \, \mathrm{d}s$$

所以

$$|x(t)| \leqslant \frac{P}{1-Q} + \frac{1}{(1-Q)\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)| \, \mathrm{d}s$$

设 $|x(t)| = w(t)$, $w(t) \leqslant \frac{P}{1-Q} + \frac{1}{(1-Q)\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)\mathrm{d}s$

从引理 5 得到

$$w(t) \leqslant \frac{P}{1-Q}\exp(\frac{1}{(1-Q)\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} w(s)\mathrm{d}s)$$

因此,

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \frac{P}{1-Q}\exp(\frac{P}{(1-Q)\Gamma(\alpha+1)}) := \overline{M}$$

那么,

$$\|x\|_\infty \leqslant \overline{M}$$

设, $F: \overline{U} \to B$ 是完全连续的,则不存在 U, 使得 $x = \lambda F(x)$, $\lambda \in (0,1)$. 所以由引理 3, F 在 U 中有一个不动点 x.

参考文献:

[1] Belarbi A, Benchohra M, Ouahab A. Uniqueness results for fractional functionas differential equations with infinite delay in Frechet spaces[J]. Appl. Anal., 2006, 85(12):1459-1470.

[2] Jafari H, Daftardar-Gejji V. Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition[J]. J. Comput Appl. Math., 2006, 196(2):644-651.

[3] Kibas A A, Marzan S A. Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions[J]. Diff. Equ, 2005, 41(1):84-89.
[4] Miller K S, Ros B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: Wilet, 1993.
[5] Hale J K. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
[6] Bai Z, Lu H. Positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equations [J]. J. Math. Anal. Appl, 2005, 311:495-505.
[7] Kosmatov N. A singular boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order, J Appl. Math. Comput. (2008) doi: 10. 1007/s12190-008-0104-x.
[8] Kaufmann E R, Mboumi E. Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation, Electron. J. Qual. Theorey Diff. Equ. 2008(3) (2008)1-11.
[9] Podlubny I. Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1999.
[10] Li C F, Luo X N, Zhou Y. Existence of positive solutions of the boundary valuo problem for nonlinear fractional differential equations, C. And M. With Appl. 59 (2010)1363-1375.

(上接第 76 页)

表 3　SAD 程序运行结果

Table 3　Result of the program about SAD

优化前周期数	优化后周期数	速度提高百分比
53	24	54.7%

实验结果表明对 DCT 变换,帧内预测选择进行线性汇编改写,对 SAD 函数进行并行汇编改写,分别大大缩短了函数的执行周期,大大提高了编码器的性能.

参考文献:

[1] Joint Video Team(JVT) of ISO/IEC MPEG & ITU-T VCEG. Draft ITU-T Recommendation and Final Draft International Standard of Joint Video Specification. ITU-T Rec. H. 264/ISO/IEC14496-10 AVC[S]. Geneva, Switzerland. Version1, 2003; Version3, 2007.
[2] Texas Instruments Incorporated. TMS320DM64x Digital Media Processors [DB\OL]. http://www. ti. com/lit/ml/sprt277c/sprt277c. pdf.
[3] 毕厚杰. 新一代视频压缩编码标准—H. 264/AVC [M]. 北京:人民邮电出版, 2005:84-139.
[4] Richardson I E. H. 264 and MPEG-4 video compression [M]. West Sussex: JohnWiley&Sons Ltd, 2003.
[5] 李世平. H. 264 三大开源编码器之评测报告[DB\OL]. http://blog. csdn. net/sunshine1314/article/details/397895, 2005-06-19.
[6] Texas Instruments Incorporated. TMS320C6000 系列 DSP 编程工具与指南[M]. 田黎育,何佩琨,朱梦宇,译. 北京:清华大学出版社, 2006:1-48;235-422.
[7] 张芙蓉. DM642 监控视频 H. 264 编码器的实现和优化[D]. 杭州:浙江大学, 2006.
[8] 桂邦豪,莫玮,殷玉喆,等. H. 264 帧内预测模式的研究[J]. 国外电子测量技术, 2011, 30(3):9-12.