第 26 卷第 4 期
2012 年 12 月

南华大学学报(自然科学版)
Journal of University of South China(Science and Technology)

Vol. 26 No. 4
Dec. 2012

文章编号:1673-0062(2012)04-0056-06

一类广义二阶常微分方程三点积分边值问题正解的存在性

汪　惠,刘宏亮,欧阳自根*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:该文运用了格林公式的性质和锥上不动点定理,建立了一个广义二阶常微分方程三点积分边值问题在超线性和次线性条件下至少有一个正解的存在性定理.同时给出了在这一边值条件下至少有两个正解存在的充分条件.

关键词:积分边值问题;不动点理论;正解的存在性

中图分类号:O175.8　　　**文献标识码**:A

Positive Solutions to a Generalized Second-order Three-point Integral Boundary Value Problem

WANG Hui, LIU Hong-liang, OUYANG Zi-gen*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this work, we focus on the existence of solutions for a class of nonlinear second-order three-point integral boundary value problem. Using the properties of the Green's function and Krasnosel'skii fixed point theorem, we obtain that the boundary value problem has at least one positive solutions in the superlinear or sublinear case. Also, some sufficient conditions has been obtained that the problem has at least two positive solutions.

key words: integral boundary value problem; fixed point; existence of positive solution

0　引　言

从 Il'in 和 Moiseev[1-2] 对线性二阶常微分方程多点边值问题解的存在性的研究开始,很多作者通过使用 Leggett-Williams 不动点定理[3], Leray-Schau 不动点定理[4] 以及 Krasnosel'skii 不动点定理[5-6] 对非线性二阶常微分方程三点边值问题[7-8] 以及多点边值问题进行了研究,并得到了一些结果[9-13].

在文献[14]中,作者证明了下面三点边值问题在超线性或次线性条件下至少有一个正解的存在性.

$$u''(t) + a(t)f(u(t)) = 0, t \in (0,1),$$
$$u(0) = 0, u(1) = \alpha u(\eta),$$

其中 $0 < \eta < 1$,且 $0 < \alpha < \dfrac{1}{\eta}$.

收稿日期:2012-08-07
作者简介:汪　惠(1989-),女,江西樟树人,南华大学数理学院硕士研究生.主要研究方向:微分方程与动力系统.
*通讯作者.

在文献[15]中,作者证明了下面三点积分边值问题至少有一个正解的存在性.

$$u''(t)+a(t)f(u(t))=0,t\in(0,1),$$

$$u(0)=0,u(1)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $0<\eta<1$,且 $0<\alpha<\dfrac{2}{\eta^2}$.

本文将研究下面的非线性二阶常微分方程三点积分边值问题至少有一个或多个正解的存在性.

$$u''(t)+a(t)f(u(t))=0,t\in(0,1),\quad(1)$$

$$u'(0)=0,u(1)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s,\qquad(2)$$

其中 $0<\eta<1,0<\alpha\eta<1,f(u(t))\in C([0,1],[0,\infty),[0,\infty)),a\in C([0,1],[0,\infty))$ 且存在一个 $t_0\in(0,1)$ 使得 $a(t_0)>0$ 成立.

令

$$f_0=\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u},f_\infty=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}.$$

本文的目的是建立一些简单的标准来判断边值问题(1)-(2)正解的存在性.在文章的第二部分得出了格林函数并将边值问题(1)−(2)简化为一个等价的积分方程;在第三部分通过应用 Krasnosel'skii 不动点定理,得到了边值问题(1)−(2)正解存在性的多种结果.

1　预备知识

引理 1　若 $\alpha\eta\neq1$,且 $y(t)\in C[0,1]$ 时,问题

$$u''(t)+y(t)=0,t\in(0,1),\qquad(3)$$

$$u'(0)=0,u(1)=\alpha\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s,\qquad(4)$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1-s}{1-\alpha\eta}-\dfrac{\frac{1}{2}\alpha(\eta-s)^2}{1-\alpha\eta}-(t-s),0\leqslant s\leqslant\min\{t,\eta\}<1,\\ \dfrac{1-s}{1-\alpha\eta}-(t-s),0<\eta\leqslant s\leqslant t\leqslant1,\\ \dfrac{1-s}{1-\alpha\eta}-\dfrac{\frac{1}{2}\alpha(\eta-s)^2}{1-\alpha\eta},0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta<1,\\ \dfrac{1-s}{1-\alpha\eta},\max\{t,\eta\}\leqslant s\leqslant1.\end{cases}\qquad(5)$$

证明　由式(3)得 $u''(t)=-y(t)$.对其左右两边从 0 到 t 求积分再结合式(4)可得

$$u'(t)=-\int_0^ty(s)\mathrm{d}s,\qquad(6)$$

再对式(6)两边从 0 到 t 求积分可得

$$u(t)=u(0)-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s.\qquad(7)$$

对式(7)两边从 0 到 η 求积分,可得

$$\int_0^\eta u(s)\mathrm{d}s=\int_0^\eta u(0)\mathrm{d}s-\int_0^\eta\int_0^u(u-s)f(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}u=$$

$$u(0)\eta-\frac{1}{2}\int_0^\eta(\eta-s)^2f(s)\mathrm{d}s.\qquad(8)$$

由式(4),式(7)与式(8)得

$$u(0)=\frac{-\frac{1}{2}\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)^2y(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\alpha\eta}\times$$

$$\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s.\qquad(9)$$

因此,边值问题(3)—(4)的唯一解为

$$u(t)=\frac{-\frac{1}{2}\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)^2y(s)\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^1G(t,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

证毕.

引理 2　由式(5)定义的格林函数 $G(t,s)$ 有下列性质:

(Ⅰ)对任意的 $s,t\in(0,1)$ 都有 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续且有 $0\leqslant G(t,s)\leqslant h(s)$ 成立,其中

$$h(s)=\frac{1-s}{1-\alpha\eta}.$$

(Ⅱ)对任意的 $s,t\in(0,1)$ 都有 $G(t,s)\geqslant\lambda h(s)$ 成立,其中

$$\lambda=\frac{1}{2}\alpha\eta.$$

证明　由 $G(t,s)$ 的表达式,我们很容易证明 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续,且对于任意的 $s,t\in(0,1)$ 有 $G(t,s)\leqslant h(s)$.因此,我们只需证明当 $0\leqslant s\leqslant\min\{t,\eta\}<1$ 时有

$$G_1(t,s)=\frac{1-s}{1-\alpha\eta}-\frac{\frac{1}{2}\alpha(\eta-s)^2}{1-\alpha\eta}-(t-s)\geqslant0$$

成立,则(Ⅰ)成立.

事实上

$$G_1(t,s)=\frac{1}{1-\alpha\eta}[(1-s)-\frac{1}{2}\alpha(\eta-s)(\eta-s)-(1-\alpha\eta)(t-s)]$$

$$\geqslant \frac{1}{1-\alpha\eta}[(1-s)-\frac{1}{2}\alpha(\eta-s)(1-s)-(1-\alpha\eta)(1-s)]$$

$$=\frac{1-s}{1-\alpha\eta}[1-\frac{1}{2}\alpha(\eta-s)-(1-\alpha\eta)]$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\alpha(1-s)}{1-\alpha\eta}(\eta+s)\geqslant 0. \quad (10)$$

所以(Ⅰ)成立.

对于(Ⅱ),同样由 $G(t,s)$ 可知,只需要证明 $G_1(t,s)\geqslant\lambda h(s)$ 成立即可.

而由 $0\leqslant s\leqslant\min\{t,\eta\}<1$ 和式(10)可以得到

$$\frac{G_1(t,s)}{h(s)}\geqslant\frac{1}{2}\alpha(\eta+s)\geqslant\frac{1}{2}\alpha\eta=\lambda.$$

所以 $G_1(t,s)\geqslant\lambda h(s)$, 即(Ⅱ)成立. 证毕.

引理 3 (文献[6]):设 E 为 Banach 空间,$K\subset E$ 是 E 中的一个锥. Ω_1,Ω_2 是 E 上的有界开子集,$0\in\Omega_1$ 且 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$ 若全连续算子 $T:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 满足

(A) $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$;或者

(B) $\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 上有一个不动点.

令 $E=C[0,1]$, 定义范数为 $\|u(t)\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$,显然 E 是一个 Banach 空间. 记 $K=\{u\in E:u(t)\geqslant 0,\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}u(t)\geqslant\lambda\|u(t)\|\}$,其中 λ 为引理 2 中的(Ⅱ)所定义. 作算子

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s. \quad (11)$$

显然 K 是 E 上的一个锥. 由引理1和引理2可得 $T(K)\subset K$ 及 $T:K\to K$ 是完全连续算子. 那么边值问题(1)-(2)有一个解 $u=u(t)$ 当且仅当 u 是算子 T 的一个不动点.

下文中,定义

$$\Gamma_1=\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s,$$

$$\Gamma_2=\frac{\lambda^2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s. \quad (12)$$

2 主要结论

2.1 在 $f_0,f_\infty\in\{0,\infty\}$ 的情形下,边值问题(1)-(2)正解的存在性.

定理 4 若下面的条件成立,那么问题(1)-(2)至少存在一个正解:

(H1): $f_0=0,f_\infty=\infty$(超线性);或

(H2): $f_0=\infty,f_\infty=\infty$(次线性).

证明 首先假设(H1)成立. 由 $f_0=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}=0$,那么对任意 $\varepsilon\in(0,\Gamma_1^{-1}]$,存在 δ_* 使得对任意 $u\in[0,\delta_*]$, 有

$$f(u)\leqslant\varepsilon u. \quad (13)$$

其中 Γ_1 为式(12)所定义.

令 $\Omega_{\delta_*}=\{u\in E:\|u\|<\delta_*\}$. 由式(11),式(13)以及引理1, 对于任意的 $u\in K\cap\partial\Omega_{\delta_*}$, 有

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_0^1 h(s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\varepsilon\delta_*\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s$$

$$=\varepsilon\delta_*\Gamma_1\leqslant\delta_*=\|u\|,$$

于是对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{\delta_*}$, 有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|. \quad (14)$$

另一方面,由 $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=\infty$,那么对任意 $M^*\in[\Gamma_2^{-1},\infty)$,存在一个 $\delta^*>\delta_*$ 使得对任意的 $u\geqslant\lambda\delta^*$, 有

$$f(u)\geqslant M^*u. \quad (15)$$

其中 Γ_2 为式(12)所定义.

设 $\Omega_{\delta^*}=\{u\in E:\|u\|<\delta^*\}$. 当 $u\in K\cap\partial\Omega_{\delta^*}$ 时,有

$$\min_{t\in[0,1]}u(t)\geqslant\lambda\|u(t)\|=\lambda\delta^*.$$

于是对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{\delta^*}$, 由式(11),式(15)以及引理1可得

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

$$\geqslant\int_0^1\lambda h(s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

$$=\frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s$$

$$\geqslant\delta^*M^*\frac{\lambda^2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s$$

$$=\delta^*M^*\Gamma_2\geqslant\delta^*=\|u\|,$$

因此,对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{\delta^*}$, 有

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|. \quad (16)$$

所以结合式(14),式(16)以及引理3,可以证得 T

在 $K\cap(\overline{\Omega}_{\delta^*}\backslash\Omega_{\delta_*})$ 上有一个不动点 u,使得

$$\delta_*\leqslant\|u\|\leqslant\delta^*.$$

其次假设(H2)成立,由 $f_0=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$,对任意 $M_*\in[\Gamma_2^{-1},\infty)$,存在 $r_*>0$ 使得对任意 $u\in[0,r_*]$,有

$$f(u)\geqslant M_*u.\tag{17}$$

设 $\Omega_{r_*}=\{u\in E:\|u\|<r_*\}$. 对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_*}$,有

$$\min_{t\in[0,1]}u(t)\geqslant\lambda\|u(t)\|=\lambda r_*.$$

于是对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_*}$,由式(11),式(17)可得

$$\begin{aligned}Tu(t)&=\int_0^1G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\geqslant r_*M_*\frac{\lambda^2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\\&=r_*M_*\Gamma_2\geqslant r_*=\|u\|,\end{aligned}$$

因此,对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{r_*}$,有

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|.\tag{18}$$

另一方面由于 $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=0$,于是对任意 $\varepsilon_1\in(0,\Gamma_1^{-1}]$,存在 $r^*>r_*$ 使得对每一个 $u\in[r^*,\infty)$,有

$$f(u)\leqslant\varepsilon_1u.\tag{19}$$

令 $\Omega_{r^*}=\{u\in E:\|u\|<r^*\}$. 于是对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{r^*}$,我们有

$$\begin{aligned}Tu(t)&=\int_0^1G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant\varepsilon_1r^*\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\\&=\varepsilon_1r^*\Gamma_1\leqslant r^*=\|u\|,\end{aligned}$$

因此,对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{r^*}$,有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|.\tag{20}$$

所以结合式(18),式(20)以及引理3,可以证得 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_{r^*}\backslash\Omega_{r_*})$ 上有一个不动点 u,使得

$$r_*\leqslant\|u\|\leqslant r^*.$$ 证毕.

用类似于定理4的证明方法,我们可以得到下面两个定理.

定理5　若下面的两个条件成立,那么问题(1)-(2)至少有两个正解 u_1,u_2 存在且满足 $0<\|u_1\|<\delta_1<\|u_2\|$.

(H3):$f_0=f_\infty=\infty$,

(H4):存在一个常数 $\delta_1>0$,使得对任意的 $u\in[0,\delta_1]$,有 $f(u)\leqslant\Gamma_1^{-1}\delta_1$.

定理6　若下面两个条件成立,那么问题(1)-(2)至少有两个正解 u_1,u_2 存在且满足 $0<\|u_1\|<\delta_2<\|u_2\|$.

(H5):$f_0=f_\infty=0$,

(H6):存在一个常数 $\delta_2>0$,使得对任意的 $u\in[\lambda\delta_2,\delta_2]$,有 $f(u)\geqslant\Gamma_2^{-1}\delta_2$.

2.2　在 $f_0,f_\infty\notin\{0,\infty\}$ 的情形下边值问题(1)-(2)正解的存在性.

定理7　假设存在两个正常数 $d_1<d_2$,若下面的条件成立,那么问题(1)-(2)至少有一个正解 u 存在且满足 $d_1<\|u\|<d_2$.

(H7):$f(u)\leqslant\Gamma_1^{-1}d_1,u\in[0,d_1]$,

(H8):$f(u)\geqslant\Gamma_2^{-1}d_2,u\in[\lambda d_2,d_2]$.

证明　首先设 $\Omega_{d_1}=\{u\in E:\|u\|<d_1\}$. 于是对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{d_1}$,由(H7)有

$$\begin{aligned}Tu(t)&=\int_0^1G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant\Gamma_1^{-1}d_1\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\\&=d_1=\|u\|,\end{aligned}$$

因此,对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{d_1}$,有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|.\tag{21}$$

其次设 $\Omega_{d_2}=\{u\in E:\|u\|<d_2\}$. 则当 $u\in K$ 及 $\|u\|=d_2$ 时有

$$\min_{t\in[0,1]}u(t)\geqslant\lambda\|u(t)\|=\lambda d_2.$$

于是由(H8)有

$$\begin{aligned}Tu(t)&=\int_0^1G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\\&\geqslant\Gamma_2^{-1}d_2\frac{\lambda^2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\mathrm{d}s\\&=d_2=\|u\|,\end{aligned}$$

因此,对任意 $u\in K\cap\partial\Omega_{d_2}$,有

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|.\tag{22}$$

所以结合式(21),式(22)以及引理3,可以证得 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_{d_2}\backslash\Omega_{d_1})$ 上有一个不动点 u 使得

$$d_1<\|u\|<d_2.$$ 证毕.

定理8　若(H7)和下面的条件成立,那么问题(1)-(2)至少有两个正解 u_1,u_2 存在且满足 $0\leqslant\|u_1\|<d_1<\|u_2\|$.

(H9):当 $\mu_1,\upsilon_1\in((\lambda\Gamma_2)^{-1},+\infty)$ 时有 $f_0=\mu_1,f_\infty=\upsilon_1$.

证明　由(H9)知 $f_0=\mu_1,\mu_1\in$

$((\lambda\Gamma_2)^{-1}, +\infty)$. 于是对任给 $\varepsilon = \mu_1 - (\lambda\Gamma_2)^{-1} \geq 0$,存在一个充分小的 $d_2^* \in [0,d_1]$,对任给 $u \in [0, d_2^*]$ 使得 $\frac{f(u)}{u} \geq \mu_1 - \varepsilon = (\lambda\Gamma_2)^{-1}$ 都成立. 因此,当 $u \in [\lambda d_2^*, d_2^*]$ 时,有 $f(u) \geq (\lambda\Gamma_2)^{-1}u \geq \Gamma_2^{-1}d_2^*$.

设 $\Omega_{d_2^*} = \{u \in E: \|u\| < d_2^*\}$. 对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_{d_2^*}$, 有

$$\min_{t\in[0,1]} u(t) \geq \lambda \|u(t)\| = \lambda d_2^*.$$

于是有

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\ &\geq \frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\ &\geq \Gamma_2^{-1}d_2^* \frac{\lambda^2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\mathrm{d}s \\ &= d_2^* = \|u\|, \end{aligned}$$

因此,对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_{d_2^*}$, 有

$$\|Tu\| \geq \|u\|. \tag{23}$$

另一方面,由 $f_\infty = \upsilon_1, \upsilon_1 \in [(\lambda\Gamma_2)^{-1}, \infty)$,于是对任给 $\varepsilon_1 = \upsilon_1 - (\lambda\Gamma_2)^{-1} \geq 0$,存在一个充分大的 $d_2(d_2 > d_1)$,对任意 $u > \lambda d_2$,使得 $\frac{f(u)}{u} \geq \upsilon_1 - \varepsilon_1 = (\lambda\Gamma_2)^{-1}$ 成立. 因此,对任意的 $u \in [\lambda d_2, d_2]$,有 $f(u) \geq (\lambda\Gamma_2)^{-1}u \geq \Gamma_2^{-1}d_2$.

设 $\Omega_{d_2} = \{u \in E: \|u\| < d_2\}$. 对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_{d_2}$, 有

$$\min_{t\in[0,1]} u(t) \geq \lambda \|u(t)\| = \lambda d_2.$$

于是有

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\ &\geq \frac{\lambda}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\ &\geq \Gamma_2^{-1}d_2 \frac{\lambda^2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\mathrm{d}s \\ &= d_2 = \|u\|, \end{aligned}$$

因此,对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_{d_2}$, 有

$$\|Tu\| \geq \|u\|. \tag{24}$$

最后,令 $\Omega_{d_1} = \{u \in E: \|u\| < d_1\}$. 对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_{d_1}$, 由(H7)可以得到

$$\begin{aligned} Tu(t) &= \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \\ &\leq \Gamma_1^{-1}d_1 \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)a(s)\mathrm{d}s \\ &= d_1 = \|u\|, \end{aligned}$$

因此,对任意 $u \in K \cap \partial\Omega_{d_1}$, 有

$$\|Tu\| \leq \|u\|. \tag{25}$$

所以结合式(23), 式(24)以及式(25)可以证得 T 在 $K \cap (\overline{\Omega}_{d_1} \backslash \Omega_{d_2^*})$ 上有一个不动点 u_1,在 $K \cap (\overline{\Omega}_{d_2} \backslash \Omega_{d_1})$ 上有另一不动点 u_2,即边值问题(1) - (2) 有两个正解 u_1, u_2 且它们满足不等式 $0 \leq d_2^* \leq \|u_1\| < d_1 < \|u_2\| < d_2$. 证毕.

应用定理 8 的方法我们可以证明下面定理 9 成立.

定理 9 若(H8)和下面的条件成立,那么问题(1) - (2)至少有两个正解 u_1, u_2 存在且满足 $0 \leq \|u_1\| < d_2 < \|u_2\|$.

(H10):当 $\mu_2, \upsilon_2 \in [0, \Gamma_1^{-1})$ 时有 $f_0 = \mu_2$, $f_\infty = \upsilon_2$.

参考文献:

[1] Ilin V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm - Liouville operator in its differential and finite difference aspects[J]. Differential Equations, 1987, 23: 803-810.

[2] Ilin V A, Moiseev E I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects[J]. Differential Equations, 1987, 23(8): 979-987.

[3] Avery R I, Peterson A C. Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces[J]. Comput. and Math. with Appl., 2001, 42: 313-322.

[4] Zhilin Yang. Existence and uniqueness of positive solutions for an integral boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 3910-3918.

[5] Sun Yongping. Positive solutions of nonlinear second-order multi-point boundary value problem[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 61: 1283-1294.

[6] Zhang Xiaoping, Sun Yongping. Monotone positive solutions of second-order multi-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 207: 493-500.

[7] Gupta C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equation[J]. Math. Anal. Appl., 1992, 168: 540-551.

[8] Gupta C P. A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem[J]. Math. Anal. Appl., 1997, 205: 586-579.

[9] Ruyun Ma. Positive solutions of nonlinear second-order m-point boundary value problem[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 1998(34): 1-8.

[10] Tariboon J, Sitthiwirattham T. Positive solution of a nonlinear three-point integral boundary value problem[J].

(下转第 64 页)

（上接第 60 页）

Boundary Value Problems, 2010(2010), ID 519210, 11pages, doi:10.1155.2010.519210.

[11] Zhang Guowei, Sun Jingxian. Positive solutions of m-point boundary value problems[J]. Math. Anal. Appl., 2004, 291:406-418.

[12] Henderson J, Ntouyas S K, Purnaras I K. Positive solutions for systems of generalized three-point nonlinear boundary value problems[J]. Comment. Math. Univ. Carolin., 2008, 49(1):79-91.

[13] Saowaluk Chasreechai, essada Tariboon. Positive solutions to generalized second-order three-point integral boundary value problems[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2011, 14:1-14.

[14] Liang Shuqing, Mu Lin. Multiplicity of positive solutions for singular three-point boundary value problems at resonance[J]. Nonlinear Analysis. Theory, Methods Applications, 2009, 71:2497-2505.

[15] Boucherif A, Al-Malki N. Nonlinear three-point third-order boundary value problems[J]. Appl. Math. and Comput., 2007, 190:1168-1177.