文章编号:1673 - 0062(2013)01 - 0060 - 04

一类具有边界值的分数阶微分方程正解的存在性

王 琳[1],钟记超[2]

(1. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001;2. 湖南工业大学 科技学院,湖南 株洲 412008)

摘 要:我们研究一类具有边界值的非线性微分方程正解的存在性,利用格林函数的性质和不动点定理获得具有边界值问题正解的存在的充分条件.

关键词:分数阶微分方程;边界值;正解;不动点定理;格林函数

中图分类号:O175.6 **文献标识码**:A

TheExistence for the Positive Solutions for a Class of Nonlinear Fractional Order Boundary Problem

WANG Lin[1],ZHONG Ji-chao[2]

(1. School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China;
2. College of Science and Technology,Hu Nan University of Technology,Zhuzhou,Hunan 412008,China)

Abstract:A class of boundary value problem for nonlinear fraction differential equation is considered in this paper. Using the property of Green function and some fixed point theorems,we obtained some existence conditions for the positive solutions for the boundary value problem.

key words:riemann-Liouville fractional derivative;boundary value problem;Positive solution;fixed point theorem;Green function

考虑如下分数阶边值问题:

$$D^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0,\quad 0<t<1,\quad 5<\alpha<6,\qquad (1)$$

$$u(0)=u^{(4)}(1)=u^{(k)}(0)=0,\quad K=1,2,3,4,\qquad (2)$$

其中,D^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 微分算子,$f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续函数.

最近,许多作者研究了分数阶微分方程,它应用于许多领域,像物理,机械,工程等方面.很多作者获得了分数阶微分方程正解存在的充分条件[1-5],特别地,一些作者获得了具有边界值的分数阶微分方程正解的存在性[6-9].

例如,Z. Bai 和 H. Lu[7] 讨论了如下边界条件的分数阶微分方程:

$$D^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0,\quad 0<t<1,$$

$$u(0)=u(1)=0,\qquad (3)$$

其中,$1<\alpha\leqslant 2$,D^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶微分.并获得上述方程正解存在性的充分

收稿日期:2013 - 01 - 08

作者简介:王 琳(1978 -),女,湖南邵阳人,南华大学数理学院硕士研究生.主要研究方向:微分方程及其应用.

条件.

文献[8]中,Kosmatove 研究了如下具有边值的方程:

$$D^{\alpha}u(t) = f(t,u(t),u'(t)),\quad 0<t<1,$$
$$u(0)=u(1)=0, \tag{4}$$

其中 $0<t<1, 1<\alpha\leqslant 2$, D^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶微分.

Aufmann 和 Mboumi[9] 探讨了如下具有边界值的方程:

$$D^{\alpha}u(t)+a(t)f(u(t))=0,\quad 0<\mathrm{t}<1,$$
$$u(0)=u'(1)=0, \tag{5}$$

其中, $1<\alpha\leqslant 2$, D^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 分数阶微分.

本文,我们考虑边界值方程(1) – 方程(2),首先引入相应的格林函数,接着推导出其等价的积分方程,然后,利用不动点定理,得到方程(1) – 方程(2)解的存在性.

1　定　义

定义 1[10]　函数 u 的 α 阶分数积分定义为:如果 $\alpha>0, u:(0,\infty)\to R$,

$$I^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中,Γ 为嘎玛函数.

定义 2[10]　函数 u 的 α 阶分数微分定义为:如果 $\alpha>0, u:(0,\infty)\to R$,

$$D^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$, Γ 为嘎玛函数.

定义 3　在巴拿赫空间 E 中,我们称 P 是 E 中的锥,如果映射 θ 满足不等式:

$$\theta(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda\theta(x)+(1-\lambda)\theta(y),$$

其中 $x,y\in P$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

引理 4[10]　设函数 $u\in C(0,1)\cap L\cap(0,1)$ 是 α 阶分数微分函数,则 $u\in C(0,1)\cap L\cap(0,1)$ 时,有

$$I^{\alpha}D^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N},$$

$c_i\in R, i=1,2,\cdots,N$.

其中, N 是不大于 α 的正整数.

引理 5　如果函数 $u\in C(0,1)\cap L\cap(0,1)$ 是方程函数(1) – (2) 的解,则函数 $u\in[0,1]$ 是下列分数积分方程

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\,\mathrm{d}s \tag{6}$$

的解,其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}-(t-s)^{\alpha-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.\end{cases} \tag{7}$$

证明:因为 f 是连续的,$5<\alpha<6$. 设函数 $u\in C(0,1)\cap L\cap(0,1)$ 是方程函数(1) – (2)的解,通过引理 4,我们有

$$u(t)=-I^{\alpha}f(u(t))+c_1t^{\alpha-1}+\cdots+c_6t^{\alpha-6}=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha}f(t,u(s))\,\mathrm{d}s+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_6t^{\alpha-6}.$$

由 $u(0)=u^{(k)}(0)=0, K=1,2,3,4$,有 $c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=0$,且

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-5}f(t,u(s))\,\mathrm{d}s,$$

因此,

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(t,u(s))\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\times\int_0^1 (1-s)^{\alpha-5}t^{\alpha-1}f(t,u(s))\mathrm{d}s=\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s.$$

引理 6　上述函数 $G(t,s)$ 满足下列条件:

(1)对所有的 $t,s\in[0,1]$,

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)\leqslant G(1,s); \tag{8}$$

(2) $$\min_{\frac{1}{\alpha}\leqslant t\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}}G(t,s)\geqslant\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}G(s,s),$$

$$5<\alpha\leqslant 6. \tag{9}$$

证明:(1)很显然 $G(t,s)\geqslant 0, t,s\in[0,1]$,

$0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$,设

$$g_1(t,s)=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}-(t-s)^{\alpha-1},$$

$0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$,

$$g_2(t,s)=t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5},\qquad 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1.$$

对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$,

$$\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}=(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-s)^{\alpha-5}-(\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}=(\alpha-1)t^{\alpha-2}\left[(1-s)^{\alpha-5}-\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-2}\right]\geqslant(\alpha-1)t^{\alpha-2}\left[(1-s)^{\alpha-5}-\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-5}\right]\geqslant 0.$$

因此,对 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$, $g_1(t,s)$ 关于 t 是单调增加的. 显然,对 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$, $g_2(t,s)$ 关于 t 也是单调增加的. 所以,$G(t,s)$ 对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 是单调增加的, $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)\leqslant G(1,s)$.

(2)当 $5<\alpha\leqslant 6$, $\frac{1}{\alpha}\leqslant s\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}$ 时,我们有

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}+\left(\frac{1}{\alpha}-s\right)^{\alpha-1}=$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}[s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}+(1-\alpha s)^{\alpha-1}]\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}[s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}+(1-s)^{\alpha-1}]=$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}[s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}+(1-s)^{\alpha-5}(1-s)^{4}]=$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}[s^{\alpha-1}+(1-s)^{4}]\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}[s^{4}+(1-s)^{4}]\leqslant$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}[s+(1-s)]^{4}=$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}.$$

这样

$$g_1\left(\frac{1}{\alpha},s\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}-\left(\frac{1}{\alpha}-s\right)^{\alpha-1}\geqslant$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}g_1(s,s).$$

也就是

$$\min_{\frac{1}{\alpha}\leqslant t\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}}g_1(t,s)\geqslant g_1\left(\frac{1}{\alpha},s\right)\geqslant\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}g_1(s,s).$$

另一方面,

$$\min_{\frac{1}{\alpha}\leqslant t\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}}g_2(t,s)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}\geqslant$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-5}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}g_2(s,s).$$

所以,

$$\min_{\frac{1}{\alpha}\leqslant t\leqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}}G(t,s)\geqslant\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}G(s,s),\quad 5<\alpha\leqslant 6,$$

引理 7[11] 设集合 C 是巴纳赫空间 X 中的一个凸的紧集,假设 U 是中一个相对开集,且 $0\in U$,且 $T:\bar{U}\to C$ 那么下列两个性质成立.

(i)算子 T 在 $\bar{U}$ 中有一个不动点;

(ii)存在 $u\in\partial U$ 且 $\lambda\in(0,1)$ 有 $u=\lambda Tu$.

引理 8[12] 设 B 是一个巴纳赫空间,在 B 中 $K\subset B$ 是一个锥,假设 Ω_1,Ω_2 是开集,且 $0\in\Omega_1$, $\Omega_1\subset\Omega_2$,设 $T:K\cap(\Omega_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是完全连续的算子,存在下列条件:

(i) $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$,且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$,或

(ii) $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$,且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$.

那么 T 在 $K\cap(\Omega_2\backslash\Omega_1)$ 有一个不动点.

为了方便,现假设以下条件:

(H_1) $f(t,u)$ 在$[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的;

(H_2) 存在两个正函数 $a(t),b(t)\in C([0,1],R^+)$ 使得

$$|f(t,u)|\leqslant a(t)+b(t)|u|^p,\tag{10}$$

其中, $0<p\leqslant 1$,函数 $b(t)$ 满足

$$\int_0^1 G(1,s)b(s)\mathrm{d}s<1.\tag{11}$$

$$(H_3)\ f_0=\lim_{\|u\|\to 0}\frac{f(t,u)}{\|u\|}=\infty,t\in(0,1).\tag{12}$$

2 主要结果

设 $\Omega=C([0,1],R)$,赋予范数 $\|u(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$.

引理 9 假设(H_1)和(H_2),(H_3)中的一个成立,设 $T:\Omega\to\Omega$,

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s.\tag{13}$$

那么, $T:\Omega\to\Omega$ 是完全连续的.

证明:假设(H_1)和(H_2)成立,我们知道 $G(t,s)\in C([0,1]\times[0,1],R^+)$,且 $f(t,s)\in C([0,1]\times R^+,R^+)$,显然, $Tu(t)$ 对 $u\in\Omega$ 是连续的,且 $Tu(t)\geqslant 0$,设 $D\subset\Omega$ 是有界的. 存在一个正常数 R 使得 $\|u\|\leqslant R$,对所有的 $u\in D$ 有

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1 G(1,s)a(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 G(1,s)b(s)\mathrm{d}s\|u(t)\|\leqslant\bar{R},$$

因此, $T(D)$ 是一致有界的.

接下来证明算子 T 在 $\|u\|\leqslant R$ 是等度连续的. 实际上,对所有的 $\varepsilon>0$,当 $t_1,t_2\in[0,1]$,使得 $t_1<t_2$ 且 $t_2-t_1<\eta$ 时,对所有的 $u\in D$,我们得到当 $t_2-t_1\to 0$ 时

$$|Tu(t_2)-Tu(t_1)|=\int_0^1 G(t_2,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s-$$
$$\int_0^1 G(t_1,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s|\leqslant\int_0^1|G(t_2,s)-G(t_1,s)|\times$$
$$(a(s)+b(s)u(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^{t_1}(1-s)^{\alpha-5}(t_2^{\alpha-1}-$$
$$t_1^{\alpha-1})\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(1-s)^{\alpha-5}t_2^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s+$$
$$\left(\int_{t_1}^{t_2}(1-s)^{\alpha-1}t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\mathrm{d}s\right)(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}a(t)+$$
$$R\max_{0\leqslant t\leqslant 1}b(t))\leqslant\int_0^{t_1}\frac{(1-(1-t_1)^{\alpha-4})}{\alpha-4}(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})+$$
$$\frac{((1-t_1)^{\alpha-4}-(1-t_2)^{\alpha-4})}{\alpha-4}t_2^{\alpha-1}-\frac{(t_2-t_1)^{\alpha}}{\alpha}+$$

$\frac{1}{\alpha}(t_2{}^{\alpha-1}-t_1{}^{\alpha-1})\mathrm{d}s(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}a(t)+R\max_{0\leqslant t\leqslant 1}b(t))\to R.$

所以 $\lim_{t_2\to t_1}\|Tu(t_2)-Tu(t_1)\|=0$，由 Arzela-Ascoli 定理,$T:\Omega\to\Omega$ 是完全连续的.

定理 10　假设(H_1)和(H_2)成立,那么方程(1)至少有一个正解.

证明:(1)如果 $p=1$,通过引理 9,算子 $T:\Omega\to\Omega$ 是完全连续的. 设

$$r_1=\frac{\int_0^1 G(1,s)a(s)\mathrm{d}s}{1-\int_0^1 G(1,s)b(s)\mathrm{d}s},\tag{14}$$

$$\Omega_1=\{u\in\Omega:\|u\|<r_1\}.\tag{15}$$

我们证明对于 $0<\lambda<1$,不存在 $u\in\partial\Omega_1$ 使得 $u(t)=\lambda Tu(t)$. 相反, 我们从(H_1),(H_2)和(14)得到

$$\|u\|=|\lambda Tu(t)|=\lambda\max_{0<t<1}\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s<\max_{0<t<1}\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 G(1,s)|a(s)|\mathrm{d}s+r_1\int_0^1 G(1,s)|b(s)|\mathrm{d}s<\|u\|.$$

也就是 $\|u\|<\|u\|$.　(16)

矛盾,由引理7,算子 T 在 Ω_1 有一个不动点 $u(t)$.

(2)如果 $0<p<1$,设

$$r_1=\max_{0<t<1}\left\{2\int_0^1 G(1,s)a(s)(s)\mathrm{d}s,(2\int_0^1 G(1,s)b(s)(s)\mathrm{d}s)^{\frac{1-p}{p}}\right\}\tag{17}$$

利用(1)类似的方法,可以证得 T 在 Ω_1 有一个不动点 $u(t)$,证毕.

定理 11　假设(H_1)-(H_3)成立,那么方程(1)至少有一个正解.

证明:设 $K=\{u\geqslant 0\mid u\in\Omega\}$,那么算子 T 在 K 是完全连续的. 设上述式(14)或式(17)中的 r_1 成立,$K_1=\{u\in K(u)<r_1\}$,利用与(16)中相似的方法,对于任意的 $u\in K\cap\partial K_1$ 有

$$\|Tu(t)\|<\|u\|.\tag{18}$$

另一方面,从(H_3),M 足够大,存在 $r_2<r_1$,使得

$$M\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1-1}{\alpha}}G(s,s)\mathrm{d}s\geqslant 1,\tag{19}$$

因为 $\|u\|\leqslant r_2$,设 $K_2=\{u\in K(u)\leqslant r_2\}$,则 $u\in K_2\cap\partial K$,我们得到

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\geqslant\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}G(t,s)f(t,u(s))\mathrm{d}s\geqslant M\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}G(s,s)\mathrm{d}s\|u\|\geqslant\|u\|,$$

也就是 $\|Tu(t)\|\geqslant\|u\|$.　(20)

从引理 8 和式(18)与式(20),算子 T 在 $u\in K\cap(\overline{K_1}/K_2)$ 有一个不动点,这个不动点是积分方程(6)的解,证毕.

参考文献:

[1] Belarbi A, Benchohra M, Ouahab A. Uniquenessresults for fractional functionas differential equations with infinite delay in Frechet spaces[J]. Appl. Anal., 2006, 85(12): 1459-1470.

[2] Jafari H, Daftardar-Gejji V. Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition[J]. J. Comput Appl. Math., 2006, 196(2): 644-651.

[3] Kibas A A, Marzan S A. Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions[J]. Differential Equations, 2005, 41(1): 84-89.

[4] Miller K S, Ros B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1993.

[5] Nishimoto K. Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order[M]. New Haven: University of New Haven Press, 1989.

[6] Aleroev T S. On a boundary value problem for a fractional-order differential operator[J]. Differential Uravneniya, 1998, 34(1): 1-26.

[7] Bai Z, Lu H. Positive solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 311: 495-505.

[8] Kosmatov N. A singular boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order[J]. J Appl. Math. Comput., 2009, 29(1/2): 125-135. Kaufmann E R, Mboumi E. Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation[J]. Electron. J. Qual. Theorey Diff. Equ., 2008(3): 1-11.

[9] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999.

[10] Li C F, Luo X N, Zhou Y. Existence of positive solutions of the boundary valuo problem for nonlinear fractional differential equations[J]. C. And M. With Appl., 2010, 59: 1363-1375.

[11] Krasnosel'skii M A. Positive solution of operator epuations[J]. Gronigen: P. Noordhoff Ltd, 1964.