文章编号:1673 - 0062(2011)03 - 063 - 04

一类椭圆方程组解的存在性

李云翔[1],许友军[2*],刘艳琪[2]

(1. 湖南城市学院 数学与计算科学学院,湖南 益阳 413000;2. 南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:利用山路引理,获得了一类椭圆方程组非平凡解的存在性,推广了一些已有结果.

关键词:椭圆方程组;变分方法;山路引理

中图分类号:O175.15　　**文献标识码**:A

Existence of Nontrivial Solutions of a Class of Elliptic Equations

LI Yun-xiang[1], XU You-jun[2*], LIU Yan-qi[2]

(1. Department of Mathematics and Computation Sciences, Hunan City University, Yiyang, Hunan 413000, China; 2. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: We obtained existence of nontrivial solutions of a class of elliptic equations by applying mountain pass theorem, and extended some existing results.

key words: elliptic equations; variational method; mountain pass lemma

0　引　言

椭圆方程以及椭圆方程组的解的存在性问题,一直是许多数学工作者所关注的热点[1-6]. 本文讨论一类椭圆方程组

$$\begin{cases} -div(a_1(x,\nabla u)) = f(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ -div(a_2(x,\nabla v)) = g(x,u,v) \text{ in } \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\Omega \subset \mathrm{R}^N (N \geqslant 1)$ 有界区域.

非平凡解的存在性,推广了文献[1,5]中的一些已有结果.

1　主要结果

先给出一些假设:

(H1)设 $A_i:\Omega \times \mathrm{R}^N \to \mathrm{R}$, $A_i = A_i(x,\xi)$, $i = 1,2$ 是两个连续的泛函,并且对变量 ξ 都有连续的偏导数. $a_i = DA_i$ 为 A_i 的导算子,满足下面的条件

(i) $A_i(x,0) = 0$, $i = 1,2$　$\forall x \in \Omega$;

(ii) a_i 满足增长性条件 $|a_1| \leqslant c_1(1 + |\xi|^{p-1})$, $|a_2| \leqslant c_2(1 + |\xi|^{q-1})$, $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathrm{R}^N$,其中 c_1, c_2 为两个正常数.

(iii) A_1 是 p 一致凸的, A_2 是 q 一致凸的,即

收稿日期:2011 - 05 - 11

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(11JJ4006);湖南省教育厅基金资助项目(09C852);南华大学博士启动基金资助项目(5 - 2011 - XQD - 008)

作者简介:李云翔(1972 -),男,湖南益阳人,湖南城市学院数学与计算科学学院副教授,博士. 主要研究方向:偏微分方程、控制理论. * 通讯作者

存在正常数 $k_1,k_2>0$,使得

$$A_1(x,\frac{\xi+\eta}{2})\leqslant\frac{1}{2}A_1(x,\xi)+\frac{1}{2}A_1(x,\eta)-k_1|\xi-\eta|^p,\ \forall x\in\Omega,\xi,\eta\in\mathrm{R}^N,$$

$$A_2(x,\frac{\xi+\eta}{2})\leqslant\frac{1}{2}A_2(x,\xi)+\frac{1}{2}A_2(x,\eta)-k_2|\xi-\eta|^q,\ \forall x\in\Omega,\xi,\eta\in\mathrm{R}^N.$$

(iv) A_1 是 p 超齐次的,A_2 是 q 超齐次的,即

$0\leqslant a_1(x,\xi)\leqslant pA_1(x,\xi),0\leqslant a_2(x,\xi)\leqslant qA_2(x,\xi),\forall x\in\Omega,\xi\in\mathrm{R}^N$.

(v) A_i 满足椭圆性条件,即

$A_1(x,\xi)\geqslant\Lambda_1|\xi|^p,A_2(x,\xi)\geqslant\Lambda_2|\xi|^q,\forall x\in\Omega,\xi\in\mathrm{R}^N$.

其中 $\Lambda_i,i=1,2$ 为两个正常数.

(H2) 函数 $f,g\in C(\overline{\Omega}\times\mathrm{R}\times\mathrm{R},\mathrm{R})$ 满足下列条件

(f_1) 函数 f,g 满足次临界增长性条件,即

$|f(x,s,t)|\leqslant k_1(1+|s|^{p_1-1}+|t|^{p_2-1})$,

$|g(x,s,t)|\leqslant k_2(1+|s|^{q_1-1}+|t|^{q_2-1})$,

这里,k_1,k_2 是正常数,$p\leqslant p_i<p^*,q\leqslant q_i<q^*,i=1,2$. 这里 p^* 为 p 的临界指数,p^* 为 p 的临界指数.

(f_2) 存在 $\theta>\max\{p,q\},T>0$,使得对所有的 $(s,t)\in R\times R$,满足 $|s|+|t|>T$,有

$0<\theta G(x,s,t)\leqslant sf(x,s,t)+tg(x,s,t)\quad\forall x\in\Omega$,

这里 $\dfrac{\partial G(x,s,t)}{\partial s}=f(x,s,t)$,

$\dfrac{\partial G(x,s,t)}{\partial t}=g(x,s,t)$.

(f_3) 存在 $T_0>0,p<\sigma<p^*,q<\rho<q^*$,且存在 $c>0$,使得对任意的 $x\in\overline{\Omega}$ 以及满足 $|s|+|t|\leqslant T_0$ 的 (s,t),有

$G(x,s,t)\leqslant c(|s|^\sigma+|t|^\rho)$,

满足这些条件的例子有:

1) 当 $A(x,s)=\dfrac{1}{p}|s|^p$,则 $a(x,s)=|s|^{p-2}s$,就得到常见的 p - Laplace 算子方程组.

2) 当 $A(x,s)=\dfrac{1}{p}[(1+|s|^2)^{p/2}-1]$,就得到常见的曲率算子方程.

注 1 由条件(ii),知泛函 A 足增长性条件

$|A_1(x,\xi)|\leqslant c'_1(1+|\xi|^p)$,

$|A_2(x,\xi)|\leqslant c'_2(1+|\xi|^q)\quad\forall x\in\Omega,\xi\in\mathrm{R}^N$,

事实上,$A_1(x,\xi)=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_1(x,t\xi)\mathrm{d}t=\int_0^1a_1(x,t\xi)\cdot\xi\mathrm{d}t$.

由条件(ii),知 $A_1(x,\xi)\leqslant c_1\int_0^1(1+|\xi|^{p-1}t^{p-1})|\xi|\,\mathrm{d}t\leqslant c_1(1+|\xi|^p)$,

同理可得 $|A_2(x,\xi)|\leqslant c'_2(1+|\xi|^q)$.

定理 1 假设 $a(x,\xi),f,g$ 满足条件(H1)-(H2),则问题(1)至少存在一个非平凡解.

2 主要结果的证明

先定义一个泛函

$J(u,v)=\int_\Omega A_1(x,\nabla u)\mathrm{d}x+\int_\Omega A_2(x,\nabla v)\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u,v)\mathrm{d}x,\forall(u,v)\in W_0^{1,p}(\Omega)\times W_0^{1,q}(\Omega)$. 易知 $J\in C^1$,且它的非零临界点就是问题(1)的非平凡解. 它的导数形式为

$\langle J'(u,v),(\phi,\varphi)\rangle=\int_\Omega a_1(x,\nabla u)\nabla\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega a_2(x,\nabla v)\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega(f(x,u,v)\phi+g(x,u,v)\varphi)\mathrm{d}x$. 其中任意 $(\phi,\varphi)\in W_0^{1,p}(\Omega)\times W_0^{1,q}(\Omega)$(以后简记为 $X_p\times X_q$). 利用文献[6]的知识,不难得到:

引理 2 若泛函 $A:X\rightarrow R$ 是局部一致凸的并且是局部有界的,$A\in C^1$,则 A 的导算子 $a=DA:X\rightarrow X^*$ 满足 (S_+) 条件.

证明:

第一步 泛函 J 满足 (PS) 条件. 设 $(u_n,v_n)\in X_p\times X_q$ 为 (PS) 序列,$J(u_n,v_n)\rightarrow c,J'(u_n,v_n)\rightarrow0$ 其中 c 为一正常数. 首先证明此序列在 $X_p\times X_q$ 中是有界的

$J(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle=\int_\Omega[A_1(x,\nabla u_n)-\frac{1}{\theta}a_1(x,\nabla u_n)\nabla u_n]\mathrm{d}x+\int_\Omega[A_2(x,\nabla v_n)-\frac{1}{\theta}a_2(x,\nabla v_n)\nabla v_n]\mathrm{d}x+\int_\Omega\{\frac{1}{\theta}[f(x,u_n,v_n)u_n+g(x,u_n,v_n)v_n]-G(x,u_n,v_n)\}\mathrm{d}x$. 由条件(iv),可以得到

$J(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle\geqslant(1-\frac{p}{\theta})\int_\Omega[A_1(x,\nabla u_n)+A_2(x,\nabla v_n)]\mathrm{d}x+\int_\Omega\{\frac{1}{\theta}[f(x,u_n,v_n)u_n+g(x,u_n,v_n)v_n]-G(x,u_n,v_n)\}\mathrm{d}x$.

从而有

$(1-\frac{p}{\theta})\int_\Omega[A_1(x,\nabla u_n)+A_2(x,\nabla v_n)]\mathrm{d}x\leqslant$

$J(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle-\int_{\Omega'}\{\frac{1}{\theta}[f(x,u_n,v_n)u_n+g(x,u_n,v_n)v_n]-G(x,u_n,v_n)\}\mathrm{d}x+M|\Omega|$.

其中 $\Omega'=\{x\in\bar{\Omega}:|u_n|+|v_n|>T\}$,$M=\sup_{x\in\bar{\Omega},|s|+|t|\leqslant T}\{\frac{1}{\theta}[f(x,s,t)s+g(x,s,t)t]-G(x,s,t)\}$.由条件 (f_2),可得到

$$(1-\frac{p}{\theta})\int_\Omega[A_1(x,\nabla u_n)+A_2(x,\nabla v_n)]\mathrm{d}x\leqslant J(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle+M|\Omega|$$

再由条件(v),得

$$C_1\int_\Omega|\nabla u_n|^p\mathrm{d}x+C_2\int_\Omega|\nabla v_n|^q\mathrm{d}x\leqslant J(u_n,v_n)-\frac{1}{\theta}\|J'(u_n,v_n)\|\cdot\|(u_n,v_n)\|+M|\Omega|.$$

这里常数 $C_i=(1-\frac{p}{\theta})\Lambda_i>0,i=1,2$,很明显$(u_n,v_n)$是有界的.

由空间 $X_p\times X_q$ 的自反性知,序列(u_n,v_n)存在某个子列(不妨仍记为(u_n,v_n)),使得

$$(u_n,v_n)\xrightarrow{w}(u,v)\quad(u,v)\in X_p\times X_q.$$

由引理 2,再定义一个泛函:

$$J_0(u,v)=\int_\Omega[A_1(x,\nabla u)+A_2(x,\nabla v)]\mathrm{d}x,(u,v)\in X_p\times X_q.$$

则泛函 J_0 满足 (S_+) 条件,所以只需证明

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a_1(x,\nabla u_n)(\nabla u_n-\nabla u)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a_2(x,\nabla v_n)(\nabla v_n-\nabla v)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

另一方面,

$$\int_\Omega a_1(x,\nabla u_n)(\nabla u_n-\nabla u)\mathrm{d}x+\int_\Omega a_2(x,\nabla v_n)\times(\nabla v_n-\nabla v)\mathrm{d}x=\langle J'(u_n,v_n),(u_n,v_n)-(u,v)\rangle+\int_\Omega f(x,u_n,v_n)(u_n-u)\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x,u_n,v_n)(v_n-u)\mathrm{d}x.$$

根据 $W_0^{1,p}(\Omega)\subset L^{\hat{p}}(\Omega)$,可知$(u_n,v_n)\to(u,v)$在空间 $L^{\hat{p}}(\Omega)\times L^{\hat{q}}(\Omega)$ 中,由(f_1)以及 Holder 不等式,易得

$$\int_\Omega f(x,u_n,v_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0,$$

$$\int_\Omega g(x,u_n,v_n)(v_n-v)\mathrm{d}x\to 0.$$

这样,就有 $\lim_{n\to\infty}(\int_\Omega a_1(x,\nabla u_n)(\nabla u_n-\nabla u)\mathrm{d}x+\int_\Omega a_2(x,\nabla v_n)(\nabla v_n-\nabla v)\mathrm{d}x)=0$.

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a_1(x,\nabla u_n)(\nabla u_n-\nabla u)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a_2(x,\nabla v_n)(\nabla v_n-\nabla v)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

由(S_+)条件即得,$(u_n,v_n)\to(u,v)$在空间 $X_p\times X_q$ 中.

第二步　存在常数 $r>0$,使得对所有的 $x\in\Omega$,有$\inf_{\|u\|_{1,p}+\|v\|_{1,q}=r}J(u,v)=b>0$.

对所有的 $x\in\Omega$,可以选取$(u,v)\in X_p\times X_q$,使得 $|u|+|v|\leqslant T_0$,易知

$$J(u,v)=\int_\Omega A_1(x,\nabla u)\mathrm{d}x+\int_\Omega A_2(x,\nabla v)\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,u,v)\mathrm{d}x\geqslant\Lambda_1\int_\Omega|\nabla u|^p\mathrm{d}x+\Lambda_2\int_\Omega|\nabla v|^q\mathrm{d}x-c'(\|u\|_{1,p}^\sigma+\|v\|_{1,q}^\rho)\geqslant\Lambda(\|u\|_{1,p}^p+\|u\|_{1,q}^q)-c'(\|u\|_{1,p}^\sigma+\|v\|_{1,q}^\rho)=\varphi(r).$$

其中 $\Lambda=\min\{\Lambda_1,\Lambda_2\}$,$r=\|u\|_{1,p}+\|v\|_{1,q}$,易知,当 r 充分小时,存在常数 $b>0$,使得 $\varphi(r)=b>0$.

第三步存在元素 $(e_1,e_2)\in X_p\times X_q\backslash B_r(0,0)$,使得 $J(e_1,e_2)<0$,

对几乎所有的 $x\in\Omega$,选取$(u_0,v_0)\in X_p\times X_q$,使得下面的区域

$$\Omega_0=\{x\in\Omega:|u_0|+|v_0|>T\}\neq\varnothing.$$

根据 A_1 是 p 超齐次性、A_2 是 q 超齐次性以及 $G(x,u,v)$ 是 θ 超其次性,可得

$$J(tu_0,tv_0)=\int_\Omega A_1(x,t\nabla u_0)\mathrm{d}x+\int_\Omega A_2(x,t\nabla v_0)\mathrm{d}x-\int_\Omega G(x,tu_0,tv_0)\mathrm{d}x\leqslant t^p\int_\Omega A_1(x,\nabla u)\mathrm{d}x+t^q\int_{\Omega_0}A_2(x,\nabla v)\mathrm{d}x-t^\theta\int_\Omega G(x,u,v)\mathrm{d}x+M'|\Omega|\leqslant c'_2t^p\int_\Omega|\nabla u_0|^p\mathrm{d}x+c'_2t^q\int_\Omega|\nabla v_0|^q\mathrm{d}x-t^\theta\int_\Omega G(x,u_0,v_0)\mathrm{d}x+M'|\Omega|.$$

这里 $M'=\sup\{|G(x,u,v)|:x\in\Omega,|u_0|+|v_0|\leqslant T\}$,由于 $\theta>\max\{p,q\}$,根据(f_2),推得当 $t\to+\infty$ 时,$J(tu_0,tv_0)\to-\infty$,这样对于充分大的 t,一定存在某个

$(e_1,e_2)=(tu_0,tv_0)\in X_p\times X_q\backslash B_r(0,0)$,使得 $J(e_1,e_2)<0$. 证毕.

综上可知,泛函 J 满足山路引理的条件,所以系统(1)至少存在一下非平凡解.

参考文献:

[1] Dinca G,Mawhin J,Jebelean J. A result of Ambrosetti-

(下转第 71 页)

(上接第 65 页)

Rabinowitz type for p-Laplacian[C]. Singapore: World Scientific, 1995: 231-242.

[2] Clement P H, Garcia-Huidobro M, Manasevich R. Mountain pass type solutions for quasilinear elliptic equations[J]. Cal Var Partial Differential Equation, 2000, 11: 33-62.

[3] Chen Cai-sheng. On positive weak solutions for a class of quasilinear elliptic system[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 62: 751-756.

[4] Tacksun Jung, Q-Heung Choi. Mountain pass geometry applied to the nonlinear mixed type elliptic problem[J]. Korean J. Math., 2009, 4(17): 419-428.

[5] Yang Yang, Jihui Zhang. Infnitely many mountain pass solutions on a kind of fourth-order neumann boundary value problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 213: 262-271.

[6] 周焕松. 一个山路引理的应用[M]. 数学学报, 2004, 47(1): 189-196.

[7] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 成都: 科学出版社, 2002 年.