文章编号:1673 - 0062(2012)01 - 0041 - 03

三角代数的 Jordan 同构

谢乐平[1],王彩红[2]

(1. 怀化学院 数学系,湖南 怀化 418008;2. 新化县第二中学,湖南 娄底 417605)

摘　要:利用对幂等元的作用确定了非交换环上三角代数的 Jordan 同构的结构;由此结构判断该 Jordan 同构或者是同构,或者是反同构.

关键词:三角代数;Jordan 同构;同构;反同构

中图分类号:O151.21　　**文献标识码**:A

Jordan Isomorphism on Triangular Algebras

XIE Le-ping[1], **WANG Cai-hong**[2]

(1. Dept of math, Huaihua College, Huaihua, Hunan 418008, China; 2. Xinhua No. 2 High School, Loudi, Hunan 417605, China)

Abstract: Using the role of idempotent element we obtain the structure of Jordan isomorphism of triangular algebras, by which we judge the Jordan isomorphism is an isomorphism or an anti isomorphism.

key words: triangular algebra; jordan isomorphism; isomorphism; anti isomorphism

设 A,B 是特征不为 2 的有单位元的环,M 是 (A,B) - 双模. 三角代数为 $\Delta = \left\{\begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} \middle| a \in A, b \in B, m \in M\right\}$. 上三角矩阵代数,分块上三角矩阵代数以及套代数都是三角代数,很多人得到了它们的大量研究结果可部分参见文献[1-3]. 设 Π 是代数,双射 $\varphi:\Pi \to \Pi$ 称为 Π 上的 Jordan 同构,如果 $\forall X,Y \in \Pi$ 有 $\varphi(XY+YX) = \varphi(X)\varphi(Y) + \varphi(Y)\varphi(X)$. 文献[4]研究了半单 Banach 代数上的 Jordan 同构. 文献[5]得到了实空间或者有限维复空间上套代数的 Jordan 同构的结构形式. 文献[6]得到了交换环上上三角矩阵环的 Jordan 同构或者是同构,或者是反同构. 文献[7]也得到了交换环上的三角矩阵代数的 Jordan 同构或者是同构,或者是反同构. 本文将文献[7]的研究推广到非交换环上,利用对幂等元的作用确定了三角代数的 Jordan 同构的结构,发现在非交换环上也有类似的结果,即根据所得结构可判断该 Jordan 同构或者是同构,或者是反同构,并给出了同构或者反同构的具体条件.

本文记 $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$, $I = e + f$,

收稿日期:2011 - 11 - 01

基金项目:湖南省教育厅基金资助项目(05C694);怀化学院青年基金资助项目(HHUQ2009—04)

作者简介:谢乐平(1976 -),男,湖南宁乡人,怀化学院数学系讲师,硕士. 主要研究方向:代数.

并引入形式记法 $\begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = (a,m,b)$ 及线性映射 $\varphi_1 = e\varphi e$，$\varphi_2 = f\varphi f$，$\varphi_3 = e\varphi f$，则三角代数 Δ 上的 Jordan 同构 φ 可表示为 $\varphi\begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(a,m,b) & \varphi_3(a,m,b) \\ & \varphi_2(a,m,b) \end{pmatrix}$. 如线性映射 $k:M \to M$ 满足 $k(am' + mb' + a'm + m'b) = \varphi'(a)k(m') + k(m)\varphi''(b') + \varphi'(a')k(m) + k(m')\varphi''(b)$，其中 $a,a' \in A,b,b' \in B,m,m' \in M$，$\varphi',\varphi''$ 分别为 A,B 的 Jordan 同构，则称 k 为 Jordan 双模同构. 对应的称 $k':M \to M$ 为 Jordan 双模反同构，如果 $k'(am' + mb' + a'm + m'b) = k'(m')\varphi''(a) + \varphi'(b')k'(m) + k'(m)\varphi''(a') + \varphi'(b)k'(m')$. 假设 A,B 只有平凡幂等元，则由幂等元定义可得引理 1.

引理 1 三角代数 Δ 只有幂等元 $0,I$，$\begin{pmatrix} 1_A & m \\ & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 & m \\ & 1_B \end{pmatrix}$，其中 $m \in M$.

引理 2 设 φ 为 Δ 上的 Jordan 同构，则对幂等元 I,e,f，只有下列两种情况：

Case 1 $\varphi(I) = I,\varphi(e) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ & 0 \end{pmatrix}$，

$\varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ & 1 \end{pmatrix}$；

Case 2 $\varphi(I) = I,\varphi(e) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ & 1 \end{pmatrix}$，

$\varphi(f) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ & 0 \end{pmatrix}$.

证明：一方面 $\varphi(II + II) = 2\varphi(I)$，另一方面 Jordan 同构 $\varphi(II + II) = 2\varphi^2(I)$，所以 $\varphi(I) = \varphi^2(I)$ 为幂等元. 如果 $\varphi(I) = \begin{pmatrix} 1_A & m \\ & 0 \end{pmatrix}$，则 $\varphi(e),\varphi(f)$ 为 I，$\begin{pmatrix} 0 & m \\ & 1_B \end{pmatrix}$，一方面 $\varphi(ef + fe) = \varphi(0) = 0$，另一方面 $\varphi(ef + fe) = \varphi(e)\varphi(f) + \varphi(f)\varphi(e) \neq 0$，矛盾. 类似地 $\varphi(I) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ & 1_B \end{pmatrix}$ 也导致矛盾，由引理 1 得 $\varphi(I) = I$. 故只有上述两种情况.

定理 3 三角代数 Δ 上的 Jordan 同构 φ 结构如下：

(ⅰ) Case 1 成立，则 $\varphi(e) = \begin{pmatrix} 1 & m_0 \\ & 0 \end{pmatrix}$，$\varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & -m_0 \\ & 1 \end{pmatrix}$，其中 $m_0 \in M$；$\forall \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} \in \Delta$，

$\varphi\begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_1(a)m_0 + k(m) - m_0\varphi_2(b) \\ & \varphi_2(b) \end{pmatrix}$ 其中 φ_1,φ_2 分别为 A,B 上的 Jordan 同构，k 为 Jordan 双模同构；

(ⅱ) Case 2 成立，则 $\varphi(e) = \begin{pmatrix} 0 & m_0' \\ & 1 \end{pmatrix}$，$\varphi(f) = \begin{pmatrix} 1 & -m_0' \\ & 0 \end{pmatrix}$，其中 $m_0' \in M$；$\forall \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} \in \Delta$，$\varphi\begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1'(b) & m_0'\varphi_2'(a) + k'(m) - \varphi_1(b)m_0' \\ & \varphi_2'(a) \end{pmatrix}$ 其中 φ_1',φ_2' 分别为 $A \to B,B \to A$ 的 Jordan 同构，k' 为 Jordan 双模反同构.

证明：下面只证明 Case 1 成立的(ⅰ)，(ⅱ)类似可得.

对任意 $X = (a,m,b) \in \Pi$，取 $X' = (a',m',b') \in \Pi$，Jordan 同构 φ 有

$$\varphi(XX') = \varphi(X)\varphi(X') + \varphi(X')\varphi(X) \quad (1)$$

等式(1)中令 $X' = e$ 可得 $\varphi_2(2a,m,0) = 0$，即 $\varphi_2(a,m,b)$ 与 a,m 无关，以后简记 $\varphi_2(a,m,b) = \varphi_2(b)$.

等式(1)中令 $X' = f$ 类似可得 $\varphi_1(a,m,b)$ 与 m,b 无关，以后简记 $\varphi_1(a,m,b) = \varphi_1(a)$.

等式(1)中令 $X' = e$ 还可得存在 $m_0 \in M$ 使得

$$\varphi_3(2a,m,0) = \varphi_1(a)m_0 + \varphi_3(a,m,b) + m_0\varphi_2(b) \quad (2)$$

等式(1)中令 $X' = f$ 类似可得存在 $\overline{m_0} \in M$ 使得

$$\varphi_3(0,m,2b) = \varphi_1(a)\overline{m_0} + \varphi_3(a,m,b) + \overline{m_0}\varphi_2(b) \quad (3)$$

又 $\varphi_3 = e\varphi f$，所以存在线性映射 $k_1:A \to M$，$k:M \to M,k_2:B \to M$ 使得

$$\varphi_3(a,m,b) = k_1(a) + k(m) + k_2(b) \quad (4)$$

结合式(2)，式(4)计算得 $k_1(2a) = \varphi_1(a)m_0 + k_1(a)$，即 $k_1(a) = \varphi_1(a)m_0$.

结合式(3)，式(4)计算得 $k_2(2b) = k_2(b) + \overline{m_0}\varphi_2(b)$，即 $k_2(b) = \overline{m_0}\varphi_2(b)$.

式(2)+式(3)并利用上述结果得 $\varphi_1(a)(m_0 + \overline{m_0}) = (m_0 + \overline{m_0})\varphi_2(b)$，由 a,b 的任意性有

$\overline{m_0} = -m_0$.

所以有 $\varphi_3(a,m,b) = \varphi_1(a)m_0 + k(m) - m_0\varphi_2(b)$. 因此得

$$\varphi\begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_1(a)m_0 + k(m) - m_0\varphi_2(b) \\ & \varphi_2(b) \end{pmatrix} \tag{5}$$

将结果式(5)代入式(1)可得

$\varphi_1(aa' + a'a) = \varphi_1(a)\varphi_1(a') + \varphi_1(a')\varphi_1(a)$.

$\varphi_2(bb' + b'b) = \varphi_2(b)\varphi_2(b') + \varphi_2(b')\varphi_2(b)$.

$k(am' + mb' + a'm + m'b) = \varphi_1(a)k(m') + k(m)\varphi_2(b') + \varphi_1(a')k(m) + k(m')\varphi_2(b)$.

即 φ_1,φ_2 分别是 A,B 上的 Jordan 同构, k 为 Jordan 双模同构. 定理 3 证毕.

当定理 3 中(ⅰ)成立时, 直接验证可得 $\varphi(XX') = \varphi(X)\varphi(X')$, 当(ⅱ)成立时可得 $\varphi(XX') = \varphi(X')\varphi(X)$. 所以有下面的定理 4.

定理 4　Δ 上 Jordan 同构 φ 在 Case 1 时为同构, 否则(即 Case 2)为反同构.

上三角矩阵代数和套代数都是三角代数, 并且上述推导对交换环也是成立的, 故由定理 3、定理 4 有下面的推论.

推论 5[4]　设 T 为只有平凡幂等元的 Banach 代数 B 上的套代数, 则 T 的 Jordan 同构 φ 或者是一个同构, 或者是一个反同构.

推论 6[7]　假设有单位元的交换环 R 只有平凡幂等元, ∇为 R 上的三角矩阵代数, 则∇上的 Jordan 同构 φ 保持∇上幂等的对角元时, 是一个同构; 否则 φ 是一个反同构.

参考文献:

[1] Haghany A, VaraJan K. Study of formal triangular matrix rings[J]. Comm Algebra, 1999, 27(11): 5507-5525.

[2] Yu Weiyan, Zhang Jianhua. Nonlinear Lie derivations of triangular algebras[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432: 2953-2960.

[3] Dong Han, Feng Wei. Jordan(α, β)-derivations on triangular algebras and related mappings[J]. Linear Algebra Appl, 2011, 434: 259-284.

[4] Sinclair A M. Jordan homomorphisms and derivations on semisimple Banach algebra[J]. Proc Amer Math Soc, 1970, 24: 209-214.

[5] Lu Fangyan. Additive Jordan isomorphisms of nest algebras on normed spaces[J]. J. Math Anal Appl, 2003, 284: 127-143.

[6] Liu Cheng-kai, Wan eu esai. Jordan isomorphisms of upper triangular matrix rings[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 426: 143-148.

[7] Beidar K I, Breŝar M, Chebotarc M A. Jordan isomorphisms of triangular matrix algebras over a connected commutative ring[J]. Linear Algebra Appl, 2000, 312: 197-201.