文章编号:1673-0062(2011)03-066-03

严格上三角矩阵李代数的李 triple 导子代数

王恒太[1],刘志泽[2],罗迪凡[1]

(1. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001;2. 湖南省张家界电业局,湖南 张家界 427000)

摘　要:研究严格上三角矩阵李代数 N 的李 triple 导子代数 $TDerN$ 的结构,证明了它是一个可解李代数,并且给出了其导子代数 $DerN$ 和李 triple 导子代数之间的维数差,从而证明了其导子代数是李 triple 导子代数的真子代数.

关键词:严格上三角矩阵李代数;李导子;李 triple 导子

中图分类号:O152.2　　**文献标识码**:A

On Triple Derivation Algebra of a Class of Lie Algebras

WANG Heng-tai[1], LIU Zhi-ze[2], LUO Di-fan[1]

(1. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China;
2. Zhangjiajie Electric Power Bureau, Zhangjiajie, Hunan 427000, China)

Abstract: In this paper we investigate the structure of $TDerN$ and prove that it is a solvable Lie algebra, where N is the Lie algebra of strictly upper triangular $n\times n$ matrices over complex number field. The codimension of the derivation algebra $DerN$ in $TDerN$ is also determined. And then we obtain that $DerN$ is the proper subalgebra of $TDerN$.

key words: Lie algebra of strictly upper triangular matrices; Lie derivation; Lie triple derivation

导子和自同构问题是代数的线性保持问题中的重要研究内容,并且它们反映了代数最本质的结构信息. 文献[1]研究了交换环上矩阵代数的自同构,文献[2]研究了三角代数的 Jordan 自同构. 另外在矩阵李代数上的结果见文献[3-5].

令 R 是含有单位元 1 的交换环, L 是 R 上的李代数, L 上的线性映射 ϕ 称为一个李 triple 导子,如果 $\phi([a,[b,c]]) = [\phi(a),[b,c]] + [a,[\phi(b),c]] + [a,[b,\phi(c)]]$ 对任意的 $a,b,c\in L$ 都成立. 显然李代数的任意一个李导子都是李 triple 导子. 文献[6]给出了严格上三角矩阵李代数上的李 triple 导子的分解,并且证明了这种分解是惟一的,本文将继续文献[6]的工作,研究它的李 triple 导子代数的结构,并且探讨其李导子代数在李 triple 导子代数中的余维数.

1　$TDerN$ 的结构

在文献[6]中定义了 4 类李 triple 导子,它们分别是内导子,对角导子,中心 triple 导子,极值 triple 导子. 给出下面的符号:

收稿日期:2011-07-12

作者简介:王恒太(1982-),男,山东泰安人,南华大学数理学院讲师,博士. 主要研究方向:李代数结构及表示理论.

$I = \{ adx \mid x \in N \}$, $T = \{ \eta_y \mid y \in D \}$,其中 D 是对角矩阵.

对于 $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ 和 $c'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, c'_{i3})$,定义线性映射 ϕ 如下:

$$\begin{cases} \mu_{(c,c')}(E_{i,i+1}) = c_{i1}E_{1,n-1} + c_{i2}E_{1,n} + c_{i3}E_{2,n} \\ (3 \leqslant i \leqslant n-3) \\ \mu_{(c,c')}(E_{j,j+2}) = c'_{j1}E_{1,n-1} + c'_{j2}E_{1,n} + c'_{j3}E_{2,n} \\ (1 \leqslant j \leqslant n-2) \\ \mu_{(c,c')}(E_{pq}) = 0 \quad 其它 \end{cases}$$

记 C 为 $\mu_{(c,c')}$ 生成的代数,不难发现它是 $TDerL$ 的一个交换子代数. 记 C' 为 $\mu_{(c,c')}$ 生成的子代数,其中 $c_{i2} = 0 (3 \leqslant i \leqslant n-3)$, $c'_{j2} = 0 (1 \leqslant i \leqslant n-2)$. 那么 $C = (C \cap DerN) \oplus C'$.

对于 $n \geqslant 6$, $g_i, h_i (i = 1,2,3)$ 定义两个线性映射:

$$\begin{cases} \rho_2(E_{12}) = g_1 E_{2,n} \\ \rho_2(E_{23}) = g_2 E_{1,n-1} + g_3 E_{1,n} \\ \rho_2(E_{pq}) = 0 \quad 其它, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{n-1}(E_{n-1,n}) = h_1 E_{1,n-1} \\ \rho_{n-1}(E_{n-2,n-1}) = h_2 E_{1,n} + h_3 E_{2,n}. \\ \rho_{n-1}(E_{pq}) = 0 \quad 其它 \end{cases}$$

由 ρ_2 和 ρ_{n-1} 生成的代数 $P = P(g,h)$ 也是 $TDerN$ 的一个交换子代数. 现在对于 $g = (0, g_2, 0)$ 和 $h = (0,0,h_3)$ 定义 $P' = P(g,h)$. 类似地对于 $g = (g_1, 0, 0)$, $h = (h_1, 0, 0)$ 定义 $P_1 = P(g, h)$. 对于 $g = (0,0,g_3)$, $h = (0, h_2, 0)$ 定义 $C_1 = P(g,h)$. 那么有下面的分解 $P = (P \cap DerN) \oplus P'$.

定理 1　对于 $n \geqslant 6$,有 $TDerN = DerN \oplus C' \oplus P'$.

证明:根据文献[6],当 $n \geqslant 6$, N 的任何一个李 triple 导子 ϕ 都有如下惟一分解:

$\phi = adx + \eta_y + \mu_{(c,c')} + \rho_2 + \rho_{n-1}$,于是有相应的代数的分解

$$\begin{aligned} TDerN &= I \oplus T \oplus C \oplus P \\ &= I \oplus T \oplus (C \cap DerN) \oplus C' \oplus C_1 \oplus P_1 \oplus P' \\ &= DerN \oplus C' \oplus P' \end{aligned}$$

根据可解李代数的定义有如下结论:

引理 2　假设 L 是复数域上有限维李代数,且 $L = B \oplus I$, B 和 I 分别是可解李子代数和理想,那么 L 也是可解的.

引理 3　当 $n \geqslant 6$ 时, $C \oplus P$ 是一个交换李代数,从而是可解的.

引理 4　当 $n \geqslant 6$ 时, $DerN$ 是可解的.

证明:可以证明 $F = T \oplus (C \cap DerN) \oplus (P \cap DerN)$ 是可解的. 事实上, T 和 $(C \cap DerN) \oplus (P \cap DerN)$ 分别是 F 的可解子代数和可解理想. 另一方面, I 是 $DerN$ 的可解理想,从而 $DerN$ 是可解的.

引理 5　当 $n \geqslant 6$ 时, $C \oplus P' \oplus C_1$ 是 $TDerN$ 的可解理想.

定理 6　对于 $n \geqslant 6$, $TDerN$ 是可解李代数.

证明:当 $n \geqslant 6$ 时, $TDerN$ 有下面的分解 $TDerN = (I \oplus T \oplus P_1) \oplus (C \oplus C_1 \oplus P')$,第一个括号是 $DerN$ 的可解子代数,第二个括号是 $TDerN$ 的可解理想,由引理2知, $TDerN$ 是可解李代数. 当 $2 \leqslant n \leqslant 5$ 时,可以通过直接计算得到.

2　DerN 在 TDerN 中的余维数

本节将讨论 $DerN$ 在 $TDerN$ 中的余维数,从而更加明显地揭示 $DerN \subset TDerN$ 这一事实.

定理 7　令 ν 是 $DerN$ 在 $TDerN$ 中的余维数,那么

$$\nu = \begin{cases} 0, & n = 2,3; \\ 8, & n = 4; \\ 12, & n = 5; \\ 5n-14, & n \geqslant 6. \end{cases}$$

证明:当 $n = 2,3$ 时,结论是显然的. 当 $n = 4,5$ 时,通过文献[6]中的方法分解任意一个李 triple 导子也可以确定它们之间的维数差(证明过程略). 当 $n \geqslant 6$ 时,由定理1知 $TDerN = DerN \oplus C' \oplus P'$,在这里 C'中的元素有如下形式:

$$\begin{cases} \mu_{(c,c')}(E_{i,i+1}) = c_{i1}E_{1,n-1} + c_{i3}E_{2,n} \quad (3 \leqslant i \leqslant n-3) \\ \mu_{(c,c')}(E_{j,j+2}) = c'_{j1}E_{1,n-1} + c'_{j2}E_{1,n} + c'_{j3}E_{2,n} \\ \qquad (1 \leqslant j \leqslant n-2) \\ \mu_{(c,c')}(E_{pq}) = 0 \qquad 其它 \end{cases}$$

因此到余维数 $\nu = 2(n-5) + 3(n-2) + 2 = 5n-14$. 最后一个2是极值导子代数在极值 triple 导子代数中的余维数.

参考文献:

[1] Cao Youan. Automorphisms of certain Lie algebras of uppertriangular matrices over a commutative ring[J]. J. Algebra, 1997, 189(2): 506-513.

[2] Beidar K I, Bresar M, Chebotar M A. Jordan isomorphisms of triangular matrix algebra over a connected commutative ring[J]. Linear Algebra Appl., 2000, 312(1-3): 197-201.

[3] Dokovic D. Automorphisms of the Lie algebra of upper

(下转第71页)

（上接第 67 页）

triangular matrices over a connected commutative ring [J]. J. Algebra,1994,170(1):101-110.

[4] Isaacs I M. Automorphisms of matrix algebras over commutative rings [J]. Linear Algebra Appl, 1980, 31: 215-231.

[5] Jondrup S. Automorphisms of upper triangular matrix rings [J]. Archv der Mathematik,1987,221:497-502.

[6] Wang Hengtai,Li Qingguo. Lie triple derivation of the Lie algebra of strictly upper triangular matrix over a commutative ring[J]. Linear Algebra Appl,2009,430(1):66-77.