文章编号:1673 - 0062(2011)03 - 068 - 04

双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型

王春梅,廖基定*

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:对单险种的双复合 Poisson-Geometric 风险模型进行了推广,建立了双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型,即保单到达与理赔到达均为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型,并对带干扰和不带干扰的情形进行了研究,得出当不带干扰时其调节系数是不存在的,而带干扰时,其调节系数是存在的.

关键词:双险种;复合 Poisson-Geometric 过程;破产概率;带干扰

中图分类号:O211　　　**文献标识码**:A

Research on the Double-compound Poisson-Geometric Risk Model with Double-type-insurance

WANG Chun-mei,**LIAO Ji-ding***

(School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,China)

Abstract:A type-insurance risk model with double compound Poisson-Geometric process is generalized. A double compound Poisson-Geometric risk model of double-type-insurance is constructed,and two risk models with band interference or not are studied. It is proved that the adjustment coefficient does not exist in the risk model without band interference. But, considering random factors,its adjustment coefficient exists.

key words:double-type-insurance;compound Poisson-Geometric process;ruin probability;band interference

0　引　言

随着保险公司业务种类的日益增多和复杂化,对多险种的风险模型就显得越来越有必要. 目前已经有许多学者对单险种的双复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型的破产概率进行了研究,并得到了很好的结论,本文将在已有研究基础上进一步研究,将单险种的双复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型推广到双险种的情形,并对保险经营中的随机因素分为考虑和不考虑两种情况进

收稿日期:2011 - 03 - 17

基金项目:湖南省科学技术厅基金资助项目(2010ZK3052)

作者简介:王春梅(1984 -),女,内蒙古巴彦淖尔人, 南华大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向:风险理论与保险精算. *通讯作者

行了研究,得出了该模型在不带干扰时,其调节系数是不存在的,反之带干扰时,其调节系数是存在的.

为研究问题方便起见,先列出本文中几个常用的概念.

定义 1[1]　设 $\lambda>0, 0\leqslant\rho\leqslant 1$,称母函数 $G(t)=\exp\left[\frac{\lambda(t-1)}{1-\rho t}\right]$所对应的分布为复合 Poisson-Geometric 分布,记为 $PG(\lambda,\rho)$.

定义 2[1]　设 $\lambda>0, 0\leqslant\rho\leqslant 1$,称$\{N(t);t\geqslant 0\}$为参数为 λ,ρ 的复 Poisson-Geometric 过程. 如果满足:(1)$N(0)=0$;(2)$\{N(t);t\geqslant 0\}$具有独立平稳增量;(3)对 $t\geqslant 0$ 有 $N(t)\sim PG(\lambda t,\rho)$而且 $E[N(t)]=\frac{\lambda t}{1-\rho}, Var[N(t)]=\frac{\lambda t(1+\rho)}{(1-\rho)^2}$.

定义 3[1]　设 $Y(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$ 其中$\{N(t);t\geqslant 0\}$为复合 Poisson-Geometric 过程;$X_i(\geqslant 0)$之间独立同分布,且与$\{N(t;t\geqslant 0\})$独立. 称$\{Y(t);t\geqslant 0\}$为双复合 Poisson-Geometric 过程.

可以得到 $N(t), Y(t)$的矩母函数分别为

$$M_{N(t)}(r)=\exp\left[\frac{\lambda t(e^r-1)}{1-\rho e^r}\right],$$

$$M_{Y(t)}(r)=\exp\left[\frac{\lambda t(M_X(r)-1)}{1-\rho M_X(r)}\right].$$

1　模　型

讨论以下两个模型:

$$U(t)=u+\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)}=u+S(t)\qquad(1)$$

$$U^*(t)=u+\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)}+\sigma W(t)=u+S^*(t)\qquad(2)$$

其中 u 为初始资本,$M_1(t), M_2(t)$分别为 $X_i^{(1)}$, $X_i^{(2)}$ 到时刻 t 为止的保单个数. $X_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,M_1(t))$, $X_i^{(2)}(i=1,2,\cdots,M_2(t))$分别为第 i 张保单的保费,$N_1(t), N_2(t)$为到时刻 t 为止的两险种的理赔次数,$Y_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,N_1(t))$, $Y_i^{(2)}(i=1,2,\cdots,N_2(t))$为第 i 次的理赔额,$W(t)$为干扰项,σ 为扰动系数,$U(t)$表示到时刻 t 为止的盈余.

假设:$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$ 均为独立同分布,且为非负的随机变量序列,$X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$, $M_1(t), M_2(t), N_1(t), N_2(t), W(t)$相互独立,且 $M_1(t)\sim PG(\lambda_1 t,\rho_1)$, $M_2(t)\sim PG(\lambda_3 t,\rho_3)$, $N_1(t)\sim PG(\lambda_2 t,\rho_2)$, $N_2(t)\sim PG(\lambda_4 t,\rho_4)$, $W(t)$为一维标准维纳过程,称模型(1)为双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型,即两个险种的保单到达与理赔到达均为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型;模型(2)为带干扰的双险种双复合 Poisson-Geometric 风险模型. 定义 $T=\inf\{t: t\geqslant 0$ 且 $U(t)<0\}$为破产时刻,$\psi(u)=P(T<\infty)$为破产概率.

为了保险公司的稳定经营,要求期望保费收入大于期望理赔,即 $E[S(t)]>0$,而

$$\begin{aligned}E[S(t)]&=E\left[\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(2)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)}\right]\\&=E[M_1(t)]E[X^{(1)}]+E[M_2(t)]E[X^{(2)}]-E[N_1(t)]E[Y^{(1)}]-E[N_2(t)]E[Y^{(2)}]\\&=\frac{\lambda_1 t}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3 t}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2 t}{1-\rho_2}\times E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4 t}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}E[S^*(t)]&=E\left[\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)}+\sigma W(t)\right]\\&=\frac{\lambda_1 t}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3 t}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2 t}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4 t}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]\end{aligned}\qquad(3)$$

其中 $X^{(1)}, X^{(2)}, Y^{(1)}, Y^{(2)}$ 分别表示与 $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$, $Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)}$ 同分布的随机变量.

假设

$$\frac{\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]-\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}\times E[Y^{(1)}]-\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]>0\qquad(4)$$

2　主要结论

引理 4　模型(1)存在函数 $g(r)$使得 $E[e^{-rs(t)}=e^{tg}(r)]$

证明:

$$E[e^{-rs(t)}]=E[\exp(-r\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)}-r\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(2)}+$$

$$r\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)}+r\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)})]$$

$$=E[\exp(-r\sum_{i=1}^{M_1(t)}X_i^{(1)})]E[\exp(-r\sum_{i=1}^{M_2(t)}X_i^{(2)})]\times$$

$$E[\exp(r\sum_{i=1}^{N_1(t)}Y_i^{(1)})]E[\exp(r\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i^{(2)}]$$

$$=\exp\Big[\frac{\lambda_1 t(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3 t(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2 t(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4 t(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}\Big]$$

其中 $M_{X^{(1)}}(r),M_{X^{(2)}}(r),M_{Y^{(1)}}(r),M_{Y^{(2)}}(r)$ 分别表示 $X_i^{(1)},X_i^{(2)},Y_i^{(1)},Y_i^{(2)}$ 的矩母函数,令

$$g(r)=\frac{\lambda_1 t(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3 t(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2 t(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4 t(M_{Y(2)}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}$$

定义 5 方程 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内的正解 R 称为(1)的调节系数.

定理 6 模型(1)中的 R 不存在.

证明:

$$g(r)=\frac{\lambda_1 t(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3 t(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2 t(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4 t(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}$$

易得

$$g(0)=0,g(+\infty)=-\lambda_1-\lambda_3-\frac{\lambda_2}{\rho_2}-\frac{\lambda_4}{\rho_4}<0$$

$$g'(r)=\frac{-\lambda_1 M'_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2}+\frac{-\lambda_3 M'_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2}+\frac{\lambda_4 M'_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2}$$

由假设 1

$$g'(0)=\frac{-\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{-\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]+\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]+\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]<0,g'(+\infty)>0$$

$$g''(r)=\frac{\lambda_1 M''_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2+2\lambda_1\rho_1(1-\rho_1)[M'_{X^{(1)}}(-r)]^2[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^4}+$$
$$\frac{\lambda_3 M''_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2+2\lambda_3\rho_3(1-\rho_3)[M'_{X^{(2)}}(-r)]^2[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(r)]^4}+$$
$$\frac{\lambda_2 M''_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2+2\lambda_2\rho_2(1-\rho_2)[M'_{Y^{(1)}}(r)]^2[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^4}+$$
$$\frac{\lambda_4 M''_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2+2\lambda_4\rho_4(1-\rho_4)[M'_{Y^{(2)}}(r)]^2[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^4}>0$$

$(r>0)$

所以 $g'(r)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,又 $g'(0)<0,g'(+\infty)>0$ 故 $g(r)$ 先减后增,而 $g(0)=0,g(+\infty)<0$,所以 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内无解,即模型(1)不存在调节系数 R.

引理 7 对模型(2)存在函数 $g(r)$ 使得 $E[e^{-rs^*(t)}]=e^{tg(r)}$.

证明:类似引理 4 的证明. 令

$$g(r)=\frac{\lambda_1 t(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3 t(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2 t(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4 t(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(-r)}+\frac{1}{2}r^2\sigma^2$$

定义 8 方程 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内的正解 R 称为模型(2)的调节系数.

定理 9 模型(2)存在惟一的调节系数.

证明:由

$$g(r)=\frac{\lambda_1 t(M_{X^{(1)}}(-r)-1)}{1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)}+\frac{\lambda_3 t(M_{X^{(2)}}(-r)-1)}{1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)}+\frac{\lambda_2 t(M_{Y^{(1)}}(r)-1)}{1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)}+\frac{\lambda_4 t(M_{Y^{(2)}}(r)-1)}{1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)}+\frac{1}{2}r^2\sigma^2$$

得 $g(r)=0,g(+\infty)=+\infty$

$$g'(r)=\frac{-\lambda_1 M'_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2}+\frac{-\lambda_3 M'_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2}+\frac{\lambda_2 M'_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2}+$$

$$\frac{\lambda_4 M'_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2}+r\sigma^2$$

又由假设 1

$$g'(0)=\frac{-\lambda_1}{1-\rho_1}E[X^{(1)}]+\frac{-\lambda_3}{1-\rho_3}E[X^{(2)}]+\frac{\lambda_2}{1-\rho_2}E[Y^{(1)}]+\frac{\lambda_4}{1-\rho_4}E[Y^{(2)}]<0,g'(+\infty)>0\text{ 且}$$

$$g''(r)=\frac{\lambda_1 M''_{X^{(1)}}(-r)(1-\rho_1)[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^2+2\lambda_1\rho_1(1-\rho_1)[M'_{X^{(1)}}(-r)]^2[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]}{[1-\rho_1 M_{X^{(1)}}(-r)]^4}+$$

$$\frac{\lambda_3 M''_{X^{(2)}}(-r)(1-\rho_3)[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^2+2\lambda_3\rho_3(1-\rho_3)[M'_{X^{(2)}}(-r)]^2[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]}{[1-\rho_3 M_{X^{(2)}}(-r)]^4}+$$

$$\frac{\lambda_2 M''_{Y^{(1)}}(r)(1-\rho_2)[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^2+2\lambda_2\rho_2(1-\rho_2)[M'_{Y^{(1)}}(r)]^2[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]}{[1-\rho_2 M_{Y^{(1)}}(r)]^4}+$$

$$\frac{\lambda_4 M''_{Y^{(2)}}(r)(1-\rho_4)[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^2+2\lambda_4\rho_4(1-\rho_4)[M'_{Y^{(2)}}(r)]^2[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]}{[1-\rho_4 M_{Y^{(2)}}(r)]^4}+\sigma^2>0$$

$(r>0)$

所以 $g'(r)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,又 $g'(0)<0,g'(+\infty)>0$ 故 $g(r)$ 先减后增 $g(0)=0,g(+\infty)>0$,所以 $g(r)=0$ 在 $r>0$ 内的有惟一解,即模型(2)存在惟一的调节系数 R.

参考文献:

[1] 周绍伟. 双复合 Poisson-Geometric 风险模型及其破产概率[J]. 山东大学学报,2009,44(12):60-63.

[2] 成世学. 破产论研究综述[J]. 数学进展,2002,31(5):403-422.

[3] 于文广,黄玉娟. 多险种风险模型下的时间盈余过程[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2007,30(11):1475-1477.

[4] 袁翰林,郑爱明. 随机利率下带干扰的风险模型的破产概率[J]. 泉州师范学院学报(自然科学),2007,25(4):4-6.

[5] 毛泽春,刘锦萼. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概[J]. 应用数学学报,2005,28(3),419-428.

[6] 熊双平. 索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的常利率风险模型的罚金函数[J]. 经济数学学报,2008,25(2):137-142.

[7] 廖基定,龚日朝,刘再明,等. 复合 Poisson-Geometric 风险模型 Gerber-Shiu 折现惩罚函数[J]. 应用数学学报,2007,30(6):1076-1085.

[8] 段红星,黎锁平,包林涛. 带有随机保费的双险种风险模型[J]. 甘肃科学学报,2008,20(3):31-34.