文章编号:1673-0062(2011)03-072-02

一类Riccati方程的精确解

朱 晖[1],吴庆华[2],周伟平[1]

(1.南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001;2.孝感学院 数学与统计学院,湖北 孝感 432000)

摘 要:本文主要讨论在一类Riccati方程的特解基础上得出一类二阶变系数常微分方程的通解公式.

关键词:Riccati方程;二阶变系数常微分方程;通解;特解

中图分类号:O175.1 **文献标识码**:A

Exact Solution for Some Riccati Equation

ZHU Hu[1],WU Qing-hua[2],ZHOU Wei-ping[1]

(1. School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China;
2. Department of Mathematics and Statistics,Xiaogan University,Xiaogan,Hubei 432000,China)

Abstract:In this paper,the author derives a particular solution for some Riccati equation, and then on the base of that,he shows a general solution formula for some second order differential equations with variable coefficient.

key words:Riccati equation;second order differential equation with variable coefficient;general solutions;exact solutions

0 引 言

一般的Riccati方程

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{1}$$

其中 $p(x), q(x), r(x) \in C(I)$,不能用初等函数表示其通解.但是由解的存在唯一性定理,可以确定过每一点 (x_0, y_0) 方程(1)都有唯一的解.所以一直以来,具有某些特征的Riccati方程的特解和通解的表达式都受到许多研究者的关注[1-4].文献[5]讨论了如下的变系数齐次常微分方程:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{2}$$

的通解公式.在第一节,讨论形如:

$$y' = y^2 - \frac{2}{r}a(x)y + \frac{1}{r}a'(x) + \frac{1}{r^2}a^2(x) + c \tag{3}$$

其中 r 和 c 是常数的Riccati方程的特解.在第二节,讨论二阶变系数非齐次常微分方程:

$$y'' + \frac{2}{r}a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{4}$$

其中 $b(x) = \frac{1}{r}a'(x) + \frac{1}{r^2}a^2(x) + c$ 的通解公式.

收稿日期:2011-02-24

作者简介:朱 晖(1981-),女,湖南邵阳人,南华大学数理学院讲师,硕士.主要研究方向:微分方程.

1　Riccati 方程的特解

对于方程

$$y' = y^2 - \frac{2}{r}a(x)y + \frac{1}{r}a'(x) + \frac{1}{r^2}a^2(x) + c, \tag{5}$$

可以变形为 $[y - \frac{1}{r}a(x)]' = [y - \frac{1}{r}a(x)]^2 + c$,令 $t = y - \frac{1}{r}a(x)$,可得方程

$$t' = t^2 + c. \tag{6}$$

方程(6)是变量可分离的方程,通过求解方程(6)可知:

定理 1　i)当 $c = 0$ 时,方程(6)有特解 $t = -\frac{1}{x}$,即方程(5)有解 $y = \frac{1}{r}a(x) - \frac{1}{x}$;

ii)当 $c > 0$ 时,方程(5)有解 $y = \frac{1}{r}a(x) + \sqrt{c}\tan\sqrt{c}x$;

iii)当 $c < 0$ 时,方程(5)有解 $y = \frac{1}{r}a(x) + \frac{\sqrt{-c}(1 + e^{2\sqrt{-c}x})}{1 - e^{2\sqrt{-c}x}}$.

2　二阶变系数方程的通解

定理 2　如果 Riccati 方程 $u' = u^2 - \frac{2}{r} \times a(x)u + b(x)$ 有特解 $u = u_1(x)$,那么方程

$$y'' + \frac{2}{r}a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{7}$$

有通解

$$y = e^{-\int u_1(x)\mathrm{d}x}\left[\int e^{\int(2u_1(x) - \frac{2}{r}a(x))\mathrm{d}x}(f(x)e^{\int(\frac{2}{r}a(x) - u_1(x))\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c_1)\mathrm{d}x + c_2\right] \tag{8}$$

其中 $b(x) = \frac{1}{r}a'(x) + \frac{1}{r^2}a^2(x) + c$.

证明:由上述 Riccati 方程可知, $b(x) = u' - u^2 + \frac{2}{r}a(x)u$,代入方程(7)得

$$y'' + \frac{2}{r}a(x)y' + [u' - u^2 + \frac{2}{r}a(x)u]y = f(x).$$

此式又可变形为 $y'' + u'y + uy' - uy' + \frac{2}{r}a(x)y' - u^2y + \frac{2}{r}a(x)uy = f(x)$,即

$$(y' + uy)' + (\frac{2}{r}a(x) - u)(y' + uy) = f(x) \tag{9}$$

令

$$s = y' + uy, \tag{10}$$

则式(9)变为

$$s' + (\frac{2}{r}a(x) - u(x))s = f(x) \tag{11}$$

先求解(11),得

$$s = e^{\int u(x) - \frac{2}{r}a(x)\mathrm{d}x}[\int f(x)e^{\int\frac{2}{r}a(x) - u(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c_1]. \tag{12}$$

再代入式(10),求得

$$y = e^{\int -u\mathrm{d}x}[\int s(x)e^{\int u\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c_2] \tag{13}$$

综合式(12),式(13)即可证式(9)成立.

参考文献:

[1] 王李. 变系数二阶线性微分方程的公式解法[J]. 海南大学学报,2009,27(4):325-328.

[2] 李春燕. 一类二阶常微分方程两点边值问题变号解的存在性[J]. 应用数学,2007,20(增):123-126.

[3] 陈华喜. 高阶常系数线性非齐次微分方程特解几种非常规解法[J]. 宜春学院学报,2010,32(12):13-14.

[4] 郭翠萍. Burgers-Fisher 方程的新精确解[J]. 西北大学学报,2010,40(5):753-763.

[5] 孟红丽,李文清. 一类二阶变系数齐次线性微分方程的通解[J]. 西南民族大学学报(自然科学版),2009,35(4):726-729.