文章编号:1673 - 0062(2013)04 - 0068 - 03

二项索赔下保费收取为 Poisson 过程的破产概率研究

王治强,刘冬元

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:将经典风险模型推广为保费收取为 Poisson 过程,赔偿次数为二项过程的离散风险模型,讨论了盈余过程的性质,给出了关于破产概率的一个定理和几个推论.

关键词:Poisson 过程;二项过程;破产概率;调节系数

中图分类号:O175.12　　**文献标识码**:A

Research on Ruin Probability of Insurance Charge with Poisson Process Under Binomial Claim

WANG Zhi-qiang, LIU Dong-yuan

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, we extended the classical risk model to a discrete risk model in which the premium rate was a Poisson process and the number of compensation rate was a binomial process. It discussed the nature of surplus process, gave a theorem about the ruin probability and several inferences.

key words: Poisson process; binomial process; ruin probability; adjustment coefficient

1　模型介绍

在经典风险理论中,对于复合 Poisson 风险模型和复合二项风险模型在有限时间内的生存概率以及最终破产概率等问题都有大量的研究,并取得了大量有用的结果. 例如龚日朝和杨向群[2]讨论了一般情形的复合二项风险模型;龚日朝[3]运用随机过程和鞅方法得出了推广后的 Poisson 模型的破产概率满足的 Lundberg 不等式和一般公式;而王黎明和金珩[4]考虑了保费收入是 Poisson 过程的情形. 本文根据实际情况将经典风险模型推广为保费收取为 Poisson 过程,赔偿次数为二项过程的形式,即:

$$U(n) = u + cN(n) - \sum_{i=1}^{M(n)} X_i \tag{1}$$

$$S(n) = cN(n) - \sum_{i=1}^{M(n)} X_i \tag{2}$$

收稿日期:2013 - 07 - 04

基金项目:湖南省科学技术厅基金资助项目(2010ZK3052);衡阳市科技局基金资助项目(2012KJ5);南华大学博士基金资助项目(2010XQD33)

作者简介:王治强(1987 -),男,河南洛阳人,南华大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向:保险精算.

$$B(n) = \sum_{i=1}^{M(n)} X_i \qquad (3)$$

其中,n 是公司运作时刻,公司收取保费和进行赔偿均在离散时间 $n(n = 0,1,2\cdots)$ 进行. $U(n)$ 表示$[0,n]$ 时间段内保险公司盈余资本,$N(n)$ 表示$[0,n]$ 时间段内收取保费的次数,且 $N\{(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 为具有参数 λ 的 *Poisson* 随机序列,c 是每张保单的费用,第 i 次赔付量为 X_i,$\{X_i, i = 1,2,\cdots\}$ 为理赔序列,$M(n)$ 表示$[0,n]$ 时间段内理赔发生次数,$M\{(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 为具有参数 p 的二项随机序列. $\{X_i, i = 1,2,\cdots\}$,$\{N(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 与 $\{M(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ 相互独立,$\{X_i, i = 1,2,\cdots\}$ 同分布,与 X 有相同的分布函数. $S(n)$ 为$[0,n]$ 时间段内盈利情况,$B(n)$ 为$[0,n]$ 时间段内理赔总量.

假定 $\mu_1 = E(X) < \infty$,$\mu_2 = E(X^2) < \infty$,且出于公司运行安全考虑,要求

$$E[S(n)] = c\lambda n - \mu_1 pn = (c\lambda - \mu_1 p)n > 0,$$

故定义安全负荷系数 $\theta = \dfrac{c\lambda - \mu_1 p}{\mu_1 p}$,且只考虑 $\theta > 0$ 的情况. 运用强大数定理可证:

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = +\infty \quad a.s.,$$

也可表示为

$$P[\lim_{n\to\infty} S(n) > 0] = 1,$$

即只要收入大于平均损失,当时间 n 趋向于无穷大时,盈利几乎处处为正. 实际上,尽管盈利的极限无限大,但还是可能出现盈利(或盈余)为负值的情况. 我们最关心的问题就是出现负盈余的情况,故要考虑破产问题. 为此定义破产时刻为

$$T = \min\{n : U(n) < 0\};$$

有限时间破产概率为

$$\varphi(u,n) = P\{T < n \mid U(0) = u\};$$

最终破产概率为

$$\varphi(u) = P\{T < +\infty \mid U(0) = u\}.$$

2　主要结果

记每次赔付量 X 的矩母函数为 $m_X(r) = E(e^{Xr})$,$r \in R$.

定理 1　对于离散过程 $\{S(n), n = 0,1,2\cdots\}$,存在函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS(n)}] = e^{ng(r)}$,且方程 $g(r) = 0$ 有唯一正解 R ,称之为调节系数.

证 明　$E[e^{-rS(n)}] = E[e^{-rcN(n)+r\sum_{i=1}^{M(n)} X_i}] = E(e^{-rcN(n)})E(e^{r\sum_{i=1}^{M(n)} X_i}) = e^{\lambda n(e^{-rc}-1)} e^{n\ln[pm_X(r)+q]} = e^{\{\lambda(e^{-rc}-1)+\ln[pm_X(r)+q]\}n}$.

令 $g(r) = \lambda(e^{-rc} - 1) + \ln[pm_X(r) + q]$,则 $E[e^{-rS(n)}] = e^{ng(r)}$.

$$g'(r) = \frac{dg(r)}{dr} = -\lambda ce^{-rc} + \frac{pm'_X(r)}{pm_X(r) + q},$$

$$g''(r) = \frac{d^2 g(r)}{dr^2} = \lambda c^2 e^{-rc} + \frac{pm''_X(r)[pm_X(r) + q] - [pm'_X(r)]^2}{[pm_X(r) + q]^2}.$$

由于 $g(0) = 0$, $g'(0) = -\lambda c + p\mu_1 < 0$,从而 $g(r)$ 经过原点,在 $r = 0$ 处,曲线 $g(r)$ 的切线斜率小于 0,将 $g''(r)$ 改写为如下形式:

$$g''(r) = \lambda c^2 e^{-rc} + \frac{pqm''_X(r)}{[pm_X(r) + q]^2} + \frac{p^2\{[E(X^2 e^{Xr})E(e^{Xr}) - [E(Xe^{Xr})]^2\}}{[pm_X(r) + q]^2}.$$

上式右端第一项,第二项显然均为正. 令 $\xi = Xe^{\frac{1}{2}Xr}$, $\eta = e^{\frac{1}{2}Xr}$,由柯西—施瓦兹不等式知 $E(X^2 e^{Xr})E(e^{Xr}) \geqslant [E(Xe^{Xr})]^2$,即右端第三项非负,故 $g''(r) > 0$,函数 $g(r)$ 在 $r > 0$ 内是一个凸函数,进而,只要理赔量 X_i 以正概率取值足够大,对充分大的 r ,一阶导数保持为正, $g(r)$ 将具有唯一的极小值点,而且方程 $g(r) = 0$ 有唯一的正根,记为 R ,称之为调节系数.

定理 2　对于风险模型 $\{U(n), n = 0,1,2\cdots\}$, 其破产概率为 $\varphi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}$.

证 明　$E[e^{-rU(n)}] = E[e^{-rU(n)} \mid T \leqslant n]P(T \leqslant n) + E[e^{-rU(n)} \mid T > n]P(T > n)$　(4)

因为 $U(n) = u + cN(n) - \sum_{i=1}^{M(n)} X_i$,故式(4)左端为

$$E[e^{-rU(n)}] = e^{-ru+\lambda n(e^{-rc}-1)+n\ln[pm_X(r)+q]}$$

而式(4)右端第一项(记为 l_1)中,将 $U(n)$ 写成

$$U(n) = U(T) + [U(n) - U(T)] = U(T) + c[N(n) - N(T)] - [B(n) - B(T)],$$

对于给定的 T , $U(T)$ 、$\{N(n) - N(T)\}$ 和 $\{B(n) - B(T)\}$ 三者相互独立,且 $\{N(n) - N(T)\}$ 服从参数为 $\lambda(n - T)$ 的复合 Poisson 分布, $\{B(n) - B(T)\}$ 服从参数为 $(n - T)$ 和 p 的复合二项分布. 从而

$$l_1 = E\{e^{-r(n-T)-rc[N(n)-N(T)]+r[B(n)-B(T)]} \mid T \leqslant n\}P(T \leqslant n)$$

$$= E\{e^{-rU(T)} e^{\lambda(n-T)(e^{-rc}-1)} e^{(n-T)\ln[pm_X(r)+q]} \mid T \leqslant$$

$n\} P(T \leqslant n)$.

选择 r 满足定理 1,即取 $r = R$(调节系数)时,则式(4)可简化为

$$e^{-Ru} = E[e^{-rU(T)} \mid T \leqslant n]P(T \leqslant n) + E[e^{-rU(n)} \mid T < n]P(T < n) \tag{5}$$

当 $n \to \infty$ 时,式(5)右端第一项收敛于 $E[e^{-rU(T)} \mid T \leqslant n]\varphi(u)$. 现在只要证明右端第二项当 $n \to \infty$ 时趋于 0,定理就得到证明了. 为此,记 $\alpha = c\lambda - p\mu_1 > 0, \beta^2 = c^2\lambda + p\mu_2 - p^2{\mu_1}^2$,可得

$$E[U(n)] = u + n\alpha, Var[U(n)] = Var[S(r)] = Var[cN(n) - \sum_{i=1}^{M(n)} X_i] = c^2\lambda n + np\mu_2 - np^2\mu_1^2 = \beta^2 n.$$

考虑 $u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}$,只要 n 充分大,这就是正的,因此,可将式(5)中右端第二项用 $U(n)$ 与 $u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}$ 的值的大小拆成两项,即:

$$\begin{aligned} &E[e^{-RU(n)} \mid T > n]P(T > n) \\ &= E[e^{-RU(n)} \mid T > n, 0 \leqslant U(n) \leqslant u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}]P[T > n, 0 \leqslant U(n) \leqslant u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}] + E[e^{-RU(n)} \mid T > n, \\ &U(n) > u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}]P[T > n, U(n) > u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}] \leqslant P\{0 \leqslant U(n) \leqslant u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}\} + e^{-R(u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}})} \end{aligned}$$

由切比雪夫不等式有:

$$P\{0 \leqslant U(n) \leqslant u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}}\} = P\{-u - \alpha n \leqslant U(n) - u - \alpha n \leqslant -\beta n^{\frac{2}{3}}\} \leqslant P\{\mid U(n) - E[U(n)] \mid > \beta n^{\frac{2}{3}}\} \leqslant \frac{Var[U(n)]}{\beta^2 n^{\frac{4}{3}}} = n^{-\frac{1}{3}}$$

可得:

$$E[e^{-RU(n)} \mid T > n]P(T > n) \leqslant n^{-\frac{1}{3}} + e^{-R(u + \alpha n - \beta n^{\frac{2}{3}})},$$

于是当 $n \to \infty$ 时,上式趋于 0,定理得证.

容易看出,当 $n < \infty$ 时,有 $U(T) < 0$,于是总有 $E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] > 1$,所以有:

推论 1

$$\varphi(u) < e^{-Ru}$$

这个不等式给出了破产概率的上界,在保险实务中有很好的实用性.

如果单次理赔量 X 有上界,不妨设为 A($A > 0$). 当 $T < \infty$ 时,$U(T) > -A$,故 $e^{-RU(T)} < e^{RA}$,从而有:$E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] < e^{RA}$,于是有:

推论 2

$$\varphi(u) > e^{-Ru}e^{-RA} = e^{-R(u+A)}$$

在调节系数 R 很小,初始资本 u 很大,而单次理赔量有上界时,结合推论 1 与推论 2 可得下面关于破产概率的近似式:

推论 3

$$\varphi(u) \approx e^{-Ru}.$$

参考文献:

[1] 熊福生. 风险理论[M]. 武汉:武汉大学出版社,2005.

[2] 吴岚. 风险理论[M]. 北京:学出版社,2012.

[3] 龚日朝,杨向群. 复合二项风险模型下的破产概率[J]. 吉首大学学报,2000,21(4):41-43.

[4] 龚日朝. 在一个推广后的 Poisson 风险模型下的破产概率[J]. 常德师范学院学报,2001,13(1):6-8.

[5] 王黎明,金珩. 保险费收取次数为 Poisson 过程的破产概率[J]. 内蒙古师大学报,2000,29(3):176-179.

[6] Wei J, Liu H S, Gui W Y. Ruin probability of double type insurance compound negative binomial risk model [J]. Communications in Computer and Information Science,2012,308:341-347.