文章编号:1673 - 0062(2012)01 - 0038 - 03

带干扰保费混合收取的单险种风险模型

刘冬元,廖基定,蔡秋娥

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:将双 Poisson 风险模型推广为带干扰保费混合收取的单险种风险模型,并利用鞅的方法讨论了这种风险模型的破产问题.

关键词:保费混合收取;随机干扰;鞅;破产概率

中图分类号:O211 **文献标识码**:A

A One-type Insurancerisk Model of Premium Compound Income with Interference

LIU Dong-yuan,LIAO Ji-ding,CAI Qiu-e

(School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China)

Abstract:In this thesis,we present the risk double-poisson models,and get a one-type insurance risk model of premium compound income with interference. Then we will use martingale approach to discuss the ruin problem of this risk model.

key words:premium income compound;stochastic diffusion;martingale;ruin probability

0 引 言

经典风险模型中,单位时间所收到的保单数相同,然而在实际收取保费的过程中,不同单位时间所收到的保单数往往不一样,是一个随机变量,文献[1-4]将经典的复合 Poisson 风险模型推广为带干扰的广义双 Poisson 风险模型,文献[5]考虑了带干扰的变破产下限多险种风险模型. 考虑到保险公司保费收取的实际情况,本文研究索赔的发生过程为齐次 Poisson 过程,而保费收取由两部分组成:即单位时间内为常速率的连续部分和随机收取的离散部分组成的风险模型.

1 模型的建立

定义 1 给定概率空间(Ω,F,P),定义模型

$$R(t) = u + ct + \sum_{j=1}^{M(t)} Y_j - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma W(at),$$

$$S(t) = ct + \sum_{j=1}^{M(t)} Y_j - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma W(at),$$

(u,c,a,λ,μ,σ 为正常数 $t \geqslant 0$);

收稿日期:2011 - 11 - 29

基金项目:湖南省科技厅基金资助项目(2010ZK3052);南华大学博士基金资助项目(2010XQD33);人文社科基金资助项目(2011XWT10)

作者简介:刘冬元(1975 -),女,湖南祁东人,南华大学数理学院讲师,硕士. 主要研究方向:风险理论与保险精算.

其中:u 是初始资金;c 是单位时间所收取的保费;$R(t)$、$S(t)$ 分别为 t 时刻的盈余与盈利;$\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是标准的维纳过程,表示保险公司不确定的收益和付款;$\{M(t),t\geqslant 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程($M(0)=0$),每次收的保费是独立同分布的非负随机变量序列记为 $\{Y_j,j=1,2\cdots\}$,分布函数为 $F_1(y)$,$EY_j=\alpha$,且二阶矩存在;理赔过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 $\mu(\mu>0)$ 的 Poisson 过程($N(0)=0$),理赔额是独立同分布的非负随机变量序列记为 $\{X_i,i=1,2\cdots\}$ 分布函数为 $F_2(x)$,$EX_i=\beta$,且二阶矩存在;设 $\{Y_j,j=1,2\cdots\}$,$\{X_i,i=1,2\cdots\}$,$\{M(t),t\geqslant 0\}$,$\{N(t),t\geqslant 0\}$,$\{W(t),t\geqslant 0\}$ 是相互独立的.

为了保证保险公司的稳定经营,假定 $ES(t)>0$,即 $c+\alpha\lambda-\beta\mu>0$,由此定义安全负荷 $\theta=\dfrac{c+\alpha\lambda}{\beta\mu}-1>0$,记 T 为保险公司首次破产的时刻,即令 $T=\inf\{t:R(t)<0\}$,如 $\forall t\geqslant 0,R(t)\geqslant 0$,则令 $T=\infty$.

最终破产概率为:

$$\psi(u)=P\{T<\infty|\ R(0)=u\}$$

2 引　理

引理 2　盈利过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是一个右连续随机过程,且具备以下性质:

(1) $ES(t)=(c+\alpha\lambda-\beta\mu)t>0$;

(2) 是平稳独立增量过程.

证明　(1) $ES(t)=E[ct+\sum\limits_{j=1}^{M(t)}Y_j-\sum\limits_{i=1}^{N(t)}X_i+\sigma W(at)]=ct+E[\sum\limits_{j=1}^{M(t)}Y_j]-E[\sum\limits_{i=1}^{N(t)}X_i]+E[\sigma W(at)]=(c+\alpha\lambda-\beta\mu)t>0.$

(2) 根据 $\{Y_j\}$,$\{X_i\}$,$\{M(t)\}$,$\{N(t)\}$ 的连续性,易知过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是右连续的随机过程.

对 $\forall 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$,有

$S(t_{i+1})-S(t_i)=ct_{i+1}+\sum\limits_{j=1}^{M(t_{i+1})}Y_j-\sum\limits_{i=1}^{N(t_{i+1})}X_i+\sigma W(at_{i+1})-ct_i-\sum\limits_{j=1}^{M(t_i)}Y_j+\sum\limits_{i=1}^{N(t_i)}X_i-\sigma W(at_i)=c(t_{i+1}-t_i)+[\sum\limits_{j=1}^{M(t_{i+1})}Y_j-\sum\limits_{j=1}^{M(t_i)}Y_j]-[\sum\limits_{i=1}^{N(t_{i+1})}X_i-\sum\limits_{i=1}^{N(t_i)}X_i]+\sigma[W(at_{i+1})-W(at_i)]=c(t_{i+1}-t_i)+[\sum\limits_{j=M(t_i)}^{M(t_{i+1})}Y_j]-[\sum\limits_{i=N(t_i)}^{N(t_{i+1})}X_i]+\sigma[W(at_{i+1})-W(at_i)]$

因为 $\{Y_j\}$,$\{X_i\}$,$\{M(t)\}$,$\{N(t)\}$,$W(at)$ 是相互独立的,故:

$t_2-t_1,t_3-t_2,\cdots,t_{i+1}-t_i,\cdots,\sum\limits_{j=M(t_i)}^{M(t_{i+1})}Y_j,\sum\limits_{i=N(t_i)}^{N(t_{i+1})}X_i,W(at_2)-W(at_1),W(at_3)-W(at_2),\cdots,W(at_{i+1})-W(at_i),\cdots$ 相互独立的,因此 $\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是独立增量.

又 $S(t+s)-S(t)=c(t+s)+\sum\limits_{j=1}^{M(t+s)}Y_j-\sum\limits_{i=1}^{N(t+s)}X_i+\sigma W[a(t+s)]-ct-\sum\limits_{j=1}^{M(t)}Y_j+\sum\limits_{i=1}^{N(t)}X_i-\sigma W(at)=cs+\sum\limits_{j=M(t)}^{M(t+s)}Y_j-\sum\limits_{i=N(t)}^{N(t+s)}X_i+\sigma\{W[a(t+s)]-W(at)\}$

对一切 $t\geqslant 0$ $\sum\limits_{j=M(t)}^{M(t+s)}Y_j$,$\sum\limits_{i=N(t)}^{N(t+s)}X_i$,$W[a(t+s)]-W(at)$ 分别具有相同的分布,$\{S(t):t\geqslant 0\}$ 是平稳增量.

综上所述,过程是右连续的,且具有平稳独立增量.

引理 3　对于盈利过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$,存在函数 $g(r)$,使得 $E[e^{-rS(t)}]=e^{tg(r)}$.

证明　$E[e^{-rS(t)}]=E[\exp(-rct-r\sum\limits_{j=1}^{M(t)}Y_j+r\sum\limits_{i=1}^{N(t)}X_i-r\sigma W(at))]=E[\exp(-rct)]\cdot E[\exp(-r\sum\limits_{j=1}^{M(t)}Y_j)]\cdot E[\exp(r\sum\limits_{i=1}^{N(t)}X_i)]\cdot E[\exp(-r\sigma W(at))]=\exp(-crt)\times\sum\limits_{m=0}^{+\infty}E[\exp(-r\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j)]\cdot P\{M(t)=m\}\times\sum\limits_{n=0}^{+\infty}E[\exp(r\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)]\cdot P\{N(t)=n\}\times E[\exp(-r\sigma W(at))]=\exp\{-crt+\lambda t[M_{Y_1}(-r)-1]+\mu t[M_{X_1}(r)-1]+\frac{1}{2}at\sigma^2r^2\}$

从而 $g(r)=-cr+\lambda[M_{Y_1}(-r)-1]+\mu[M_{X_1}(r)-1]+\frac{1}{2}a\sigma^2r^2$

其中:$M_{Y_1}(-r)=E(e^{-rY_1})$,$M_{X_1}(r)=E(e^{rX_1})$,得证.

引理 4　方程 $g(r)=0$ 存在唯一正解 R,称 R 为调节系数.

证明　$g(r)=-cr+\lambda M_{Y_1}(-r)-1]+\mu[M_{X_1}(r)-1]+\frac{1}{2}a\sigma^2r^2$

$$g'(r)=-c-\lambda E[Y_1e^{-rY_1}]+\mu E[X_1e^{rX_1}]+a\sigma^2 r$$

$$g''(r)=\lambda E[Y_1{}^2e^{-rY_1}]+\mu E[X_1{}^2e^{rX_1}]+a\sigma^2>0$$

故 $g(r)$ 是严格凸函数,又由 $c+\alpha\lambda-\beta\mu>0$ 得

$$g'(0)=-c-\lambda EY_1+\mu EX_1=-c-\alpha\lambda+\beta\mu<0$$

又因为 $g(0)=0$,由凸函数的性质知方程 $g(r)=0$ 存在唯一正解 R.

定义 5 对于盈利过程 $\{S(t):t\geqslant 0\}$,定义事件流 $k^S\equiv\{k_t^S:t\geqslant 0\}$,其中 $k_t^S=\sigma\{S(v):v\leqslant t\}$

引理 6 $\{M_u(t),k_t^S(t):t\geqslant 0\}$ 是鞅,其中 $M_u(t)=\dfrac{\exp\{-r[u+S(t)]\}}{\exp[tg(r)]}$.

证明 对任意 $v\leqslant t$,运用引理 4 得:

$$E[M_u(t)\mid k_v^S]=E\left[\frac{\exp\{-r[u+S(t)]\}}{\exp[tg(r)]}\mid k_v^S\right]$$

$$=E\left[\frac{\exp\{-r[u+S(v)]\}}{\exp[vg(r)]}\cdot\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp[(t-v)g(r)]}\mid k_v^S\right]$$

$$=M_u(v)\cdot E\left[\frac{\exp[-r(S(t)-S(v))]}{\exp[(t-v)g(r)]}\mid k_v^S\right]$$

$=M_u(v)$,证毕.

引理 7 T_u 是 k^S 停时[6].

3 主要结果

定理 8 对于上述风险模型 $\{R(t):t\geqslant 0\}$,最终破产概率满足不等式:

$$\Psi(u)\leqslant e^{-Ru}$$

其中:$R=\sup\limits_{r>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$.

证明 因为 T_u 是 k^S 停时,选取 $t_0<\infty$,则 $t_0\wedge T_u$ 也是 k^S 停时. 根据引理 6 以及停时定理,有

$$e^{-ru}=M_u(0)=E[M_u(t_0\wedge T_u)]$$

$$=E[M_u((t_0\wedge T_u)\mid T_u\leqslant t_0)]P\{T_u\leqslant t_0\}+E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}$$

$$\geqslant E[M_u(t_0\wedge T_u)\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}$$

$$=E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}$$

由于在 $\{T_u<\infty\}$ 的条件下,$u+S(T_u)<0$,所以

$$P\{T_u\leqslant t_0\}\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[M_u(T_u)\mid T_u\leqslant t_0]}$$

$$\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[\exp[-T_ug(r)]\mid T_u\leqslant t_0]}$$

$$\leqslant e^{-ru}\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}e^{tg(r)}\qquad(1)$$

在上式两端令 $t_0\to+\infty$,得 $\Psi(u)\leqslant e^{-ru}\sup\limits_{t\geqslant 0}e^{tg(r)}$,取 $R=\sup\limits_{t>0}\{r:g(r)\leqslant 0\}$,即证结论.

根据引理 4,易知 R 即为调节系数.

定理 9 在上述风险模型 $\{R(t):t\geqslant 0\}$ 下,设 R 为调节系数,则最终破产概率为:

$$\Psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[\exp[-R\cdot R(r)]\mid T_u<\infty]}\qquad(2)$$

证明 根据式(1),取 $r=R$,得

$$e^{-ru}=E[e^{-R\cdot R(T_u)}\mid T_u\leqslant t_0]P\{T_u\leqslant t_0\}+E[e^{-R\cdot R(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}\qquad(3)$$

以 $I(A)$ 表示集合 A 的示性函数,则

$$0\leqslant E[e^{-R\cdot R(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}=E[e^{-R\cdot R(T_0)}I\{T_u>t_0\}]\leqslant E[e^{-R\cdot R(T_0)}I\{R(t_0)>0\}]$$

由于 $0\leqslant e^{-R\cdot R(T_0)}I\{R(t_0)\geqslant 0\}\leqslant 1$,且根据强大数定理可证 $R(t_0)\to+\infty,P-a\cdot s$. 因此由控制收敛定理,有

$$\lim_{t_0\to+\infty}E[e^{-R\cdot R(T_0)}\mid T_u>t_0]P\{T_u>t_0\}=0,P-a\cdot s.$$

于是在(3)式两端令 $t_0\to+\infty$,即证得结论.

参考文献:

[1] Grandell J. Aspect of Risk Theory[M]. New York:Springer-verlag,1991.

[2] 方世祖,罗建华. 双复合 Poisson 风险模型[J]. 纯粹数学与应用数学,2006,22(2):271-277.

[3] 陈贵磊,张相虎,闫春. 带干扰的广义双 Poisson 风险模型的破产概率[J]. 山东科技大学学报,2005,24(3):101-103.

[4] 刘冬元. 一类带干扰的风险模型的破产概率[J]. 怀化学院学报,2006,25(8):43-45.

[5] 赵彦晖,岳毅蒙,李粉娟. 带干扰的变破产下限多险种风险模型[J]. 重庆理工大学学报,2010,24(3):105-109.

[6] 张波. 应用随机过程[M]. 北京:中国人民大学出版社,2002.