文章编号:1673 - 0062(2013)03 - 0043 - 03

具有浮动执行价格的亚式期权鞅定价

张 敏,朱 晖

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:本文在概率测度空间中,对亚式期权定价进行研究,考虑股票价格服从布朗运动,浮动执行价格服从 Itô 过程的两资产相关模型中,得出等价鞅测度下亚式期权的定价公式.

关键词:浮动执行价格;亚式期权;两资产相关;鞅定价

中图分类号:F830 **文献标识码**:A

Martingale Methods of Asian Option Pricing with Floating Striked Price

ZHANG Min, ZHU Hui

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: : On the probability measure space for Asian Option Pricing study, we conside the stock price follows Brown motion and floating exercise price follows Itô process during the two assets related model, to obtain Asian options pricing formula under the equivalent martingale measure.

key words: floating execution price; Asian options; two related assets; martingale pricing

0 引 言

在亚式期权定价理论中[1-3],在不同的条件下已经有很多的定价公式了[4-11],但定价的结果仍与实际结果有一定差距. 亚式期权的浮动执行价格为期权有效期内资产某段时间内的平均价格,因此平均执行价格也是随机波动的,本文考虑亚式期权中股票价格服从布朗运动和浮动敲定价格服从 Itô 过程[3]的两资产相关模型,得出了亚式期权等价鞅测度下的定价公式.

1 预备知识

考虑连续时间的金融市场,时间区间 $[0,T]$, 0 表示现在, T 表示到期日,给定某完备概率空间 (Ω,F,P),设 t 时刻的无风险利率为 $r(t)$, t 时刻的股票价格为 $S(t)$,亚式看涨期权浮动敲定价格为 $S_a(T)$ 分别满足如下的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu_S(t)\,\mathrm{d}t + \sigma_S(t)\,\mathrm{d}W_S(t) \quad S(0) = S \tag{1}$$

收稿日期:2013 - 05 - 25

基金项目:衡阳市科技局基金资助项目(2012KJ17)

作者简介:张 敏(1977 -),女,辽宁沈阳人,南华大学数理学院讲师,硕士. 主要研究方向:金融数学.

$$\frac{\mathrm{d}S_a(t)}{S_a(t)}=\mu_{S_a}(t)\mathrm{d}t+\sigma_{S_a}(t)\rho(t)\mathrm{d}W_S(t)+$$
$$\sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\mathrm{d}W_{S_a}(t)$$
$$S_a(0)=S \tag{2}$$

其中 $W(\cdot)=(W_S(\cdot),W_{S\ a}(\cdot))$ 为概率空间(Ω,F,P)上的二维标准 Brown 运动,$r(t)>0,\mu_S(t)>0,\sigma_S(t)>0,\mu_{S_a}(t)>0,\sigma_{S_a}(t)>0,\rho(t)>0$ 均为时间 t 的确切定性的函数. 当然隐含约定这些函数满足使得相关数学定义有意义,上述随机微分方程有解的必要条件. $\mathrm{d}S(t)\mathrm{d}S_a(t)=\sigma_S(t)\sigma_{S_a}(t)\rho(t)S(t)S_a(t)\mathrm{d}t$, $\{F_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$是由 $B(\cdot)$产生的递增的子 σ - 域族,$F_T=F$ 市场完备,无套利,可以对亚式期权进行风险中性定价,引入风险中性概率测度 $\hat{P}$,

令 $\theta_S(t)=\dfrac{\mu_S(t)-r(t)}{\sigma_S(t)}$,

$$\theta_{S_a}(t)=\frac{\sigma_S(t)(\mu_{S_a}(t)-r(t))-\rho(t)\sigma_{S_a}(t)(\mu_S(t)-r(t))}{\sigma_S(t)\sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}}$$

$$Z(T)=\exp\{-\int_0^T\theta_S(t)\mathrm{d}W_S(t)-\int_0^T\theta_{S_a}(t)\mathrm{d}W_{S_a}(t)-\frac{1}{2}\int_0^T(\theta_S^2(t)+\theta_{S_a}^2(t))\mathrm{d}t\}$$

$$\mathrm{d}\hat{W}_S(t)=\mathrm{d}W_S(t)+\theta_S(t)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t)=\mathrm{d}W_{S_a}(t)+\theta_{S_a}(t)\mathrm{d}t$$

则 $P(A)=\int_A Z(T)\mathrm{d}P \qquad \forall A\in F_T$

由 Girsanow 定理,$\hat{P}$ 是(Ω,F) 上的风险中性概率测度,$\hat{W}(\cdot)=(\hat{W}_S(\cdot),\hat{W}_{S_a}(\cdot))$ 是$(\Omega,F,\hat{P})$ 下的标准二维布朗运动,在 $\hat{P}$ 下,t 时刻的股票价格 $S(t)$ 和浮动执行价格 $S_a(t)$ 分别满足如下的随机微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_S(t)\mathrm{d}\hat{W}_S(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}S_a(t)}{S_a(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_{S_a}(t)\rho(t)\mathrm{d}\hat{W}_S(t)+\sigma_{S_a}(t)\times\\ \qquad\sqrt{1-\rho^2(t)}\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t),0\leqslant t\leqslant T\end{cases}\tag{3}$$

由式(3) 可知道

$$\begin{cases}S(T)=S\exp(\int_0^T r(t)\mathrm{d}t)\cdot\mathrm{e}^{\Delta},\\ S_a(T)=S_a\exp(\int_0^T r(t)\mathrm{d}t)\cdot\mathrm{e}^{\Theta}\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$\Delta=-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_S^2(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\sigma_S(t)\mathrm{d}\hat{W}_S(t)$$

$$\Theta=-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_{S_a}^2(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\rho(t)\sigma_{S_a}(t)\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t)+\int_0^T\sqrt{1-\rho^2(t)}\sigma_{S_a}(t)\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t)$$

2 主要结果及证明

定理:设市场完备,无套利,亚式期权中假设股票价格为 $S(t)$,有效期内浮动价敲定价格为 $S_a(T)$ 分别满足(1) 和(2),则亚式期权的价格为

$$C(S_a,S,T)=S_aN(d_n)-SN(d_n-\sum) \tag{5}$$

其中

$$d_n=\frac{\ln(\frac{S_a}{S})+\frac{1}{2}\int_0^T[\sigma_S^2(t)+\sigma_{S_a}^2(t)-2\rho(t)\sigma_S(t)\sigma_{S_a}(t)]\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_0^T[\sigma_S^2(t)+\sigma_{S_a}^2(t)-2\rho(t)\sigma_S(t)\sigma_{S_a}(t)]\mathrm{d}t}}$$

$$\sum=\int_0^T[\sigma_{S_a}^2(t)+\sigma_S^2(t)-2\rho(t)\sigma_{S_a}(t)\sigma_S(t)]\mathrm{d}t$$

证明:$C(S_a,S,T)=\exp(-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t)\hat{E}[(S_a(t)-S(t))^+]$

$$=\exp(-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t)E[(M\exp(\int_0^T r(t)\mathrm{d}t)\mathrm{e}^{\Theta})-S\exp(\int_0^T r(t)\mathrm{d}t)\cdot\mathrm{e}^{\Delta})^+]$$

$$=S_a\hat{E}[\mathrm{e}^{\Theta}I_{\{S_a(t)>S(t)\}}]-S\hat{E}[\mathrm{e}^{\Delta}I_{\{S_a(t)>S(t)\}}] \tag{6}$$

令 $A_1=\{S_a(t)>S(t)\}=\{S_a\mathrm{e}^{\Theta}>S\mathrm{e}^{\Delta}\}$

下面计算 $\hat{E}[\mathrm{e}^{\Delta}I_{\{A_1\}}]$

令 $\mathrm{d}W_S^1(t)=\mathrm{d}\hat{W}_S(t)-\sigma_S(t)\mathrm{d}t$,

$\mathrm{d}W_{S_a}^1(t)=\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t)$,

$$Z_1(T)=\exp(\int_0^T\sigma_S(t)\mathrm{d}\hat{W}_S(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_S^2(t)\mathrm{d}t)=\mathrm{e}^{\Delta}.$$

$$P_1(A)=\int_A Z_1(T)\mathrm{d}\hat{P} \qquad \forall A\in F.$$

由 Girsanov 定理,P_1 是 $\hat{P}$ 的等价概率测度.

$$\begin{aligned}\hat{E}[\mathrm{e}^{\Delta}I_{\{A_1\}}]&=E^{P_1}[I_{\{A_1\}}]\\&=P_1(A_1)\\&=P_1(S_a\mathrm{e}^{\Theta}>S\mathrm{e}^{\Delta})\end{aligned}\tag{7}$$

$$A_1\Leftrightarrow\{S_a\exp(-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_{S_a}^2(t)\mathrm{d}t)+\int_0^T\sigma_{S_a}(t)\rho(t)\mathrm{d}\hat{W}_S(t)+$$

$$\int_0^T \sigma(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t) > S\exp\left(\int_0^T \sigma_S(t)\,\mathrm{d}\hat{W}_S(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_S^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\}$$

$$\Leftrightarrow \{\ln S_a - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_{S_a}^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \sigma_{S_a}(t)\rho(t)\,\mathrm{d}\hat{W}_S(t) + \int_0^T \sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t) > \ln S + \int_0^T \sigma_S(t)\,\mathrm{d}\hat{W}_S(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_S^2(t)\,\mathrm{d}t\}$$

$$\Leftrightarrow \{\int_0^T (\sigma_{S_a}(t)\rho(t) - \sigma_S(t))\,\mathrm{d}\hat{W}_S(t) + \int_0^T \sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}(t) > \ln\frac{S}{S_a} + \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_{S_a}^2(t) - \sigma_S^2(t))\,\mathrm{d}t\}$$

$$\Leftrightarrow \{\int_0^T (\sigma_{S_a}(t)\rho(t) - \sigma_S(t))\,\mathrm{d}\hat{W}_s^1(t) + \int_0^T \sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,\mathrm{d}\hat{W}_{S_a}^1(t) > \ln\frac{S}{S_a} + \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_{S_a}^2(t) + \sigma_s^2(t) - 2\rho(t)\sigma_{S_a}(t)\sigma_S(t))\,\mathrm{d}t\}$$

$$\Leftrightarrow \{\frac{-[\int_0^T \sigma_{S_a}(t)\rho(t) - \sigma_S(t)\mathrm{d}W_S^1(t) + \int_0^T \sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\mathrm{d}W_S^1(t)]}{\sqrt{\int_0^T (\sigma_{S_a}^2(t) + \sigma_S^2(t) - 2\rho(t)\sigma_S(t)\sigma_{S_a}(t))\mathrm{d}t}} \leqslant \mathrm{d}_n - \sqrt{\sum}\}$$

令 $Z_1^1 = \int_0^T (\sigma_{S_a}(t)\rho(t) - \sigma_S(t))\,\mathrm{d}W_S^1(t)$,

$Z_2^1 = \int_0^T \sigma_{S_a}(t)\sqrt{1-\rho^2(t)}\,\mathrm{d}W_{S_a}^1(t)$

则 $Z_1^1 \sim N(0, \int_0^T (\sigma_{S_a}(t)\rho(t) - \sigma_S(t))^2\mathrm{d}t)$,

$Z_2^1 \sim N(0, \int_0^T \sigma_{S_a}^2(t)(1-\rho^2(t))\,\mathrm{d}t)$

由于 Z_1^1, Z_2^1 相互独立. 所以 $Z_1^1 + Z_2^1 \sim N(0, \int_0^T (\sigma_{S_a}^2(t) + \sigma_s^2(t) - 2\rho(t)\sigma_{S_a}(t)\sigma_S(t))\,\mathrm{d}t)$

$$\hat{E}[\mathrm{e}^{\Delta} I_{\{A_1\}}] = P_1(A_1) = P_1\left(\frac{-(Z_1^1 + Z_2^1)}{\sqrt{\int_0^T (\sigma_{S_a}^2(t) + \sigma_S^2(t) - 2\rho(t)\sigma_S(t)\sigma_{S_a}(t))\mathrm{d}t}} \leqslant d_n - \sqrt{\Sigma}\right) = N(d_n - \sqrt{\sum})$$

同理可以证明 $\hat{E}[\mathrm{e}^{\Theta} I_{\{A_1\}}] = P_2(A_1) = P_2(S_a\mathrm{e}^{\Theta} > S\mathrm{e}^{\Delta}) = N(d_n)$,证毕.

参考文献:

[1] Hull J C. 期权,期货和其他衍生产品[M]. 北京:华夏出版社,2003.

[2] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

[3] 雍炯敏,刘道白. 数学金融学[M]. 上海:上海人民出版社,2003.

[4] Bladt M, Rydberg T H. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1998, 22(1): 65-73.

[5] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political Economy, 1973(81): 637-659.

[6] Knut K A. Contingent claims valuation when the security price is combination of an Ito process and a random point process[J]. Stochastic process and their applications, 1988, 28(2): 185-220.

[7] 张敏,李昶,何穗. 股票价格遵循几何分形 Brown 运动的外汇期权定价[J]. 湖北工业大学学报, 2006, 21(6): 75-77.

[8] 张敏,王莺,何穗. 股票价格遵循非时齐 Poisson 跳的亚式期权的保险精算定价[J]. 湖北工业大学学报, 2007, 22(1): 97-100.

[9] 韩响楠,何春雄. 带跳市场中亚式期权的价格下界[J]. 系统工程学报, 2010, 25(3): 354-358.

[10] Bayraktar E, Xing H. Pricing Asian option for jump diffusion[J]. Mathematical Finance, 2011, 21(1): 117-143.

[11] 刘宣会,徐成贤. 基于跳跃扩散过程的一类亚式期权定价[J]. 系统工程学报, 2008, 23(2): 142-14712.