文章编号:1673 - 0062(2013)04 - 0053 - 03

带干扰混合保费的多险种风险模型

刘冬元,廖基定,刘邵容,王治强

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:本文将保费混合收取的单险种风险模型推广为带干扰混合保费的多险种风险模型.并得到了这种风险模型的破产概率所满足的不等式及其一般公式.

关键词:混合保费;多险种;破产概率;鞅

中图分类号:O211　　**文献标识码**:A

A Multi-Type Insurance Risk Model of Compound Premium with Interference

LIU Dong-yuan, LIAO Ji-ding, LIU Shao-rong, WANG Zhi-qiang

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this thesis, we promote the One-Type Insurance risk model of premium compound income, and get a Multi-Type Insurance risk model of compound premium with interference. Then we obtain inequality and general formulas of ultimate ruin probability for this model.

key words: compound premium; Multi-Type Insurance; ruin probability; martingale

0　引　言

经典风险模型[1]中,单位时间所收到的保单数相同,为了使经典风险模型更能与保险公司实际的经营状况相贴近,许多文献将经典风险模型推广为多险种风险模型和带干扰的多险种风险模型[2-5],并研究了其破产概率满足的不等式及其一般公式.考虑到保险公司保费收取的实际情况,本文将文献[6]的风险模型推广为带干扰混合保费的多险种风险模型,即研究索赔发生的过程为齐次 Poisson 过程,而保费收取由两部分组成:单位时间内为常速率的连续部分和随机收取的离散部分组成的多险种风险模型.

1　模型的建立

定义 1　给定概率空间 (Ω, F, P) ,模型如下:

收稿日期:2013 - 05 - 06

基金项目:湖南省科技厅基金资助项目(2010ZK3052);衡阳科技局基金资助项目(2012KJ5);南华大学博士基金资助项目(2010XQD33);人文社科基金资助项目(2011XWT10)

作者简介:刘冬元(1975 -),女,湖南祁东人,南华大学数理学院讲师.主要研究方向:风险理论与保险精算.

$R(t) = u + \sum_{j=1}^{n} c_j t + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t)} X_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t)} Y_{jk} + \sigma W(at)$, $S(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j t + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t)} X_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t)} Y_{jk} + \sigma W(at)$,($u,c_j,a,\lambda_j,\mu_j,\sigma$ 为正常数 $t \geqslant 0$);

其中:u 是初始资金;c_j 是第 j 个险种单位时间所收取的保费;$R(t)$、$S(t)$ 分别为 t 时刻的盈余与盈利;$\{W(t),t \geqslant 0\}$ 是标准的维纳过程,表示保险公司不确定的收益和付款;$\{M_j(t),t \geqslant 0\}$ 是强度为 $\lambda_j(\lambda_j > 0)$ 的 Poisson 过程($M_j(0) = 0$),第 j 个险种第 k 次收取的保费 $\{X_{jk},k = 1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的非负随机变量序列,分布函数为 $F_j(x)$,$EX_{jk} = \alpha_j$,且二阶矩存在;理赔过程 $\{N_j(t),t \geqslant 0,j = 1,2,\cdots\}$ 是参数为 $\mu_j(\mu_j > 0)$ 的 Poisson 过程($N_j(0) = 0$),第 j 个险种第 k 次的理赔额 $\{Y_{jk},k = 1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的非负随机变量序列,分布函数为 $F_j(y)$,$EY_{jk} = \beta_j$,且二阶矩存在;设 $\{X_{jk},k = 1,2,\cdots\}$,$\{Y_{jk},k = 1,2,\cdots\}$,$\{M_j(t),t \geqslant 0\}$,$\{N_j(t),t \geqslant 0\}$,$\{W(t),t \geqslant 0\}$ 是相互独立的.

为了保证保险公司的稳定经营,假定 $ES(t) > 0$,即 $\sum_{j=1}^{n}(c_j + \alpha_j\lambda_j - \beta_j\mu_j) > 0$,由此定义安全负荷 $\sum_{j=1}^{n}(c_j + \alpha_j\lambda_j) = (\theta + 1)\sum_{j=1}^{n}\beta_j\mu_j$,记 T 为保险公司首次破产的时刻,即令 $T = \inf\{t: R(t) < 0\}$,如 $\forall t \geqslant 0$, $R(t) \geqslant 0$,则令 $T = \infty$.

最终破产概率为:

$$\psi(u) = P\{T < \infty \mid R(0) = u\}.$$

2 引 理

引理 2 盈利过程 $\{S(t),t \geqslant 0\}$ 是一个右连续随机过程,且具备以下性质:

(1) $ES(t) = \sum_{j=1}^{n}(c_j + \alpha_j\lambda_j - \beta_j\mu_j)t > 0$;

(2)是平稳独立增量过程.

证明 (1)$ES(t) = E[\sum_{j=1}^{n} c_j t + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t)} X_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t)} Y_{jk} + \sigma W(at)] = \sum_{j=1}^{n}(c_j + \alpha_j\lambda_j - \beta_j\mu_j)t > 0.$

(2)由 $\{X_{jk}\}$,$\{Y_{jk}\}$,$\{M_j(t)\}$,$\{N_j(t)\}$ 的连续性,可得过程 $\{S(t):t \geqslant 0\}$ 是右连续的随机过程.

对 $\forall 0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$,有

$$S(t_{i+1}) - S(t_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j t_{i+1} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t_{i+1})} X_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t_{i+1})} Y_{jk} + \sigma W(at_{i+1}) - \sum_{j=1}^{n} c_j t_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t_i)} X_{jk} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t_i)} Y_{jk} - \sigma W(at_{i+1}) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t_{i+1} - t_i) + \sum_{j=1}^{n}[\sum_{k=M_j(t_i)+1}^{M_j(t_{i+1})} X_{jk}] - \sum_{j=1}^{n}[\sum_{k=N_j(t_i)+1}^{N_j(t_{i+1})} Y_{jk}] + \sigma[W(at_{i+1}) - W(at_i)]$$

因为 $\{X_{jk}\}$,$\{Y_{jk}\}$,$\{M_j(t)\}$,$\{N_j(t)\}$,$W(at)$ 是相互独立的,故:

$t_2 - t_1, t_3 - t_2, \cdots, t_{i+1} - t_i, \cdots$, $\sum_{k=M_j(t_i)+1}^{M_j(t_{i+1})} X_{jk}$, $\sum_{k=N_j(t_i)+1}^{N_j(t_{i+1})} Y_{jk}$, $W(at_2) - W(at_1)$, $W(at_3) - W(at_2)$, $\cdots$, $W(at_{i+1}) - W(at_i)$, $\cdots$ 相互独立的,因此 $\{S(t):t \geqslant 0\}$ 是独立增量.

又

$$S(t + s) - S(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j s + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=M_j(t)+1}^{M_j(t+s)} X_{jk} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=N_j(t)+1}^{N_j(t+s)} Y_{jk} + \sigma\{W[a(t + s)] - W(at)\}$$

对一切 $t \geqslant 0$,$\sum_{k=M_j(t)+1}^{M_j(t+s)} X_{jk}$,$\sum_{k=N_j(t)+1}^{N_j(t+s)} Y_{jk}$,$W[a(t + s)] - W(at)$ 分别具有相同的分布,所以 $\{S(t),t \geqslant 0\}$ 是平稳增量.

综上所述,过程 $\{S(t),t \geqslant 0\}$ 是右连续的,且具有平稳独立增量.

引理 3 对于盈利过程 $\{S(t):t \geqslant 0\}$,存在函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS(t)}] = e^{tg(r)}$.

证明 $E[e^{-rS(t)}] = E\{\exp[-r\sum_{j=1}^{n} c_j t - r\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t)} X_{jk} + r\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t)} Y_{jk} - r\sigma W(at)]\} = E[\exp(-r\sum_{j=1}^{n} c_j t)] \cdot E[\exp(-r\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{M_j(t)} X_{jk}] \cdot E[\exp(r\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N_j(t)} Y_{jk}] \cdot E[\exp(-r\sigma W(at))] = \exp\{-\sum_{j=1}^{n} c_j rt + t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j[M_{X_j}(-r) - 1] + t\sum_{j=1}^{n}\mu_j[M_{Y_j}(r) - 1] + \frac{1}{2}at\sigma^2 r^2\}$

则 $g(r) = -\sum_{j=1}^{n} c_j r + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j[M_{X_j}(-r) - 1] + \sum_{j=1}^{n}\mu_j[M_{Y_j}(r) - 1] + \frac{1}{2}a\sigma^2 r^2$

其中:$M_{X_j}(-r) = E(e^{-rX_j})$,$M_{Y_j}(r) = E(e^{rY_j})$,得证.

引理 4　方程 $g(r)=0$ 存在唯一正解 R,称 R 为调节系数.

证明　$g(r)=-\sum_{j=1}^{n}c_jr+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j[M_{X_j}(-r)-1]+\sum_{j=1}^{n}\mu_j[M_{Y_j}(r)-1]+\frac{1}{2}a\sigma^2r^2$

$g'(r)=-\sum_{j=1}^{n}c_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jE[X_je^{-rX_j}]+\sum_{j=1}^{n}\mu_jE[Y_je^{rY_j}]+a\sigma^2r$

$g''(r)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jE[X_j^{\ 2}e^{-rX_j}]+\sum_{j=1}^{n}\mu_jE[Y_j^{\ 2}e^{rY_j}]+a\sigma^2>0$

故 $g(r)$ 是严格凸函数,又由 $\sum_{j=1}^{n}(c_j+\alpha_j\lambda_j-\beta_j\mu_j)>0$ 得

$g'(0)=-\sum_{j=1}^{n}(c_j+\lambda_j\alpha_j-\mu_j\beta_j)<0$　又因为 $g(0)=0$

由凸函数的性质知方程 $g(r)=0$ 存在唯一正解 R.

定义 5　对于盈利过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$,定义事件流 $k^S\equiv\{k_t^S:t\geqslant 0\}$,其中 $k_t^S=\sigma\{S(v):v\leqslant t\}$

引理 6　$\{M_u(t),k_t^S(t):t\geqslant 0\}$ 是鞅,其中 $M_u(t)=\frac{\exp\{-r[u+S(t)]\}}{\exp[tg(r)]}$.

证明　对任意 $v\leqslant t$,应用引理 3 得:

$E[M_u(t)\mid k_v^S]=E\left[\frac{\exp\{-r[u+S(t)]\}}{\exp[tg(r)]}\mid k_v^S\right]=E\left[\frac{\exp\{-r[u+S(v)]\}}{\exp[vg(r)]}\cdot\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp[(t-v)g(r)]}\mid k_v^S\right]=M_u(v)\cdot E\left[\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp[(t-v)g(r)]}\mid k_v^S\right]=M_u(v)$,证毕.

引理 7　T_u 是 k^S 停时[7].

3　主要结果

定理 8　对于上述风险模型 $\{R(t):t\geqslant 0\}$,最终破产概率满足不等式:

$$\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$$

其中:$R=\sup_{r>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$.

证明　因为 T_u 是 k^S 停时,选取 $t_0<\infty$,则 $t_0\wedge T_u$ 也是 k^S 停时. 根据引理 6 以及停时定理,有

$e^{-ru}=M_u(0)=E[M_u(t_0\wedge T_u)]=E[M_u((t_0\wedge T_u)\mid T_u\leqslant t_0)]P\{T_u\leqslant t_0\}+E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}\geqslant E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}=E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}$

由于在 $\{T_u<\infty\}$ 的条件下,$u+S(T_u)<0$,所以

$$P\{T_u\leqslant t_0\}\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]}\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[\exp[-T_ug(r)]\mid T_u\leqslant t_0]}\leqslant e^{-ru}\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}e^{tg(r)}\tag{1}$$

在上式两端令 $t_0\to+\infty$,得 $\Psi(u)\leqslant e^{-ru}\sup_{t\geqslant 0}e^{tg(r)}$,取 $R=\sup_{t>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$,

根据引理 4,易知 R 即为调节系数. 即证结论.

定理 9　在上述风险模型 $\{R(t):t\geqslant 0\}$ 下,设 R 为调节系数,则最终破产概率为:

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[\exp[-R\cdot R(r)]\mid T_u<\infty]}\tag{2}$$

证明　根据式(1),取 $r=R$,得

$$e^{-ru}=E[e^{-R\cdot R(T_u)}\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}+E[e^{-R\cdot R(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}\tag{3}$$

以 $I(A)$ 表示集合 A 的示性函数,则

$0\leqslant E[e^{-R\cdot R(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}=E[e^{-R\cdot R(T_0)}I\{T_u>t_0\}]\leqslant E[e^{-R\cdot R(T_0)}I\{R(t_0)>0\}]$

由于 $0\leqslant e^{-R\cdot R(T_0)}I\{R(t_0)\geqslant 0\}\leqslant 1$,且根据强大数定理可证当 $t_0\to+\infty$ 时,$R(t_0)\to+\infty$,$P-a\cdot s$. 因此由控制收敛定理,有

$$\lim_{t_0\to+\infty}E[e^{-R\cdot R(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}=0,P-a\cdot s.$$

于是在(3)式两端令 $t_0\to+\infty$,即证得结论.

参考文献:

[1] Grandell J. Aspect of risk theory[M]. New York:Springer-verlag,1991.

[2] 黄玉娟,李爱芹,于文广,等. 一类保费随机收取的多险种风险模型[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2009,32(2):219-221.

[3] 钱晓涛. 带干扰的多险种双 Poisson-Geometric 过程风险模型[J]. 福州大学学报(自然科学版),2010,38(1):11-13.

[4] 赵彦晖,岳毅蒙,李粉娟. 带干扰的变破产下限多险种风险模型[J]. 重庆理工大学学报,2010,24(3):105-109.

[5] 于文广,黄玉娟. 干扰条件下复合 Poisson-Geometric 过程的多险种风险模型下的破产概率[J]. 山东大学学报(理学版),2008,43(2):16-18.

[6] 刘冬元,廖基定,蔡秋娥. 带干扰保费混合收取的单险种风险模型[J]. 南华大学学报(自然科学版),2012,26(1):38-40.

[7] 张波. 应用随机过程[M]. 北京:中国人民大学出版社,2002.