文章编号:1673-0062(2013)04-0056-03

4 阶非 Hermitian 哈密尔顿系统的谱

王红勇,姜 琴*,朱 晖

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:离散的非 Hermitian 矩阵在物理学应用领域中有着极其重要的作用,本文针对来源于非 Hermitian 离散量子系统的一个 4 阶的复三对角矩阵,给出其谱为实谱的必要条件及在一定条件下的充要条件.

关键词:非 Hermitian;谱;特征值

中图分类号:O175.26 **文献标识码**:A

On the Spectrum of a 4 by 4 Non-Hermitian Hamiltonian

WANG Hong-yong, JIANG Qin*, ZHU Hui

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The problem of discrete non-Hermitian plays an important role in the physical Applications, according to a 4 × 4 tridiagonal complex matrix which originated from a non-Hermitian discrete quantum system, we consider the necessary and sufficient conditions of the reality of its spectrum under certain conditions.

key words: non-Hermitian; spectrum; eigenvalue

在数学物理学相关领域的一些重要问题中经常需要考察具实谱的非 Hermitian(非自共轭)算子[1-3],这引出了两个研究课题:一是构造具有实谱的非 Hermitian 算子,二是对于给定的非 Hermitian 算子,考察其具有实谱的充要条件. 最近, E. Ergun 在文献[1]中考虑了以下离散的非 Hermitian 问题:

$$-\Delta^2 y_{n-1} + q_n y_n = \lambda \rho_n y_n, n \in \Omega = \{-M, \cdots, -2, -1\} \cup \{2, 3, \cdots, n\} \tag{1}$$

$$y_{-1} = y_1, \Delta y_{-1} = e^{2i\delta} \Delta y_1, \tag{2}$$

$$y_{-M-1} = y_{N+1} = 0, \tag{3}$$

其中 $M \geqslant 1$, $N \geqslant 2$ 都是正整数,Δ 是向前差分算子,定义为 $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. 以及 $\delta \in [0, \pi/2)$, q_n 是实数, ρ_n 定义为

收稿日期:2013-07-21

基金项目:衡阳市科技局基金资助项目(2011KJ4);南华大学博士启动基金资助项目(2011XQD36);湖南省自然科学基金资助项目(14JJ6020)

作者简介:王红勇(1982-),男,湖南株洲人,南华大学数理学院讲师,博士研究生. 主要研究方向:渐近分析. *通讯作者.

$$\rho_n = \begin{cases} e^{2i\delta}, n \leqslant -1, \\ e^{-2i\delta}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

不难知道,问题(1)~(3)关于普通的内积对应着一个非 Hermitian 矩阵,更具体地,这个非 Hermitian 矩阵是一复 Jacobi 矩阵(即复的三对角矩阵),本文着力于找到其谱为实谱的一些必要条件及在一定条件下的充要条件. 由于对任意的正整数 M 和 N, 这些条件一般来讲是非常难找到的. 因此,目前的工作都是围绕一些特殊情形来展开的,比如[4],当 $\delta = 0$ 时,问题(1)~(3)是自共轭的,因而其特征值均为实数,即谱为实谱. 当 $\delta \in (0,\pi/2)$ 时,问题(1)~(3)的谱为实谱的充要条件是

$$q_{-1} = 0, q_2 = -1 \text{ 及 } \delta \in (0,\pi/6].$$

另外,在文献[4]和文献[5]中,分别给出了 $M = 1, N = 3$ 时问题(1)~(3)的特征值为实数的必要和充要条件,本文将其工作推广到 $M = 1$, $N = 4$ 的情形. 本文的研究结果表明,虽然表面上只是 N 改变了,但是得到充要条件的过程却要困难得多,并且据我们所知,对于 $M = 1, N = 5$ 等一般情形,充要条件的研究非常具有挑战性.

1　预备知识

为了更清楚地研究问题(1)~(3),我们将其改写为如下形式

$$-y_{n-1} + v_n y_n - y_{n+1} = \lambda \rho_n y_n, n \in \Omega \tag{4}$$

$$y_0 = (1 - e^{2i\delta}) y_{-1} + e^{2i\delta} y_2, y_1 = y_{-1} \tag{5}$$

$$y_{-M-1} = y_{N+1} = 0 \tag{6}$$

其中 $v_n = 2 + q_n, n \in \Omega$. 当 $M = 1, N = 4$ 时,等式(4)~等式(5)等价于

$$Ay = \lambda y$$

这里

$$A = \begin{bmatrix} 1 + (a-1)e^{-2i\delta} & -1 & 0 & 0 \\ -e^{2i\delta} & be^{2i\delta} & -e^{2i\delta} & 0 \\ 0 & -e^{2i\delta} & ce^{2i\delta} & -e^{2i\delta} \\ 0 & 0 & -e^{2i\delta} & de^{2i\delta} \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

以及

$$a = v_{-1} = 2 + q_{-1}, b = v_2 = 2 + q_2,$$
$$c = v_3 = 2 + q_3, d = v_4 = 2 + q_4.$$

引理 1(盛金公式)考虑以下方程 $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$, 系数 $a_i, i = 0, 1, \cdots, 4$ 均为实数,记其根为 x_1, x_2, x_3, x_4,令

$$D = -(3a_1{}^2 - 8a_0 a_2),$$

$$E = 3a_1{}^4 + 16a_0{}^2 a_2{}^2 - 16a_0 a_1 a_2 + 16a_0{}^2 a_1 a_3 - 64a_0{}^3 a_4,$$

$$F = -(a_1{}^3 - 4a_0 a_1 a_2 + 8a_0{}^2 a_3),$$

若记方程 $y^3 + Dy^2 + Ey + F = 0$ 的根为 y_1, y_2, y_3, 则

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}}{4a_0},$$

$$x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}}{4a_0},$$

$$x_3 = \frac{-a_1 - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}}{4a_0},$$

$$x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}}{4a_0},$$

引理 2　在引理 1 的条件都成立的情况下,x_1, x_2, x_3, x_4 为实数的充要条件是 y_1, y_2, y_3 非负.

由于证明比较简单,我们省略证明过程.

引理 3　若三次方程 $y^3 + \overline{D}y^2 + \overline{E}y + \overline{F} = 0$ 的系数 $\overline{D}, \overline{E}, \overline{F}$ 均为实数,并且其根都为实数,则其根非负的充要条件为① $y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 0$;② $y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 \geqslant 0$;③ $y_1 y_2 y_3 \geqslant 0$.

证明　必要性的证明是很显然的,下证充分性. 反证法,为了叙述方便,我们只讨论根非零且互不相等的情形,其他情形可类似讨论. 不妨设 $y_1 < y_2 < y_3$ 不都为正数,则有三种情况需要讨论:

1) $y_1 < y_2 < y_3 < 0$, 此时与条件①矛盾;

2)当 $y_1 < y_2 < 0 < y_3$ 时,由条件①及假设条件知 $y_1 + y_3 > 0$, 又 $y_1 y_3 < y_2 y_3$, 因此

$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 < y_1 y_2 + 2y_2 y_3 < 2y_2(y_1 + y_3) < 0$, 这与条件②矛盾;

3)当 $y_1 < 0 < y_2 < y_3$ 时,此时与条件③矛盾.

所以 y_1, y_2, y_3 均为正数.

注 1　由多项式根和系数的关系,条件①②③等价于 $\overline{D} \leqslant 0, \overline{E} \geqslant 0, \overline{F} \leqslant 0$.

2　主要定理的叙述和证明

定理 1　若 A 的特征值是实的,则

$$b + c + d - a + 1 = 0, \tag{7}$$

$$b + c + d - 1 + 2(bc + bd + cd - 2)\cos 2\delta = 0 \tag{8}$$

$$4(b + d - bcd)\cos^2 2\delta + 2(2 - bc - bd - cd + c + d)\cos 2\delta - (b + d - bcd) + (a-1)(2 - bc - bd - cd) = 0 \tag{9}$$

$$4(1-cd+bcd-b-d)\cos^2 2\delta+$$
$$2(abcd-bcd-ab+b-ad+d)\cos 2\delta-$$
$$(1-cd+bcd-b-d)=0 \qquad (10)$$

证明 矩阵 A 的特征多项式为 $\det(A-\lambda I_4)=0$, 也即

$$\lambda^4-[(b+c+d)e^{2i\delta}+(a-1)e^{-2i\delta}+1]\lambda^3+$$
$$[(bc+bd+cd-2)e^{4i\delta}+(b+c+d-1)e^{2i\delta}+$$
$$(a-1)(b+c+d)]\lambda^2+[(b+d-bcd)e^{6i\delta}+$$
$$(2-bc-bd-cd+c+d)e^{4i\delta}+$$
$$(a-1)(2-bc-bd-cd)e^{2i\delta}]\lambda+$$
$$(1-cd+bcd-b-d)e^{6i\delta}+$$
$$(abcd-bcd-ab+b-ad+d)e^{4i\delta}=0 \quad (11)$$

记方程(11)的解为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, 由根和多项式系数之间的联系知

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i=(b+c+d)e^{2i\delta}+(a-1)e^{-2i\delta}+1,$$
$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{4}\lambda_i\lambda_j=(bc+bd+cd-2)e^{4i\delta}+$$
$$(b+c+d-1)e^{2i\delta}+(a-1)(b+c+d),$$
$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j\neq k}}^{4}\lambda_i\lambda_j\lambda_k=(b+d-bcd)e^{6i\delta}+$$
$$(2-bc-bd-cd+c+d)e^{4i\delta}+$$
$$(a-1)(2-bc-bd-cd)e^{2i\delta}$$
$$\prod_{i=1}^{4}\lambda_i=(1-cd+bcd-b-d)e^{6i\delta}+$$
$$(abcd-bcd-ab+b-ad+d)e^{4i\delta},$$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 为实数,则上面四个等式的右边均为实数,化简得

$$(b+c+d-a+1)\sin 2\delta=0$$
$$(bc+bd+cd-2)\sin 4\delta+(b+c+d-1)\sin 2\delta=0$$
$$(b+d-bcd)\sin 6\delta+$$
$$(2-bc-bd-cd+c+d)\sin 4\delta+$$
$$(a-1)(2-bc-bd-cd)\sin 2\delta=0$$
$$(1-cd+bcd-b-d)\sin 6\delta+(abcd-$$
$$bcd-ab+b-ad+d)\sin 4\delta=0$$

由 $\sin 2\delta\neq 0,\delta\in(0,\pi/2)$, $\sin 4\delta=2\sin 2\delta\cos 2\delta$, $\sin 6\delta=\sin 2\delta\cos 4\delta+\cos 2\delta\cdot\sin 4\delta$, $\cos 4\delta=2\cos^2 2\delta-1$, 化简可得定理 1.

推论 1 若矩阵 A 的特征值是实数,则必须

(i) $\delta\neq\frac{\pi}{4}$; (ii) $bc+bd+cd\neq 2$ 且 $cd\neq 1$.

证明 (i)若不然,则 $\cos 2\delta=0$, 由式(8)可得 $b+c+d-1=0$, 结合式(7)可得 $a=2$, 再由式(10)式(11)可得 $1-cd+bcd-b-d=0$, $2-bc-bd-cd-(b+d-bcd)=0$, 综合所得式子,可知 $b^2-b+1=0$, 从而 $b=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, 这与 b 为实数矛盾.

(ii)若不然,则有 $bc+bd+cd=2$ 且 $cd=1$, 即有 $b(c+d)-1=0$. 由式(8)可得 $b+c+d=1$, 从而有 $b(1-b)-1=0$, 即为 $b^2-b+1=0$, 可得 $b=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, 这与 b 为实数矛盾.

定理 2 在式(7)~式(10)都成立的条件下, A 的特征值是实数的充要条件是

$$3{a_1}^2-8a_2\geqslant 0,$$
$$3{a_1}^4+16{a_2}^2-16a_1a_2+16a_1a_3-64a_4\geqslant 0,$$
$${a_1}^3-4a_1a_2+8a_3\geqslant 0$$

其中

$$a_1=-(b+c+d-a+1)\cos 2\delta-1$$
$$a_2=(bc+bd+cd-2)\cos 4\delta+$$
$$(b+c+d-1)\cos 2\delta+(a-1)(b+c+d)$$
$$a_3=(b+d-bcd)\cos 6\delta+$$
$$(2-bc-bd-cd+c+d)\cos 4\delta+$$
$$(a-1)(2-bc-bd-cd)\cos 2\delta$$
$$a_4=(1-cd+bcd-b-d)\cos 6\delta+$$
$$(abcd-bcd-ab+b-ad+d)\cos 4\delta$$

证明 若式(7)~式(10)成立,则参照引理 1 的符号,式(11)的各项系数中, $a_0=1$, a_1,a_2,a_3,a_4 由定理给出,结合引理 1,2,3 及注 1 可得所证.

3 结束语

定理 2 的结论虽然稍显繁琐,但是对于本就难于寻找的充要条件而言,这是一个较好的进展,对于更加一般的情形仍然有待解决.

参考文献:

[1] Dolph C I. Recent developments in some non-self-adjoint problems of mathematical physics[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67(1): 1-69.

[2] Davies E B. Non-self-adjoint differential operators[J]. Bull. Lond. Math. Soc., 2002, 34(5): 513-532.

[3] Guseinov G S. Inverse spectral problems for tridiagonal N by N complex Hamiltonians[J]. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), 2009, 5: 18-28.

[4] Ergun E. On the reality of the spectrum of a nontian discrete Hamiltonian[J]. Rep. Math. Phys., 2009, 63(1): 75-93.

[5] Ergun E, Bairamov E. On the eigenvalues of a 3 by 3 non-Hermitian Hamiltonian[J]. J. Math. Chem., 2011, 49(2): 609-617.