文章编号:1673－0062(2011)03－058－05

一类具比例时滞的脉冲微分方程解的振动性

关开中,贺小宝

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:建立一类具比例时滞和正负系数脉冲微分方程解振动的充分条件. 所得结果揭示:脉冲微分方程解的振动性可以仅由脉冲条件所引起;在一定脉冲条件下,非脉冲微分方程解的振动性可以被脉冲微分方程所继承. 最后举例予以说明.

关键词:脉冲微分方程;比例时滞;正负系数;振动性

中图分类号:O175.1　　　**文献标识码**:A

Oscillation of Solutions of a Class of Impulsive Differential Equations with Pantograph Delays

GUAN Kai-zhong, HE Xiao-bao

(School of Mathematics and Physical Sciences, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Sufficient conditions for oscillation of solutions to a class of impulsive differential equations with pantograph delays and positive and negative coefficients are obtained. Our results reveal the fact that the oscillatory properties of all solutions of an impulsive differential equation can only be caused by the impulsive perturbations and that the oscillatory behavior of every solution of the differential equation without impulses can be inherited by the impulsive differential equation under certain impulsive perturbations. Some examples are also given to illustrate the usefulness of our main results.

key words: Impulsive differential equation; Pantograph delay; positive and negative cofficients; oscillation

0　引　言

众所周知,脉冲微分方程理论不仅比非脉冲微分方程理论丰富,而且还为物理学、生物学、工程领域等学科领域中所研究的诸多现象和过程提供了一类更为丰富的数学模型[1-2]. 近二十年来,脉冲时滞微分方程振动性的研究已引起了人们的极大兴趣并产生了丰富的研究成果[3-6]. 具有比例

收稿日期:2011－05－23

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(11JJ3011)

作者简介:关开中(1965－),男,湖南武冈人,南华大学数理学院教授. 主要研究方向:常微分方程与动力系统、凸性理论.

时滞的微分方程最先出现在描述电动机车弓头运动轨迹的数学模型中[7]. 近年来,对于此类方程的研究也引起了人们的广泛关注并产生了一定的研究成果[8-9]. 最近,文献[10]研究了一类具比例时滞的脉冲中立型微分方程的振动性,作者建立了一些有趣的结果. 本文利用文献[10]的思想和方法,研究下列具有比例时滞和正负系数的脉冲微分方程解的振动性.

$$x'(t)+\frac{p(t)}{t}x(\alpha t)-\frac{q(t)}{t}x(\beta t)=0,$$
$$t\geqslant t_0>0, t\neq t_k, \tag{1}$$
$$x(t_k^+)=b_kx(t_k), k=1,2,\cdots, \tag{2}$$

其中 $0<\alpha<\beta\leqslant 1, 0<t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots, \lim_{k\to\infty}t_k=\infty$, $\{b_k\}$ 是一实数列.

如果 $b_k\equiv 1, k=1,2,\cdots$, 式(1)和式(2)则变为

$$x'(t)+\frac{p(t)}{t}x(\alpha t)-\frac{q(t)}{t}x(\beta t)=0. \tag{3}$$

方程(3)解的振动性已被文献[8]所研究. 本文的主要目的就是建立式(1)和式(2)的所有解振动的充分条件. 所得结果显示:一方面,脉冲微分方程解的振动性可以仅由脉冲条件所引起;另一方面,在一定脉冲条件下,非脉冲微分方程解的振动性可以被脉冲微分方程所继承.

假定下列条件成立

(H_1) $p(t), q(t)\in C([t_0,\infty),[0,\infty))$;

(H_2) $H(t)=p(t)-q(\frac{\alpha}{\beta}t)\geqslant 0$

且 $H(t)\neq 0, t\in(t_{k-1},t_k], k=1,2,\cdots$;

(H_3) $0<b_k\leqslant 1, k=1,2,\cdots$.

关于方程(1)和(2),相应的初始条件为

$$x_{t_0}=\phi(s), s\in[\alpha,1], \tag{4}$$

这里 $x_{t_0}=x(st_0), \alpha\leqslant s\leqslant 1, \phi(s)\in PC([\alpha,1],R)=\{\phi(s):[\alpha,1]\to R, \phi(s)$ 在$[\alpha,1]$ 上是具有限个第一类间断点的分段左连续函数$\}$. 函数 $x(t)$ 被称为式(1)和式(2)满足初始条件(4)的解,如果

(i) $x(t)=\phi(t/t_0), \alpha t_0\leqslant t\leqslant t_0$;

(ii) $x(t)$ 在每个区间$(t_k,t_{k+1}]$($k=0,1,2,\cdots$) 上连续;

(iii) $x(t)$ 在$[t_0,\infty)\backslash\{t_k\}$ 上满足式(1) 且对所有 $t_k\geqslant t_0$($k=1,2,\cdots$) 满足式(2).

习惯上,方程(1)和(2)的解被称为是非振动的,如果它最终为正或最终为负. 否则,称为是振动的.

1　主要结果

以下,令

$$z(t)=x(t)-\int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s. \tag{5}$$

引理 1　假设条件$(H_1)-(H_3)$成立. 设 $x(t)$ 是式(1) 和式(2) 的一个解且满足 $x(\alpha t)>0, t\geqslant t_0$, 那么函数 $z(t)$ 在$[t_0,\infty)$ 不增, 且 $z(t_k^+)\leqslant b_kz(t_k), t\geqslant t_0, k=1,2\cdots$.

证明:由式(1)和式(5)知

$$z'(t)=-\frac{1}{t}H(t)x(\alpha t)\leqslant 0, t_k<t\leqslant t_{k+1}, k\geqslant 0. \tag{6}$$

由式(2)和式(5)可得

$$\begin{aligned}z(t_k^+)&=x(t_k^+)-\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_k^+}^{t_k^+}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s\\&=b_kx(t_k)-\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_k}^{t_k}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s\\&\leqslant x(t_k)-\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_k}^{t_k}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s=z(t_k).\end{aligned}$$

上式以及式(6)表明: $z(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上不增. 再根据式(2),并简单计算得到

$$\begin{aligned}z(t_k^+)&=x(t_k^+)-\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_k^+}^{t_k^+}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s\\&=b_kx(t_k)-\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_k}^{t_k}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s\\&\leqslant b_kx(t_k)-b_k\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_k}^{t_k}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s\\&=b_kz(t_k).\end{aligned}$$

证毕.

引理 2　假设条件$(H_1)-(H_3)$成立且 $z(t)$ 如式(5)所定义. 设 $x(t)$ 是式(1)和式(2)的一个解且满足 $x(\alpha t)>0, t\geqslant t_0$. 如果

$$w(t)=\int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\leqslant 1, t\geqslant t_0, \tag{7}$$

那么 $z(t)>0, t\geqslant t_0$.

证明:先证 $z(t_k)\geqslant 0, k\geqslant 1$. 如若不然,则存在 $m\geqslant 1, z(t_m)=-\upsilon<0$.

由引理 1 可知, $z(t)$ 在$[t_0,\infty)$ 不增, 从而 $z(t)\leqslant -\upsilon<0, t\geqslant t_m$. 由式(5)得到

$$x(t)\leqslant -\upsilon+\int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t}\frac{q(s)}{s}x(\beta s)\,\mathrm{d}s. \tag{8}$$

下面分两种情况讨论.

(i)如果 $\limsup_{t\to\infty}x(t)=\infty$, 则存在一个点列 $\{s_n\}$ 使得 $s_n\geqslant\frac{t_m}{\alpha}, \lim_{n\to\infty}x(s_n)=\infty$以及 $x(s_n)=$

$\max\{x(t):t_m \le t \le s_n\}$. 由式(7)和式(8),得到

$$x(s_n) \le -v + \int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t} \frac{q(s)}{s} x(\beta s)\mathrm{d}s \le -v + x(s_n).$$

这就产生了矛盾.

(ii)如果 $\limsup_{t\to\infty} x(t) = \tau < \infty$,则可以选择点列$\{s_n\}$ 使得$\lim_{n\to\infty} x(s_n) = \tau$. 记

$x(\xi_n) = \max\{x(s):\alpha s_n \le s \le \beta s_n,\}$,那么 $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \infty$, $\limsup_{t\to\infty} x(\xi_n) \le \tau$.

于是有

$$x(s_n) \le -v + \int_{\frac{\alpha}{\beta}s_n}^{s_n} \frac{q(s)}{s} x(\beta s)\mathrm{d}s \le -v + x(\xi_n).$$

上式两边同时取极限,得到 $\lim_{n\to\infty} x(s_n) \le \lim_{n\to\infty} x(\xi_n) - v$,或者 $\tau \le -v + \tau$.

这也产生了矛盾. 综合(i)和(ii),得到 $z(t_k) \ge 0 (k \ge 1)$. 而由式(7) 易知,$z(t_0) \ge 0$.

接下来,证明 $z(t) > 0, t \ge t_0$. 为此,先证在 $z(t_k) > 0 (k \ge 0)$. 如若不然,则存在 $m \ge 0$ 使得 $z(t_m) = 0$. 由式(6)可得

$$z(t_{m+1}) = z(t_m^+) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{H(s)}{s} x(\alpha s)\mathrm{d}s \le z(t_m) - \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{H(s)}{s} x(\alpha s)\mathrm{d}s < 0.$$

此矛盾表明:$z(t_k) > 0 (k \ge 0)$. 这样,由式(6)得到 $z(t) \ge z(t_{k+1}) > 0, t \in (t_k, t_{k+1}] (k \ge 0)$.

证毕.

引理 3 假设条件(H_1)-(H_3)成立,并假设

$$w(t) = \int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u \ge 1, \tag{9}$$

以及下面二阶微分不等式

$$\begin{cases} y''(t) + \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\frac{1}{t^2}H(t)y(t) \le 0, t \ne t_k, \\ y(t_k^+) = y(t_k), k = 1,2,\cdots \\ y'(t_k^+) \le b_k y'(t_k), k = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{10}$$

没有最终正解. 若 $x(t)$ 是式(1) 和式(2) 的一个解且满足 $x(\alpha t) > 0, t \ge t_0$,那么 $z(t)$ 最终为负.

证明:反设结论不成立. 由引理 1 知, $z(t)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上不增,从而 $z(t)$ 最终为正.

令 $l = \min\left\{k \ge 1 : t_k > \frac{t_0}{\alpha}\right\}$ 使得 $z(t) > 0$, $t \ge t_l$. 令 $M = \frac{1}{2}\min\{x(t):\alpha t_l \le t \le t_l\}$,那么$M > 0$ 且 $x(t) > M, \alpha t_l \le t \le t_l$. 下面断言

$$x(t) > M, t \in (t_l, t_{l+1}]. \tag{11}$$

如果式(11)不成立,那么存在一个 $t^* \in (t_l, t_{l+1}]$ 使得 $x(t^*) = M$ 且 $x(t) > M, \alpha t_l \le t \le t^*$.

这样,由式(5)和式(9),可得

$$M = x(t^*) = z(t^*) + \int_{\frac{\alpha}{\beta}t^*}^{t^*} \frac{q(u)}{u} x(\beta u)\mathrm{d}u > \int_{\frac{\alpha}{\beta}t^*}^{t^*} \frac{q(u)}{u} x(\beta u)\mathrm{d}u \ge M.$$

这就产生了矛盾的,从而式(11)成立. 注意到 $z(t_{l+1}^+) > 0$,再由式(5)和式(9),可得

$$x(t_{l+1}^+) = z(t_{l+1}^+) + \int_{\frac{\alpha}{\beta}t_{l+1}}^{t_{l+1}} \frac{q(u)}{u} x(\beta u)\mathrm{d}u > M.$$

重复上述过程,依数学归纳法可得

$$x(t) > M, t \ge \alpha t_l. \tag{12}$$

由于 $z(t) > 0$ 且单调不增,那么$\lim_{t\to\infty} z(t) = a$ 存在. 下分两种情况讨论.

(i)如果 $a = 0$,那么存在 $T_1 > t_l$ 使得 $z(t) \le \frac{M}{2}$. 因此,当 $\tilde{t} > T_1$ 时,有

$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{\tilde{t}}^{\frac{\tilde{t}}{\alpha}} \frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u \le M < x(t), t \in \left[\tilde{t}, \frac{\tilde{t}}{\alpha}\right].$$

(ii)如果 $a > 0$,那么 $z(t) \ge a, t \ge t_l$. 由式(5)和式(12)得

$$x(t) \ge a + \int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t} \frac{q(s)}{s} x(\beta s)\mathrm{d}s \ge a + M, t \ge t_l.$$

利用数学归纳法,容易得到

$$x(t) \ge na + M, t \ge \frac{t_l}{\alpha^{n-1}} (n = 1,2,\cdots).$$

这样,显然有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$,因此,必然存在一个 $T > T_1$ 使得

$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{T}^{\frac{t}{\alpha}} \frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u \le z(t) < x(t), t \in \left[T, \frac{T}{\alpha}\right].$$

情形(i)、(ii)表明:

$$x(t) > \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{T}^{\frac{t}{\alpha}} \frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u, t \in \left[T, \frac{T}{\alpha}\right].$$

令 $l^* = \min\left\{k \ge l : t_k > \frac{T}{\alpha}\right\}$. 下面断言

$$x(t) > \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{T}^{\frac{t}{\alpha}} \frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u, t \in \left[\frac{T}{\alpha}, t_{l^*}\right]. \tag{13}$$

否则,必存在某个 $t^* \in \left(\frac{T}{\alpha}, t_{l^*}\right]$ 使得

$x(t^*) = \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_{T}^{\frac{t^*}{\alpha}} \frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u$ 和 $x(t) >$

$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_T^{\frac{t}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u, t\in\left(\frac{T}{\alpha},t^*\right).$

这样,式(5)得

$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_T^{\frac{t^*}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u = x(t^*) = z(t^*)+\int_{\frac{\alpha}{\beta}t^*}^{t^*}\frac{q(u)}{u}x(\beta u)\mathrm{d}u >$$
$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\left(\int_{t^*}^{\frac{t^*}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u+\int_{\frac{\alpha}{\beta}t^*}^{t^*}\frac{q(u)}{u}\int_T^{\frac{\beta}{\alpha}u}\frac{z(v)}{v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\right) >$$
$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\left(\int_{t^*}^{\frac{t^*}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u+\int_{\frac{\alpha}{\beta}t^*}^{t^*}\frac{q(u)}{u}\int_T^{t^*}\frac{z(v)}{v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\right) \geqslant$$
$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_T^{\frac{t^*}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u$$

这是一个矛盾,从而式(13)成立. 再根据式(5),可得

$$x(t_{l^*}^+) = z(t_{l^*}^+)+\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_{l^*}}^{t_{l^*}}\frac{q(u)}{u}x(\beta u)\mathrm{d}u \geqslant z(t_{l^*})+$$
$$\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_{l^*}}^{t_{l^*}}\frac{q(u)}{u}x(\beta u)\mathrm{d}u > \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\left(\int_{t_{l^*}}^{\frac{t_{l^*}}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u+\right.$$
$$\left.\int_{\frac{\alpha}{\beta}t_{l^*}}^{t_{l^*}}\frac{q(u)}{u}\int_T^{t_{l^*}}\frac{z(v)}{v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\right) > \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\left(\int_{t_{l^*}}^{\frac{t_{l^*}}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u+\right.$$
$$\left.\int_T^{t_{l^*}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u\right) = \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_T^{\frac{t_{l^*}}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

重复上面的步骤,并利用数学归纳法,容易得到

$$x(t) > \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\int_T^{\frac{t}{\alpha}}\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u, t > T. \tag{14}$$

于是,由式(5)和式(14)得到

$$z'(t) = -\frac{1}{t}H(t)x(\alpha t) \leqslant -\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\times\frac{1}{t}H(t)\times$$
$$\int_T^t\frac{z(u)}{u}\mathrm{d}u \leqslant -\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\frac{1}{t^2}H(t)\int_T^t z(u)\mathrm{d}u,$$

这里 $t\geqslant T/\alpha, t\neq t_k$. 令 $y(t) = \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\times\int_T^t z(u)\mathrm{d}u$,则 $y(t_k^+) = y(t_k)$,

$$y'(t_k^+) = \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}z(t_k^+) \leqslant \left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\times$$
$$b_k z(t_k) = b_k y'(t_k), k = l, l+1,\cdots.$$

于是,$y(t)>0, t\geqslant T/\alpha$ 且 $y(t)$ 满足式(10),这与假设矛盾,因此 $z(t)$ 最终为负,引理得证.

引理 4[10]　考虑脉冲微分不等式

$$\begin{cases} y''(t)+G(t)y(t)\leqslant 0, t\geqslant t_0, t\neq t_k, \\ y(t_k^+)\geqslant y(t_k), k = 1,2,\cdots, \\ y'(t_k^+)\leqslant C_k y'(t_k), k = 1,2,\cdots, \end{cases} \tag{15}$$

这里 $G(t)\in PC([t_0,\infty),[0,\infty))$,$C_k>0$. 如果

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{C_0C_1\cdots C_i}G(t)\mathrm{d}t = \infty,$$

其中 $C_0 = 1$,那么式(15)没有解 $y(t)$ 满足 $y(t)>0, t\geqslant t_0$.

定理 5　假设引理 1 的所有条件成立,如果

$$w(t) = \int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = 1, t\geqslant t_0, \tag{16}$$

以及式(10)没有最终正解,那么式(1)和式(2)的每一个解振动.

证明:如果式(1)和式(2)有一个非振动解 $x(t)$. 不失一般性,设 $x(\alpha t)>0, t\geqslant t_0$. 那么由引理 2 可知,$z(t)>0, t\geqslant t_0$. 而引理 3 表明,最终有 $z(t)<0$, 这就产生了矛盾,从而命题成立.

利用引理 4 和定理 5,我们容易得到下面的

定理 6　假设引理 1 的所有条件以及式(16)成立. 如果

$$\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{b_0b_1\cdots b_i}\frac{1}{t^2}H(t)\mathrm{d}t = \infty, \tag{17}$$

那么式(1)和式(2)的每一个解振动.

2　例　子

例 1　考虑脉冲微分方程

$$x'(t)+\frac{t+e}{(t+1)^2}x\left(\frac{t}{e}\right)-\frac{1}{t}x(t) = 0,$$
$$t\geqslant t_0 = 5, \tag{18}$$
$$x(t_k^+) = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 x(t_k), k = 1,2\cdots, \tag{19}$$

这里 $t_k = 6k+1$.

计算可得

$$H(t) = p(t)-q\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right) = \frac{t(t+e)}{(t+1)^2}-1 > \frac{1}{2t},$$

$t\geqslant 5$;

$$w(t) = \int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_{\frac{t}{e}}^{t}\frac{1}{u}\mathrm{d}u = 1, t\geqslant 5;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{b_0b_1\cdots b_i}\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\frac{1}{t^2}H(t)\mathrm{d}t > \sum_{i=0}^{\infty}$$
$$\int_{6i+1}^{6i+7}\frac{1}{b_0b_1\cdots b_i}\frac{1}{2t^3}\mathrm{d}t = 12\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(3i+2)(i+1)^2}{(6i+1)^2(6i+7)^2} =$$
∞.

这样,定理 6 的所有条件均满足,因此式(18)和式(19)的每一个解振动.

容易验证 $x(t) = \frac{t}{t+1}$ 是非脉冲方程式(18)的一个非振动解. 此例表明,式(18)和式(19)解

的振动性是由脉冲条件式(19)所引起的.

例 2 考虑脉冲方程

$$x'(t)+\frac{1.97+\frac{1}{2\pi}}{t}x(e^{-\frac{5\pi}{2}}t)-\frac{1}{2\pi t}x(e^{-\frac{\pi}{2}}t)=0,$$

$$t\geqslant t_0=2, \tag{20}$$

$$x(t_k^+)=\left(\frac{k}{k+1}\right)x(t_k),k=1,2\cdots, \tag{21}$$

这里 $t_k=k+2$.

显然条件$(H_1)-(H_3)$成立,简单计算得到

$$w(t)=\int_{\frac{\alpha}{\beta}t}^{t}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u=\int_{e^{-2\pi}t}^{t}\frac{1}{2\pi u}\mathrm{d}u=1,t\geqslant t_0=2;$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{b_0b_1\cdots b_i}\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{-1}\frac{1}{t^2}H(t)\mathrm{d}t=\frac{3.94}{5\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i+1)}{(i+2)(i+3)}=\infty.$$

这样,定理 6 的所有条件均满足,从而式(20)和式(21)的每一个解振动.

由文献[8]中的定理 3.2 可知,方程(20)的所有解是振动的. 此例表明,微分方程(20)解的振动性在脉冲条件(21)下仍然保持.

参考文献:

[1] Samoilenko A M, Perestynk A V. Differential equations with impulsive effect[M]. Kive: Visca Skola, 1987.

[2] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapore: World Science Press, 1989.

[3] Bainov D D, Dinitrova M B, Dishliev A B. Oscillation of the solutions of impulsive differential equations and inequalities with a retarded argument[J]. Rocky Mountain J. Math., 1998, 28(1): 25-40.

[4] Gopalsamy K, Zhang B G. On delay differential equations with impulses[J]. J. Math. Anal. Appl., 1989, 139(1): 110-122.

[5] Graef J R, Shen J H, Stavroulakis I P. Oscillation of impulsive neutral delay differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2002, 268(2): 310-333.

[6] Wang Q R. Oscillation criteria for first-order neutral differential equations[J]. Appl. Math. Lett., 2002, 15(8): 1025-1033.

[7] Ockendon J R, Tayler A B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive[J]. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 1971, 332(2): 447-468.

[8] Guan Kai-zhong, Shen Jian-hua. Hille type oscillation criteria for a class of first order neutral Pantograph differential equations of Euler type[J]. Commun. Math. Anal., 2007, 3(1): 27-35.

[9] Guan Kai-zhong, Shen Jian-hua. On first-order neutral differential equations of Euler form with unbounded delay[J]. Appl. Math. Comput., 2007, 189(1): 1419-1427.

[10] Guan Kai-zhong, Shen Jian-hua. Oscillation criteria for a first-order impulsive neutral differential equations of Euler form[J]. Comput. Math. Appl., 2009, 58(2): 670-677.